UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

8 de Septiembre de 2016(10)

Examen de Métodos Matemáticos II – Grupo C

Nombre y Apellidos:

DNI y firma:

Consejo muy útil: Siempre que sea **razonable** es conveniente comprobar los resultados.

1. [1.75 puntos] Se extiende periódicamente en la recta real la función $f(x) = x + x^2$ en $(0, 1)$ como indican los tres dibujos de la pizarra. Todos los desarrollos tienen la expresión

$$f_{ext}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\,\omega x + b_n \sin n\,\omega x).$$

a) Determinar el período de cada serie así como la constante ω.

b) **Sin calcular**, pero justificando por razones de simetría, decir si alguno de los coeficientes a_0, a_n, b_n es 0.

c) Calcular $\frac{a_0}{2}$ en cada caso.

d) Calcular, mediante la **identidad de Parseval**, $\sum_1^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ para cada desarrollo.

Nota: Si al final del examen tiene usted tiempo se valorará que obtenga esta identidad de Parseval en el caso general en unas pocas líneas. Con qué proposito? Que yo vea que usted sabe sacarla sin copiar de sus notas.

2. [1.75 puntos] Sea la ecuación

$$2x^2y'' + x(2x + 3)y' + (2x - 1)y = 0.$$

a) Escribir el polinomio indicial en $x = 0$ y calcular sus raíces.

Escribir el teorema de Frobenius para este caso concreto (copie de su hoja de fórmulas o mejor aún si lo sabe de memoria) y deje claro si la solución general de la ecuación lleva o no logaritmos.

b) Hallar una solución que **no esté acotada en el origen**.

3. [2.5 puntos] Sea

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in (0, 2),\ t > 0 \\ u(x, 0) = x^2,\ u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0,\ u(2, t) = 4. \end{cases}$$

1) Resolver por separación de variables

2) ¿Cuánto vale $u(x, 1)$?

4. [2 puntos] Sea el problema en el plano

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < r < b, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ u(1, \theta) = -a\cos\theta, \quad u(b, \theta) = a\cos\theta, \end{cases}$$

donde a es una constante positiva no nula y $b > 1$. Dibujar el recinto de integración.

a) **Sin resolver** el problema, decir justificadamente en qué puntos del dominio alcanza $u(r, \theta)$ su valor máximo y mínimo, y cuáles son estos valores.

b) Calcular por separación de variables la única solución acotada del problema.

c) A la vista de la solución obtenida en b) decir qué radio $1 < R < b$ tiene la circunferencia para la cual el potencial es $u(R, \theta) = 0$

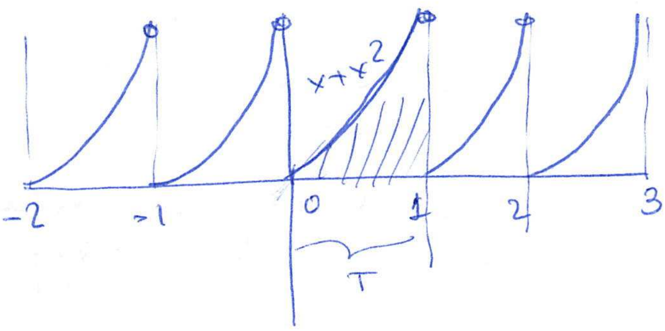
5. [2 puntos] Calcular la solución general de la ecuación

$$u_x + 2xu_y = u\left(2x + y - x^2\right)$$

y determinar la solución particular que contiene a la curva $u(x, 0) = e^{-x^3}$.

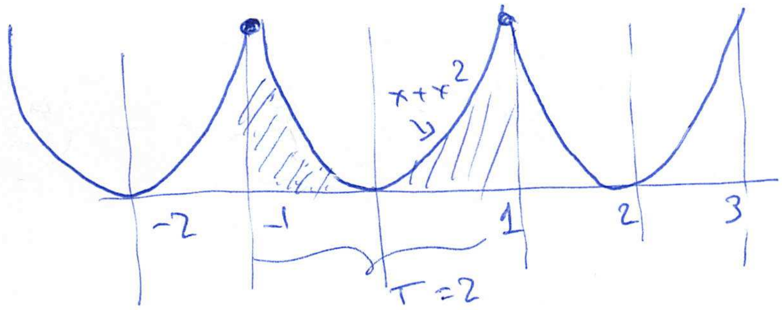
Examen final MM2, Sept 2016

① Ext 1



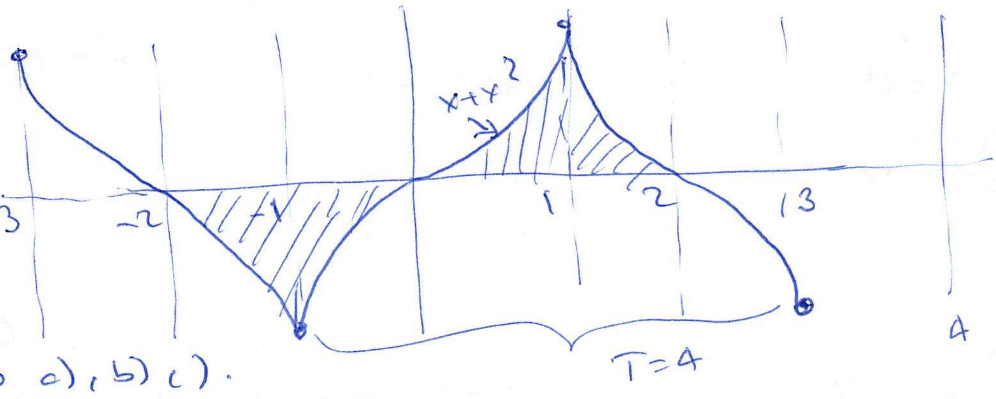
;

Ext 2



;

Ext 3



Answers to a), b) c).

Ext 1: $T = 1$, $\omega = 2\pi$

$$f_{ext} = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \left(a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x \right),$$

a_n, b_n not zero by symmetry. a_0 certainly not zero.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\underset{\uparrow T}{1}} \int_0^1 (x+x^2)\, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, \quad \boxed{\frac{a_0}{2} = \frac{5}{6}}.$$

Ext 2: $T = 2$, $\omega = \pi$

$$f_{ext} = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos n\pi x,$$

$b_n = 0$ for all n by symmetry

no es $x+x^2$

sí es $x+x^2$

$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx$  $= \frac{2}{2}\int_0^1 (x+x^2)\,dx = \frac{5}{6}$; $\boxed{\frac{a_0}{2} = \frac{5}{6}}$

Ext 3 : $T = 4$, $\omega = \frac{\pi}{2}$

$f_{ext} = \sum_{1}^{\infty} b_n \sin n\frac{\pi}{2} x$

Here $\boxed{\frac{a_0}{2} = 0}$ and $a_n = 0$ for all $n = 1, 2, \ldots$ by symmetry.

Parseval : $\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T}\int_{\text{en un periodo}} f_{ext}^2 - \left(\frac{a_0}{2}\right)^2$ see (*)

Ext 1 :

$\frac{1}{T}\int_{\text{extra un periodo}} f_{ext}^2 = \frac{1}{1}\int_0^1 (x+x^2)^2\,dx = \int_0^1 dx\,(x^2 + x^4 + 2x^3)$

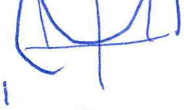
$= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{2}{4} = \frac{31}{30}$;

Then,

$\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{31}{30} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{31}{5} - \frac{25}{6}\right) = \frac{61}{180}$;

$$\boxed{\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{61}{180}}$$

Ext 2 :

$\frac{1}{T}\int_{\text{en un periodo}} f_{ext}^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}$  $^2 = \frac{2}{2}\int_0^1 (x+x^2)^2 = \frac{31}{30}$

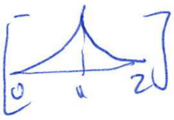
simétrico around $x=0$

$$\boxed{\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}(a_n^2 + \underbrace{b_n^2}_{\to 0 \text{ : todos}}) = \frac{61}{180}}$$

Ex 3 :

simetric around $x=0$

$$\frac{1}{T}\int_{\text{en un periodo}} f_{ext}^2 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f^2 \doteq \frac{1}{2}\int_0^2 f_{ext}^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \Big[$$  $$\Big]^2$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^1 (x+x^2)^2 = \frac{31}{30}$$

simetria alrededor de $x=1$

$$\boxed{\frac{1}{2}\sum_1^{\infty}(a_n^2+b_n^2) = \frac{31}{30}}$$

a_n: todos 0

Note curiosa: nótese que $\frac{1}{T}\int_{\text{ext a un periodo}} f_{ext}^2$ vale lo mismo en todas las extensiones. Se ve gráficamente, como no podía ser de otra manera.

$$f_{ext} = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\omega x + a_2\cos 2\omega x + \dots + b_1\sin\omega x + b_2\sin 2\omega x + \dots$$

$$f_{ext}^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + a_1^2\cos^2\omega x + a_2^2\cos^2 2\omega x + \dots + b_1^2\sin^2\omega x + b_2^2\sin^2 2\omega x + \dots + a_0 a_1\cos\omega x + \dots + 2a_1b_1\cos\omega x\sin\omega x + \dots$$

all double products

$$\int_T f_{ext}^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \cdot T + (a_1^2+a_2^2+\dots)\frac{T}{2} + (b_1^2+b_2^2+\dots)\frac{T}{2}$$

$$\int_0^T \cos^2 n\omega x = \frac{1}{2}\int_0^T (1+\cos 2n\omega x) = \frac{T}{2}. \quad \text{Also } \int_0^T \sin^2 n\omega x = \frac{T}{2}$$

and $\int_0^T \cos n\omega x \sin n\omega x = \dots = 0$

rest.

meaning: extendido a un periodo

Rearranging obtain that

$$\frac{1}{2}\sum_1^\infty (a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{T}\left[\int_0^T f(x)^2 - \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 T\right]$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)^2 - \left(\frac{a_0}{2}\right)^2.$$

L

---

(2) $2x^2y'' + x(2x+3)y' + (2x-1)y = 0$ (*)

a) The point $x=0$ is a singular point of the differential equation. Euler around $x=0$ is

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0$$

($x=0$ is singular regular)

with indicial polynomial

$$2r(r-1) + 3r - 1 = 0,$$

or

$$0 = 2r^2 + r - 1, \quad r \begin{cases} 1/2 \equiv r_1 \\ -1 \equiv r_2 \end{cases}$$

la más grande se llama r_1

This means that the solution of (*) around $x=0$ is

$$y = a_0 x^{1/2} + \frac{b_0}{x} \quad '' \quad a_0 \neq 0, \; b_0 \neq 0$$

bounded when $x=0$

unbounded.

El teorema de Fröbenius dice que como $r_1 - r_2 = \frac{3}{2}$ no es ni cero ni un entero positivo, la solución general de (*) es combinación lineal de dos soluciones, y_1 e y_2 dadas por

$$y_1 = \sum_0^\infty a_n x^{n+1/2} \quad \text{con} \; a_0 \neq 0$$

$$y_2 = \sum_0^\infty b_n x^{n-1} \quad \text{con} \quad b_0 \neq 0$$

La solución general, pues, **no** lleva $\log x$ en ella, obviamente,

$$y_1 \to a_0 x^{1/2},$$
$$y_2 \to \frac{b_0}{x}$$

cuando $x \to 0$, como dice el ídem de Euler!

b) La solución pedida en el problema es y_2, pues es la no acotada en $x=0$. (Llamo y a y_2 para abreviar):

$$y = \sum_0^\infty b_n x^{n-1}, \quad b_0 \neq 0$$

$$y' = \sum_0^\infty (n-1) b_n x^{n-2}$$

$$y'' = \sum_0^\infty (n-1)(n-2) b_n x^{n-3}$$

$$0 = 2x^2 y'' + x(2x+3) y' + (2x-1) y =$$

$$= \sum_0^\infty n(2n-3) b_n x^{n-1} + \sum_0^\infty 2n b_n x^n$$

después de juntar términos y operar. Algo que siempre siempre siempre debe hacerse (y fecharizar!!)

$$= x^{-1} [0 \cdot (-3) b_0]$$
$$+ x^0 [1 \cdot (-1) b_1 + 2 \cdot 0 \cdot b_0]$$
$$+ x [2 \cdot (1) b_2 + 2 \cdot 1 \cdot b_1]$$
$$+ x^2 [3 \cdot (3) b_3 + 2 \cdot 2 \cdot b_2]$$
$$+ x^3 [4 \cdot 5 b_4 + 2 \cdot 3 \cdot b_3]$$
$$+ x^4 [5 \cdot 7 b_5 + 2 \cdot 4 b_4] + \dots$$

From here: b_0 = free (of course) (and $\neq 0$)

$b_1 = 0 = b_2 = b_3 = \dots$ all

Then

$$\eta = \frac{k_0}{x}.$$

In other words $\frac{1}{x}$ (so small in ink) is the unbounded solution at $x=0$ of (*)

[checking: $\eta = 1/x$, $\eta' = -\frac{1}{x^2}$, $\eta'' = \frac{2}{x^3}$

$$2\cdot\frac{2}{x} - \frac{1}{x}(2x+3) + (2x-1)\frac{1}{x} = 0\cdot\frac{1}{x} \qquad -2+2=0$$

]

Nota curiosa: La otra solución no es una función elemental como esta, sino

$$\eta_1 = k_0\sqrt{x}\left(1-\frac{3}{5}x+\frac{3}{14}x^2-\frac{x^3}{18}+\frac{1}{88}x^4-\dots\right).$$

A mí me gusta escribirla como (salvo const multiplicativa)

$$\eta_1 = \frac{1}{x}\int_0^x ds\, e^{-s} s^{1/2}.$$

Otros la escriben como

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}\operatorname{erf}(\sqrt{x}) - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

la función error "no es elemental" (generalmente...)

---

③
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x\in(0,2),\ t>0 \\ u(x,0) = x^2, & u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0, & u(2,t) = 4 \end{cases}$$

El intervalo importante es aquí 

$w = u - ax - b$

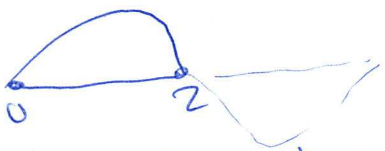
$0 = 0 - b$ " or $\boxed{b=0}$

$0 = 4 - 2a$ " or $\boxed{a=2}$

$$\begin{cases} w = u - 2x \\ w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = x^2 - 2x, \quad w_t(x,0) = 0 \\ w(0,t) = w(2,t) = \underline{\underline{0}} \end{cases}$$

Separating variables: $w = X T$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T'' + \lambda T = 0 \\ T'(0) = 0 \\ \dots \end{cases}$$



$T = 4$ (period: $\omega = \frac{2\pi}{T}$)

$\omega = \frac{\pi}{2}$

$X_n = \{\sin n\frac{\pi}{2}x\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}$

Orthogonality relations:

$$\int_0^2 dx \sin n\frac{\pi}{2}x \sin m\frac{\pi}{2}x = \delta_{nm}.$$

$$\begin{cases} T_n'' - \frac{n^2\pi^2}{4} T_n = 0 \\ T_n'(0) = 0 \end{cases}$$

Solution: $T_n = \cos n\frac{\pi}{2}t$

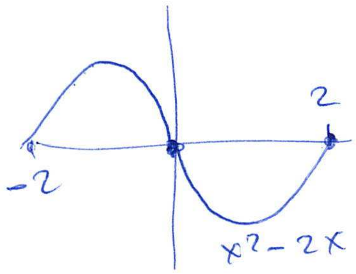
Then,

$$\boxed{w = \sum_1^\infty b_n \cos n\frac{\pi}{2}t \cdot \sin n\frac{\pi}{2}x}$$

where b_n are the coefficients of the expansion:

$$x^2 - 2x = \sum_1^\infty b_n \sin n\frac{\pi}{2}x \text{ "}$$

Y◄%╬<°╤6u╓>Γñ¡εε╟E√Ö+±≥╨£Θí² [Φεç5╡ α»Φ▬Φ▼kî╓_╢0q╗*u.┬ΘY¿;3t╨╙æj?F╗≈µü╪ïöU]



$$\left[\frac{b_n}{2} = \frac{1}{T}\int_{-2}^{2} \sin \frac{n\pi}{2} x \right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{b_m = \int_0^2 (x^2-2x)\sin m\frac{\pi}{2}x}$$

Calculating this integral we obtain,

$$b_m = \frac{2}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^3}\left[\underbrace{\cos n\pi}_{=(-1)^n} - 1\right] \quad , n = 1,2,3,\dots$$

since,

$$\int (x^2-2x)\sin ax = -\frac{1}{a}(x^2-2x)\cos ax + \frac{2(x-1)}{a^2}\sin ax + \frac{2}{a^3}\cos ax$$

(nótese que $\int_0^2$ no lleva ni $(x^2-2x)\cos ax$ (que es 0 cuando $x=0,2$) ni senos).

In other words,

$$b_n = \int_0^2 (x^2-2x)\sin\frac{n\pi}{2}x = \left[\frac{2}{a^3}\cos ax\right]_0^2 \qquad a = n\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{16}{n^3\pi^3}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is par (even)}, \ n=2,4,6,\dots \\ -\frac{32}{n^3\pi^3} & \text{if } n \text{ is odd (impar)}, \ n=1,3,5,\dots \end{cases}$$

Better write $\quad b_{2n-1} = -\frac{32}{(2n-1)^3\pi^3} \quad , n=1,2,\dots$

↑ todos

Así pues,

$$w = -\frac{32}{\pi^3}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}t}{(2n-1)^3}\cdot\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x$$

y

$$\boxed{u = 2x - \frac{32}{\pi^3}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}t}{(2n-1)^3}\cdot\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x}$$

Además

$$u(1,2) = 2 + \frac{32}{\pi^3}\underbrace{\left[1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots\right]}_{\pi^3/32} = 2+1 = 3.$$

(Libros... Fourier series...)

x, t

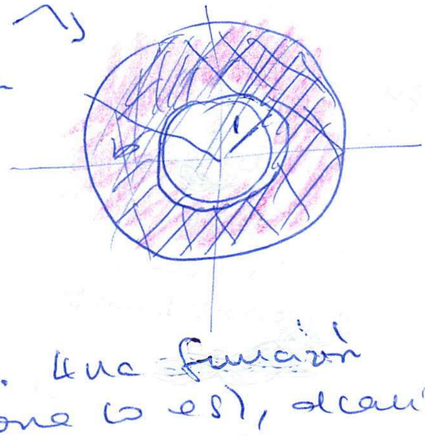
$$\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x \to \begin{cases} 1, & n=1,5,\dots \\ -1, & n=3,7,\dots\end{cases}$$

no pedido

$$\boxed{u(x,1) = 2x} \quad \text{pues} \quad w(x,0)=0$$

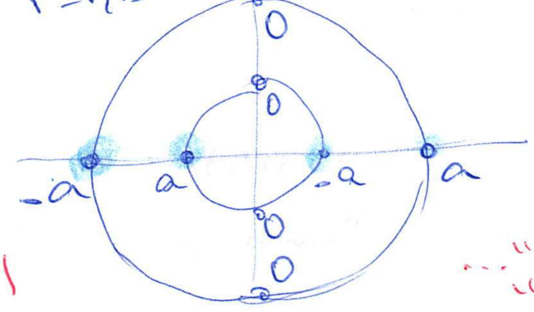
---

④ $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(1,\theta) = -a\cos\theta \\ u(b,\theta) = a\cos\theta \end{cases}$ $1<r<b$ la corona



Aquí, directamente. (solución clásica)

a) u es solución de la ecuac. de Laplace. Una función continua en un compacto (la corona lo es), alcanza máximo y mínimo en el compacto. Pero Laplace, nunca tiene máximos ni mínimos en el interior, luego los echa a la frontera. Así pues $(a>0)$: de cos dentro en $r=1,b$ se hace



"Principio del máximo" de la ecuac. de Laplace (así se llama esta propiedad)

... "del máximo" y del "mínimo"

cuidar que cumple u const a determinar con los datos de contorno.

$u_{máx} = a$, que se alcanza en $\begin{cases}\theta=0, & r=b\\ \theta=\pi, & r=1\end{cases}$

$u_{mín} = -a$, " " $\begin{cases}\theta=0, & r=1\\ \theta=\pi, & r=b\end{cases}$

otros valores: $u=0$ en $(r,\theta)=(b,\pi/2),\ (1,\pi/2),\ (b,-\pi/2),\ (1,-\pi/2),\ \vdots$ y en más ...

[los alcanza todos entre $[-a,a]$ pues u es continua...]

b) Como hemos visto en clase la solución más general de $\Delta u=0$ en el plano con cond de contorno periódica en los ángulos es:

$$u = \underline{c_0} + \underline{d_0}\log r + \sum_1^\infty \left(\underline{a_n} r^n + \frac{c_n}{r^n}\right)\cos n\theta + \sum_1^\infty \left(\underline{b_n} r^n + \frac{d_n}{r^n}\right)\sin n\theta .$$

angulares

Considerando que en el borde $r=1$ y en $r=b$ hay sólo "$\cos\theta$", y usando la ortogonalidad de las funciones, podemos reducir la solución a

(*) [1 ⊥ cos nθ ⊥ sin nθ ...]

$$u = c_0 + d_0\log r + \left(a_1 r + \frac{c}{r}\right)\cos\theta$$

y aún me sobra $c_0 + d_0\log r$ que por ortogonalidad no va a estar. Lo dejo para que vean que no esté. Imposing the boundary conditions we have:

cero pone ahí

$n=1,2,3,\dots$ $\qquad m\neq n.$

(*) $0=\int_0^{2\pi}\cos n\theta = \int_0^{2\pi}\sin n\theta = \int_0^{2\pi}\sin n\theta\cos m\theta = \int_0^{2\pi}\sin n\theta\sin m\theta = \int_0^{2\pi}\cos n\theta\cos m\theta$]

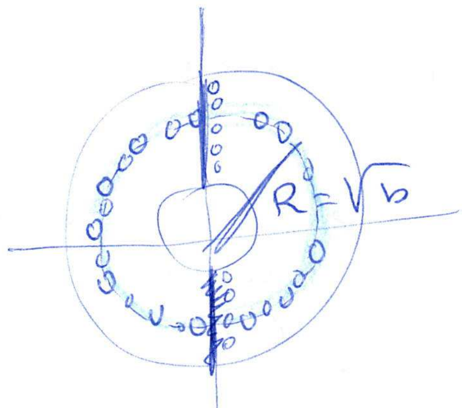
$$\begin{cases} a_0 + d_0 \cdot \log \overset{\to 0}{\cancel{1}} = 0 \\ a_0 + d_0 \cdot \log b = 0 \end{cases} \Rightarrow a_0 = d_0 = 0$$

(por eso puede tomarse $u = \left(a_1 r + \frac{c_1}{r}\right)\cos\theta$ sólo).

$$\begin{cases} a_1 + c_1 = -a \\ a_1 b + \frac{c_1}{b} = a \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{a}{b-1}, \quad c_1 = -\frac{ab}{b-1}$$

$\Rightarrow$ solution of the problem: (unique) $\boxed{u = \frac{a}{b-1}\left(r - \frac{b}{r}\right)\cos\theta}$

c) notice that $u(R,\theta) = 0$ for $R = \sqrt{b}$



También en $u(r, \frac{\pi}{2}) = u(r, 3\frac{\pi}{2}) = 0$ (se veía)

---

(5) $u_x + 2x u_y = u(2x + y - x^2)$ $\qquad u(x,0) = e^{-x^3}$

$(u_x, u_y, -1)\,(1, 2x, u(2x+y-x^2)) = 0$

$$\boxed{\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2x}} = \frac{du}{u(2x+y-x^2)}$$

i) $2x\,dx = dy$ or $\boxed{y - x^2 = c_1}$ 1st charact.

(ii) $$dx = \frac{du}{u(2x+\eta-x^2)} \quad \text{with } \eta - x^2 = c_1,$$

$$(2x+c_1)\,dx = \frac{du}{u} \quad \text{or} \quad \frac{du}{dx} = u(2x+c_1),$$

$$\boxed{u = c_2 e^{x^2+c_1 x}}$$ 2nd charact

General solution:

$$\boxed{\begin{array}{l} u = f(\eta-x^2)\, e^{x^2+x(\eta-x^2)} \\ \text{or} \\ \eta - x^2 = g(u e^{-x^2-x\eta+x^3}) \end{array}}$$

f, g arbitrary functions

Impose now $u(x,0) = e^{-x^3}$. Take the first expression of the general solution:

$$e^{-x^3} = f(-x^2)\, e^{x^2-x^3}$$

or $f(-x^2) = e^{-x^2}$ or $f(x) = e^x$

Thus, $$\boxed{u = e^{\eta(1+x)-x^3}}$$

Check $u = e^{\eta(1+x)-x^3}$ is a soln of the equation:

$$u_x = u(-3x^2+\eta), \quad u_\eta = u(1+x)$$

$$u_x + 2xu_\eta - u(2x+\eta-x^2) = u[-3\cancel{x^2}+\cancel{\eta} + 2x(\cancel{1}+\cancel{x}) - (\cancel{2x}+\cancel{\eta})-\cancel{x^2}]$$

$$\equiv 0 \quad \underline{\text{OK}}$$

L