UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA I

FEBRERO-JUNIO MJRPlaza

# Métodos Matemáticos II

Página web de la asignatura: teorica/ft8/MM2.html

**“Short, simple, straight and logical... some art forms like to get baroque, but in math the point is simplicity.”** –Walter A. Strauss.

Los libros de donde se toman los ejercicios están indicados entre corchetes, así [M&T] es Marsden&Tromba, [Str] Strauss, [Sim] Simmons, [PA] Puig Adam, [PAr] Pepe Aranda apuntes PDE, [W] Weinberger, [To] Tolstov, [BoDi] Boyce&DiPrima etc.
Los problemas en **rojo** se proponen como ejercicios al alumno. Los problemas en negro los hago yo en clase. La solución de casi todos estos problemas se encuentra en la pagina web de la asignatura.

## GENERALIDADES e INTRODUCCIÓN A LAS EDP DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN

1. *Aclaración:* Nota final de la asignatura. Se calificará como induca la *Guía Docente* sobre esta asignatura. Ese es el contrato.

2. [Str, pg 5] For each of the following equations, state the order and whether it is nonlinear, linear inhomogeneous, or linear homogeneous; provide reasons.
   (a) $u_t - u_{xx} + 1 = 0$ (b) $u_t - u_{xx} + xu = 0$ (c) $u_t - u_{xxt} + uu_x = 0$ (d) $u_{tt} - u_{xx} + x^2 = 0$
   (e) $iu_t - u_{xx} + u/x = 0$ (f) $u_x(1 + u_x^2)^{-1/2} + u_y(1 + u_y^2)^{-1/2} = 0$ (g) $u_x + e^y u_y = 0$
   (h) $u_t + u_{xxxx} + \sqrt{1+u} = 0$

3. [Examen Jun07] [PDE de primer orden] Sea la ecuación
$$yu_y - xu_x = u + 2x$$
   y los datos de Cauchy i) $u(x, 0) = -x$, ii) $u(x, 2) = 7x$. Hallar la única solución que satisface uno de ellos y dos soluciones distintas que cumplan el otro.

4. [Str, pg 9] [PDE de primer orden] Solve $u_x + u_y + u = e^{x+2y}$ with $u(x, 0) = 0$

5. [E, pg 284] Resolver las ecuaciones: a) $u_x + u_y + u_z = 0$, **b)** $xu_x + 2yu_y + 3zu_z = 4u$.

6. • [Examen Sep09] [PDE de primer orden] Resolver por el método de las características los dos siguientes problemas:
   i) $\begin{cases} u_t + e^t u_x + 2tu = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$ , ii) $\begin{cases} u_t + e^t u_x + 2tu^2 = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$ .

7. • Nota: Hay ejercicios de PDE de primer orden en casi todos los exámenes importantes del curso. Vea éstos resueltos a mano en la página web de la asignatura. Haga usted en casa los que quiera (lineales o quasilineales) pero no mire las soluciones hasta el final. En clase haremos sólo algunos.

8. [Examen Sep08] Sea la ecuación de primer orden

$$(1+u)u_x + yu_y = u.$$

i) ¿Es $c_2 = x - \ln y + u$ una característica? ¿Y $c_2 = x - \ln y - u$? $c_2$ es una constante arbitraria

ii) Calcular por el método de las características la solución general de la ecuación. *Aclaración 1*: En las ecuaciones no-lineales no se empeñe en despejar $u$, pierde su tiempo, se deja como sale.

iii) Calcular la solución que cumple $u(x,1) = x$. *Aclaración 2*: A veces hay que sacar la función arbitraria probando de dos maneras. Pero no hay que asustarse por ello. Es una ecuación no-lineal, y puede pasar de casi todo.

9. • [PAr] Sea (E) la ecuación $t^2u_t + u_x = 2xu$. Hallar la solución de (E) que cumple $u(x,1) = f(x)$. En particular, si $f(x) = \sin^2 x$ en $[0,\pi]$ y 0 en el resto de $\mathbf{R}$, hallar $u(3,1/2)$. Plantear un problema de Cauchy para (E) que tenga infinitas soluciones.

10. Resolver mediante la *formula de D'Alembert* el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = e^{-t}, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = x^2 \\ u_t(x,0) = -1. \end{cases}$$

11. La ecuación $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ya está escrita en su forma canónica. Sin embargo, admitiendo características complejas se puede demostrar que la solución general de esta ecuacion es $u = f(x+iy) + g(x-iy)$, donde $f$ y $g$ son funciones arbitrarias. Ver que esto es así.

*Comentario:* A las soluciones de esta ecuación en cualquier dimensión se les denomina *funciones armónicas*.

12. Decir de qué tipo es la *ecuación de Tricomi* $u_{yy} - yu_{xx} = 0$ en las diferentes regiones del plano, escribiendo en cada una de ellas su forma canónica.

Esta ecuación describe objetos moviéndose a velocidades supersónicas. Descubierta en 1923 cuando aún no había aviones que volaran más deprisa que el sonido, ha jugado un papel decisivo en el estudio de los vuelos supersónicos.

13. • [Examen Sep07] Calcular $u(x,t)$ sabiendo que $u_{tt} - 4u_{xx} = 16$ y que $u(0,t) = t, u_x(0,t) = 0$.

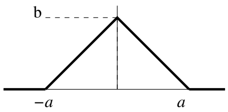
*Sugerencia:* Sale de muchas maneras: haciendo uso de D'Alembert, reduciendo a la forma canónica, etc. Hacedlo esta vez con la fórmula de D'Alembert, para practicar.

14. [PAr] Escribir $u_{tt} + 2u_{xt} = 2$ en forma canónica y hallar su solución general. De los datos de Cauchy: i) $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$, ii) $u(0,t) = 0, u_x(0,t) = t$, hay unos que determinan una única solución de la ecuación diferencial. Hállese en ese caso.

15. • [Sne, pg 109] Reduce the equation

$$(n-1)^2 z_{xx} - y^{2n} z_{yy} = ny^{2n-1} z_y, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

to its canonical form, and find its general solution.

16. • [Str, pg 35] Solve the plucked string, i.e., the wave equation with initial data $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$, where $f(x) =$ 

. Calculate $u(x, a/2c)$, $u(x, a/c)$ and $u(x, 2a/c)$.

17. • [Str, pg 44] [Principio del máximo/mínimo de la ecuación del calor tb conocida como de difusión] Consider the solution $1 - x^2 - 2kt$ of the diffusion equation. Find the locations of its maximum and its minimum in the closed rectangle $\{0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$.

SOLUCIONES DE EDO's MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS

18. De este tema hay muchos problemas **con solución** en el Boyce&DiPrima y el libro está también en internet. Voy a pedir a los estudiantes que conozcan **de memoria** las series de potencias de las funciones elementales famosas, a saber, $1/(1-x)$, $\sin x$, $\cos x$, $e^x$, $\sinh x$, $\cosh x$, $\log(1+x)$, $\arctan x$ etc. Y por supuesto, de la función especial $J_0(x)$ de Bessel de la cual hablaré.

19. [Sim, pg 147] [Review on power series] Use the expansion $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ to find the power series for $\dfrac{1}{(1-x)^2}$: a) by squaring b) by differentiating c) by dividing *à la rusa* 1 by $1 - 2x + x^2$.

20. [Sim, pg 83] [How to obtain a solution from a known solution] The equation $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ is the special case of *Legendre's equation*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

corresponding to $p = 1$. It has $y_1 = x$ as an obvious solution. Find the general solution.

*Ayuda:* Por variación de la constante o usando la fórmula $\int dx\, \dfrac{1}{y_1^2} e^{-\int P\,dx}$, ya saben, de 'cómo sacar una solución a partir de otra conocida'. Y se saca la solución porque es de segundo orden. Si hubiera sido de tercer orden la ecuación diferencial de partida con una solución conocida se podría pasar a una ecuación de segundo orden y así sucesivamente (igual que en los polinomios cada vez que se conoce una raíz, que se puede utilizar ésta para reducir el grado del polinomio en una unidad)

21. • [Sim, pg 83] [How to obtain... from a known solution] The equation $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$ is the special case of *Bessel's equation*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

corresponding to $p = 1/2$. Verify (just derive and check!) that $x^{-1/2}\sin x$ is one solution over any interval including only positive values of $x$, and find the general solution.

22. [Sim, pg 157] [Theorem of regular points] Find the general solution of $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ in terms of power series in $x$. Can you express this solution by means of elementary functions?

23. [Sim, pg 157] [Theorem of regular points] Consider the equation $y'' + xy' + y = 0$.

    a) Find the general solution $y = a_0\, y_1(x) + a_1\, y_2(x)$ with $y_1, y_2$ power series in $x$.

    b) Use the ratio test (*criterio del cociente*) to verify that the two series $y_1$ and $y_2$ converge for all $x$, as the Theorem we saw asserts.

    c) Can you recognize $y_1(x)$? Yes, we can. Use this fact to find the second independent solution by the method 'the use of a known solution to find another'

24. [Sim, pg 157][Theorem of ordinary or regular points] [Second order differential equations do not always have two-term recursion formulae. This example shows it] Verify that the equation

$y'' + y' - xy = 0$ has a three-term recursion formula, and find its series solution that satisfy (six terms at least... you can use Maple) a) $y(0) = 1, y'(0) = 0$ b) $y(0) = 0, y'(0) = 1$

We mentioned in the lectures a Theorem that guarantees that both series converge for all $x$. Notice how difficult this would be to prove by working with the series themselves.

Eso también le pasa a $\tan(x)$, que sacar el radio de convergencia de su serie de potencias es difícil.

25. • [Sim, pg 158] [Regular points Theorem] Solutions of *Airy's equation* $y'' + xy = 0$ are called *Airy's functions* and have applications to the theory of diffraction. Also in Quantum Physics describes a nonrelativistic particle moving in a uniform field. There are many references about Airy functions, one 'Airy functions and applications to Physics' by O. Vallée and M. Soares, Imperial College Press, 2004. Algunos capítulos se pueden consultar on line.

    a) Find the Airy functions in the form of power series, and verify directly that these series converge for all $x$.

    b) Use the result in a) to write down the general solution of $y'' - xy = 0$ without calculation.

26. •[Sim, pg 158] [Theorem of ordinary points] *Chebyshev's equation* is $(1-x^2)y'' - xy' + p^2y = 0$ where $p$ is a constant.

    a) Find two linearly independent series solutions valid for $|x| < 1$.

    b) Show that if $p = n$ with $n$ an integer $\geq 0$, tren there is a polynonial solution of degree $n$. When these are multiplied by a suitable constant they are called *Chebyshev polynomials*. Bien importantes que son!

    *Ayuda:* Si lo han hecho ustedes bien los polinomios que salen son proporcionales a: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, etcétera.

27. [Sim, pg 166] For each of the following differential equations, locate and classify its singular points on the $x$ axis:

    a) $x^3\,(x-1)y'' - 2(x-1)y' + 3xy = 0$;  b) $x^2\,(x^2-1)^2y'' - x(1-x)y' + 2y = 0$;

    c) $x^2y'' + (2-x)y' = 0$;  d) $(3x+1)xy'' - (x+1)y' + 2y = 0$.

28. • [Sim, pg 166] Determine the nature of the point $x = 0$ for each of the following equations:

    a) $y'' + (\sin x)y = 0$;  b) $xy'' + (\sin x)y = 0$;  c) $x^2y'' + (\sin x)y = 0$;

    d) $x^3y'' + (\sin x)y = 0$;  e) $x^4y'' + (\sin x)y = 0$.

29. [Sim, pg 166] Find the *indicial equation* and its roots for each of the following differential equations:

    a) $x^3y'' + (\cos 2x - 1)y' + 2xy = 0$;

    b) $4x^2y'' + (2x^4 - 5x)y' + (3x^2 + 2)y = 0$.

30. El *Teorema de Frobenius* relativo a puntos singulares regulares tiene **tres** apartados pero **cuatro** ejemplos. Denotando por $r_1 \geq r_2$ las soluciones reales ordenadas del polinomio indicial asociado, los ejemplos hechos en clase son:

    i) $r_1 - r_2$ no es ni cero ni un entero positivo. Véase, $2x^2y'' + x(2x+1)y' - y = 0$.

    ii) $r_1 = r_2$, al que corresponde $x^2y'' - 3xy' + (4x+4)y = 0$, que es [Sim, pg 173].

    iii) $r_1 - r_2$ es un entero positivo: $x^2y'' + 2x^2y' - 2y = 0$ y $2xy'' + (x-2)y' + 3y = 0$.

    Por favor, note que siempre uno de estos casos, y no necesariamente el más sencillo, aparece en todos los exámenes importantes del curso.

31. • [Sim, pg 166] Take $p = 0$ in *Bessel's equation*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0.$$

Show that its indicial polynomial has only one root (es una raíz doble, claro está), and show that its corresponding Frobenius series solution is

$$1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

By taking this as $y_1$ solution, and substituting $y_2 = y_1 \log x + x^{r_1+1} \sum_0^\infty b_n x^n$ obtain the second independent solution

$$y_2 = y_1 \log x + \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^{2n}.$$

*Observación:* Este ejercicio viene en el libro con $y_2 = y_1 \log x + x^{r_1} \sum_0^\infty b_n x^n$. Si se hace así, correcto como es, tiene la pega de que se recalcula $y_1$, que no creo que nadie quiera hacerlo de nuevo. Tómese pues un $+1$ que conviene más. Obviamente, $y_1 = J_0(x)$.

32. • [BoDi, pg 278] In the next examples $x = 0$ is a regular singular point. Find $r_1, r_2$. Find the first three nonzero terms in each of two linearly independent solutions about $x = 0$.

1) $xy'' + y' - y = 0$.

*Sol*: $r_1 = r_2 = 0$, $y_1 = 1 + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{36}x^3 + \cdots$, $y_1 \log x - 2\,x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{11}{108}x^3 + \cdots$.

2) $x(x-1)\,y'' + 6x^2 y' + 3y = 0$.

*Sol*: $r_1 = 1, r_2 = 0$, $y_1 = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x^3 + \cdots$, $3y_1 \log x + 1 - \frac{21}{4}x^2 - \frac{19}{4}x^3 - \cdots$.

33. • [Sim, pg 167] [Un caso bien curioso]. The differential equation

$$x^2 y'' + (3x - 1)y' + y = 0$$

has $x = 0$ as an *irregular* point. If you insert $x^r(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$ in this equation, show that $r = 0$ and the corresponding Frobenius series "solution" is the power series $y = \sum_0^\infty n!\, x^n$, which converges only at $x = 0$ [la serie divergente por excelencia, como la llamaba Euler]. This demonstrates that even when a Frobenius series formally satisfies such an equation, it is not necessarily a valid solution.

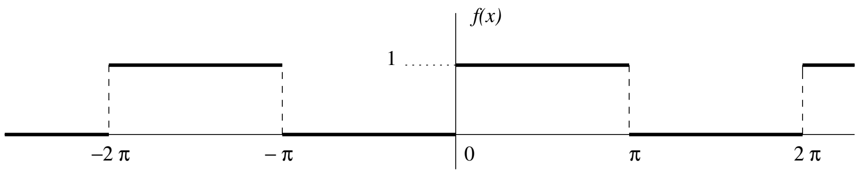
34. • [Boas, pg 434] [Irregular point and equation resolved] Solve $x^3 y'' + xy' - y = 0$ given that $y_1 = x$ is a solution.

*Comment:* The point $x = 0$ is an irregular point. The polynomial solution $y_1 = x$ behaves well at $x = 0$, but the second solution, $x\, e^{1/x}$ is not analytic nor expressible as a Frobenius series around $x = 0$.

35. • [PAr] Sea $3(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$. Hallar los tres primeros términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x = 0$. Estudiar si todas las soluciones están acotadas cuando $x \to \infty$

## SERIES TRIGONOMÉTRICAS DE FOURIER

36. [Boas, pg 310] Expand in a Fourier series the function $f(x)$ sketched in the next figure. This function might represent, for example, a periodic voltage pulse. The terms in our Fourier series would then correspond to the different a-c frequencies which are combined in this 'square wave' voltage, and the magnitude of the Fourier coefficients would indicate the relative importance of the various frequencies.




37. [W, pg 87] Hallar la serie de Fourier de $f(x) = e^x$ en $-\pi < x < \pi$. Hallar la suma de dicha serie en $x = \pi$.

38. [Str, pg 131] Find the Fourier sine series of $f(x) = x$ on the interval $(0, l)$. Apply Parseval's identity to find the sum $\sum_1^\infty 1/n^2$. *Aclaración*: Algunos alumnos principiantes piensan que como la función $x$ es impar en $\mathbf{R}$ lo suyo es desarrollarla periódicamente en serie de *senos* pero no en cosenos. Nada tiene que ver una cosa con otra y el problema habría estado correctamente propuesto si se hubiera pedido la serie de cosenos de $x$ en $(0, l)$. Pero es otro problema diferente. Puede usted echar la cuenta si quiere.

39. • [Str, pg 131] Find the Fourier cosine series of $f(x) = x^2$ on the interval $(0, l)$. Apply Parseval's identity to find the sum $\sum_1^\infty 1/n^4$.

40. • [Str, pg 130] & [To, pg 40] Find the sine Fourier series of the function $\cos x$ on the interval $(0, \pi)$. For each $x$ satisfying $-\pi \le x \le \pi$, what is the sum of the series?

    *Consejo:* **No** pasar de ninguna manera las series de Fourier sin hacer este problema!

41. [Examen Sep07] Calcular la serie de Fourier de $|\sin x|$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Usar el resultado anterior para evaluar $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{4n^2 - 1}$.

    *Sol:* $|\sin x| \sim \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{1}{2^2-1}\cos 2x + \dfrac{1}{4^2-1}\cos 4x + \dfrac{1}{6^2-1}\cos 6x + \cdots\right)$, $-\pi \le x \le \pi$. La suma pedida es $1/2$.

42. [Examen Jun08] Sea la función $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ -2 & 1 < x < 2 \end{cases}$.

    a) Dibujar al menos tres períodos de la función representada por la serie de senos de $f(x)$, y sin calcular ningún coeficiente responder a las siguientes preguntas: ¿A qué valor converge la **serie** en $x = 1$? ¿Y en $x = 2$? ¿Y en $x = 0$? ¿Y en $x = -1$?

    b) Si la función se continúa con período 2 (dibújela, por favor, tres períodos al menos) y se representa por la serie

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x),$$

    ¿cuánto vale $\sum_{n=1}^\infty (a_n^2 + b_n^2)$? (aquí le pido el valor numérico, no una expresión).

    *Sol*: a) $-1/2$, 0, 0 (es serie de de senos!), 1/2 b) Parseval dice que: $\sum_{n=1}^\infty (a_n^2 + b_n^2) = 77/24$

43. [Str, pg 108] Given the Fourier sine series of $f(x) = x$ on $(0, l)$

$$x \sim \frac{2l}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} - \cdots\right),$$

assume that the series can be integrated term by term (a fact that Strauss shows later in his book).

(a) Find the Fourier cosine series of the function $x^2/2$. Find the constant of integration that will be the first term in the cosine series.

(b) By setting $x = 0$ in your result, find the *sum* of the series $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

44. • [Examen Jun09] Sea el desarrollo de $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ en $(0, 1)$ dado por

$$\sin\frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos n\pi x}{\pi\,(1-4n^2)}.$$

a) encuentre el período de la serie y dibuje la extensión de la función $\sin\frac{\pi x}{2}$ que representa (dibuje tres períodos al menos, por favor).

b) Según los teoremas de convergencia puntual de series trigonométricas, ¿cuanto vale la serie en $x = 0$? ¿Y en $x = 1$? Halle el valor de $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)}$.

c) Suponiendo que la igualdad del enunciado puede integrarse término a término, calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin n\pi x}{n\pi\,(1-4n^2)}$ en $0 \le x \le 1$ **y en** $-1 \le x \le 0$.

45. [MJRP] Let $f(x)$ be a function such that $f(x) = -f(x - 2\pi/3)$. Expand $f(x)$ in a full Fourier series. From your result give some examples of functions that satisfy the above relation.

[Hint]: $2\pi/3$ is not the period of $f(x)$. Find the period and expand.

46. • [Str, pg 114] Let $f(x)$ be a function of period $\pi$. If $f(x) \sim \sum_1^\infty b_n \sin nx$ for all $x$ , find the odd coefficients $b_1, b_3, \ldots$.

47. Resolver por separación de variables el problema con solución única

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u(x,0) = u(x,b) = 0, \\ u(0,y) = 0, \ u(a,y) = f(y) \neq 0 \end{cases}$$

48. [Str, pg 108] A rod (varilla) has length $l = 1$ and its temperature satisfies the heat equation. Its left end is held at temperature 0, its right end at temperature 1. Initially (at $t = 0$) the temperature is given by

$$u(x,0) = \begin{cases} 5x/2, \quad 0 < x < 2/3 \\ 3 - 2x, \quad 2/3 < x < 1. \end{cases}$$

Find the solution, including the coefficients.

*Hint:* First find the equilibrium solution $\bar{u}(x)$, and then solve the heat equation with initial condition $u(x,0) - \bar{u}(x)$.

49. [Examen Sep2010] Resolver por separación de variables el problema ($a$ es una constante, no se indica si positiva o negativa)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + au = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x,0) = x\,(\pi - x), \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0. \end{cases}$$

50. [PAr] Resolver la ecuación

$$\begin{cases} \Delta u = x - a, \quad (0,\pi) \times (0,\pi) \\ u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = u_y(x,0) = u_y(x,\pi) = 0. \end{cases}$$

*Comentario:* La condición en el borde del cuadrado (las parciales igual a cero) indican extremos aislados.

51. • [Examen Sep07] Demostrar de manera sencilla (no hace falta calcular la solución!) que el problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x, y < 1 \\ u_x(1,y) = f(y), \\ u_x(0,y) = u_y(x,0) = u_y(x,1) = 0, \end{cases}$$

tiene solución sólo si $\int_0^1 dy\, f(y) = 0$.

*Sugerencia:* Hacedlo como yo lo hice en clase en el problema 50. Y como diría el Prof Weinberger 'Y usted habrá utilizado el *teorema de la divergencia*'.

52. [PAr] Resolver usando separación de variables

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(x,0) = 1, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) = 0, \ u(\pi,t) = \cos t, \quad t > 0. \end{cases}$$

y determinar a la vista de la solución la temperatura $u$ a tiempos grandes.

53. • [Str, pg 158] Find the harmonic function in the square $D = \{0 < x, y < \pi\}$ with the boundary conditions

$$\begin{cases} u(0,y) = 0, \quad u(\pi,y) = \cos^2 y = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2y), \quad 0 \leq y \leq \pi \\ u_y(x,0) = u_y(x,\pi) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

*Nota:* Este problema lo puse en el examen de Septiembre de 2006.

54. • [Examen Jun08] Sea

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in (0,2),\ t > 0 \\ u(x,0) = x^2,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(2,t) = 4. \end{cases}$$

1) Resolver por separación de variables SIN mirar la solución que le doy tras el punto 2).

2) Sabiendo que $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32}$, calcular $u(1,2)$. ¿Cuánto vale $u(x,1)$?

*Sol:* 1) $u(x,t) \sim 2x - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi t/2}{(2n-1)^3} \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x$. 2) $u(1,2) = 3$, $u(x,1) = 2x$.

55. • [Examen Jun07] Encontrar por separación de variables la función $u(x,t)$ que satisface las condiciones

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0, \quad 0 < x < 1/2,\ t > 0 \\ u(x,0) = 1 - 2x, \\ u_x(0,t) = u(1/2,t) = 0. \end{cases}$$

*Sol:* $u(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2\pi^2} e^{-t^2-(2n-1)^2\pi^2 t} \cos(2n-1)\pi x$

56. • [Examen Sep09] Resolver por separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 2\sin x & 0 \le x \le \pi \\ 0 & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}, \quad u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u(2\pi,t) = 0. \end{cases}$$

Comprobar que $u(x,\pi) = -\sin x$.

*Sol:* $u = \cos t \sin x + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2 - 4} \cos\frac{(2n-1)t}{2} \sin\frac{(2n-1)x}{2}$

57. • [PAr] Sea el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = A, \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = B, \quad 0 \le x \le 1 \\ u_x(0,t) = C,\ u_x(1,t) = D, \quad t > 0, \end{cases}$$

donde $A, B, C, D$ son constantes arbitrarias. (a) Resolverlo usando separación de variables. (b) Determinar la relación entre las constantes para que exista una solución estacionaria y calcularla. (c) Dar una interpretación física de la relación obtenida en (b).

*Nota:* Este problema lo puse en el examen de Junio de 2006.

58. [PAr] Resolver la ecuación

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 4u_x - 4u = 0, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-2x}, \quad 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

Una vez resuelta decir cuál sería la solución en el caso en que el dato inicial fuera $u(x,0) = f(x)$, con una $f(x)$ arbitraria pero buena.

59. • [Examen Jun09] Resolver por separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 2u_x = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x} \\ u(0,t) = u(1,t) + u_x(1,t) = 0. \end{cases}$$

(Puede hacer el problema directamente o después de hacer el cambio de variables $u = e^{pt+qx}w$, $p$ y $q$ constantes a determinar, que lleve la ecuación a otra más sencilla)

*Sol:* $u = e^{-t-x} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4} \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x$

60. • [PAr] Resolver por separación de variables la ecuación

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 < x < \pi,\ -\pi/4 < y < \pi/4 \\ u_y(x,-\pi/4) = u_y(x,\pi/4) = 0, & 0 \le x \le \pi \\ u(0,y) = 0, \quad u(\pi,y) = \sin 2y, & -\pi/4 \le y \le \pi/4. \end{cases}$$

A la vista del resultado obtenido, ¿es única la solución?

*Nota:* Esta ecuación se llama de Helmholtz

61. [PAr] Resolver la siguiente ecuación de Poisson en el disco unidad

$$\begin{cases} \Delta u = 4, & r < 1 \\ u(1,\theta) = \cos 2\theta, & \theta \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

*Sol*: $r^2 - 1 + r^2 \cos 2\theta$.

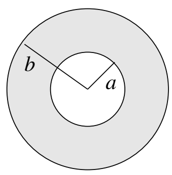
62. Resolver en polares

$$\begin{cases} \Delta u = r, & r < 2,\ 0 < \theta < \pi \\ u_\theta(r,0) = u_\theta(r,\pi) = 0 \\ u(2,\theta) = 3. \end{cases}$$

Pintar bien el recinto. *Sol*: $(r^3 + 19)/9$.

63. [Examen Sep08] a) Calcular la única función armónica del plano que en la corona circular de la figura ($0 < a < r < b$) toma los valores $u(a,\theta) = 1$, $u(b,\theta) = \sin^2\theta$.

b) Decir en qué puntos del plano alcanza $u(r,\theta)$ su valor máximo y mínimo.




64. Find the unique bounded solution (up to an additive constant) that satisfies in a half disk

$$\begin{cases} \Delta u = \cos^2\theta, & r < 1,\ 0 < \theta < \pi \\ u_r(1,\theta) = a, \\ u_\theta(r,0) = u_\theta(r,\pi) = 0. \end{cases}$$

The solution exits only for a particular value of $a$. Specify it.

*Sol*: $a = 1/4$. $u = C + \frac{r^2}{8} + \frac{r^2}{8}(\log r - \frac{1}{2})\cos 2\theta$, with $C$ an arbitrary constant.

65. • Resolver y dibujar el dominio.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & 1 < r < 3 \\ u(1,\theta) = \sin 3\theta, & 0 \le \theta \le \pi \\ u(3,\theta) = u(r,0) = u(r,\pi) = 0 & 1 \le r \le 3 \end{cases}$$

*Nota:* Problema del examen de Junio de 2006.

66. • [Examen Jun08 con **un muy interesante apartado b)** ] a) Hallar por separación de variables la única solución del siguiente problema en el plano

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < 1, \ \theta \in (0,\pi) \\ u(1,\theta) + 2u_r(1,\theta) = 4\sin\dfrac{3\theta}{2} \\ u(r,0) = u_\theta(r,\pi) = 0. \end{cases}$$

b) Si se cambia $+2u_r(1,\theta)$ por $-2u_r(1,\theta)$, el problema tiene infinitas soluciones. Calcular estas soluciones.

67. • [Examen Sep2007, casi como Str, pg 167] The exterior of a circle. Solve $u_{xx} + u_{yy} = 0$ in the exterior $\{r > a\}$ of a disk with the boundary condition $u = 1 + 5\sin^2\theta$ on $r = a$, and the condition at infinity that $u$ be bounded as $r \to \infty$.

*Sol:* $u = \dfrac{7}{2} - \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{a}{r}\right)^2 \cos 2\theta$.

68. • [Examen Jun09] Hallar la única solución **acotada** $u(r,\theta)$ del problema en el plano

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{u_{\theta\theta}}{r^2} = \dfrac{2\sin\theta}{1+r^2} \\ u(1,\theta) = 1 \end{cases},$$

a) en el círculo $r < 1$, b) en el exterior del círculo $r > 1$. *Atención!!* $r\arctan r \to \infty$ si $r \to \infty$

*Sol:* a) $u = 1 + \left[\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\arctan r - 1 + (1 - \frac{\pi}{2})r\right]\sin\theta$ b) $u = 1 + \left[\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\arctan r - 1 + \dfrac{1}{r} - \dfrac{r\pi}{2}\right]\sin\theta$

El aviso que se daba era lo siguiente: en el exterior de un círculo es inusual que $u \sim \frac{r\pi}{2}$. Pero aquí no puede ser de otra manera pues es necesario compensar que $r\arctan r$ diverge como $\frac{r\pi}{2}$ cuando $r \to \infty$. Se compensa restanto el término que origina la divergencia.

69. [Comunicado por Miguel Ángel Rodríguez] La ecuación de Laplace en tres dimensiones es separable sólo en **once** sistemas de coordenadas. Este resultado se debe a L.P. Eisenhart y fue publicado en *The Annals of Mathematics* en 1934 con el título *Separable Systems of Stäckel*.

70. [Leído en el libro de W. A. Strauss, pg 102] Algunos desarrollos de funciones en series de Fourier se descubrieron históricamente mediante series de potencias y llevó un trabajo ingente. Claro, que antes calculaban como dioses.

71. La *identidad de Parseval* no sirve para sumar series alternadas, sólo sabe sumar series positivas.

72. [Leído en el libro de Whittaker&Watson, pag 236] Hay demostraciones de un teorema atribuido a Weierstrass que dice que la *función Gamma* no satisface ninguna ecuación diferencial con coeficientes racionales (se refiere a funciones racionales, o sea cocientes de polinomios, como es el caso de la *ecuación hipergeométrica*, por ejemplo).

73. Junio de 2011. Algunos alumnos integran $\cos x \sin 2nx$ por partes y cosa curiosa, les sale bien: $(\sin x \sin 2nx + 2n \cos x \cos 2nx)/(1 - 4n^2)$. Parece un milagro.

74. Nov 2012. Example of elementary functions that do not have elementary expressible antiderivatives are $e^{-x^2}$, $\sin x^2$, $\sin x/x$, $(e^x - 1)/x$, $\sqrt{x^3+1}$, $1/\sqrt{x^4+1}$ and many others. Eche la cuenta con Maple, int(sqrt(x**3+1),x) por ejemplo, para ver lo que sale.

75. Apr 2013. Y a pesar de no tener primitiva sencilla hemos calculado en clase $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$ con la *transformada de Fourier* de un pulso y poquito más esfuerzo. Recordad de *Variable Compleja* que también puede calcularse por residuos esta integral, evitando el cero del denominador con media corona.

76. Nov 2012. 'One must always invert', Carl G.J. Jacobi, 1804-1851. Que yo lo interpreto como usar el *teorema de inversión de Lagrange* (sort of) tanto como uno pueda. En eso Jacobi era un virguero pues se calculó las funciones inversas de las integrales elípticas. Qué tio!

77. Apr 2013. The theory of distributions (or *generalized functions*, as were also named) was developed by the French and Jewish family mathematician Laurent Schwartz.

78. Apr 2013. [Leído en el libro de Gasiorowicz y en más] 'Any peaked function, normalized to unit area under it, will approach a delta function in the limit that the width of the peak goes to zero'.

79. El *movimiento armónico* aparece en estos ejercicios en cuatro problemas de contorno. El primero asociado a condiciones de contorno Dirichlet

$$\begin{cases} X_n'' + \lambda_n X_n = 0, \\ X(a) = X(b) = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $X_n = \{\sin \frac{n\pi}{b-a}(x-a)\}$, siendo $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $\lambda_n = (\frac{n\pi}{b-a})^2$. La regla de ortonormalización es

$$\int_a^b dx X_n X_m = \frac{b-a}{2}\delta_{nm}.$$

El segundo asociado a condiciones de contorno mixtas

$$\begin{cases} X_n'' + \lambda_n X_n = 0, \\ X(a) = X'(b) = 0 \end{cases}$$

con solución $X_n = \{\sin \frac{(2n-1)\pi}{2\,(b-a)}(x-a)\}$, siendo $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2(b-a)}\right)^2$. Note los enteros semi-impares incluidos en el seno. También se pueden escribir las funciones propias como $X_n = \left\{\cos \frac{(2n-1)\pi}{2\,(b-a)}(x-b)\right\}$. Son idénticas a las anteriores.

La regla de ortonormalización es también

$$\int_a^b dx X_n X_m = \frac{b-a}{2}\delta_{nm}.$$

El tercer problema de contorno corresponde a *condiciones Neumann*,

$$\begin{cases} X_n'' + \lambda_n X_n = 0, \\ X'(a) = X'(b) = 0. \end{cases}$$

Ahora $X_n = \{\cos \frac{n\pi}{b-a}(x-a)\}$, siendo $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ y $\lambda_n = (\frac{n\pi}{b-a})^2$. Nótese que aquí entra el valor propio $\lambda_0 = 0$ con función propia $X_0 = 1$, la constante, que anteriormente no entraba.

Por último el de condiciones de contorno periódicas

$$\begin{cases} X_n'' + \lambda_n X_n = 0, \\ X(a) = X(b), \\ X'(a) = X'(b). \end{cases}$$

Las funciones propias son degeneradas (hay dos por cada valor propio),

$$X_n = \{\sin \frac{2\pi n}{b-a}(x-a), \quad \cos \frac{2\pi n}{b-a}(x-a)\},$$

con $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $\lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{b-a}\right)^2$. Está además, $\lambda_0 = 0$ con $X_0 = 1$, que no es degenerada.