Soluciones Julio 2019

(new September)

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

1 de Julio de 2019(2)

Examen Extraordinario de Estructura de la Materia, grupo A

Nombre y Apellidos:

Firma y DNI:

Justifique las respuestas que lo precisen o no se tendrán en cuenta. Hay algunas ayudas al final de los enunciados.
Muy importante: el profesor no operará nada de lo que usted deje sin operar. Más aún, los resultados que no estén debidamente operados no se tendrán en cuenta a la hora de puntuar. El examen son 320 puntos.

C1 [20pt] Dada la configuración electrónica del (raro) Neon $1s^2 2s^2 2p^5 3s^1$ a) ¿cuántas veces aparece el valor $J = 1$ del momento angular total en un acoplamiento jj? Haga la tabla de clase para verlo.

b) Si el acoplamiento hubiera sido LS en lugar de jj, ¿cuántas veces habría aparecido ese mismo valor?

C2 [50pt] [Un clásico] a) ¿Cuántos **mesones** se pueden formar con $1, 2, 3, 4$ diferentes sabores de quark? (Aclaración: un sabor de quark es u, dos sabores son u, d, tres son u, d, s, cuatro u, d, s, c, y así sucesivamente. Determinar la fórmula general para n sabores.

b) a) ¿Cuántos **bariones** se pueden formar con $1, 2, 3, 4$ diferentes sabores de quark? Determinar la fórmula general para n sabores.

C3 [10pt] Comparado el radio de Bohr del hidrógeno a_0 con la longitud de onda Compton del electrón λ_C, el primero es (a) 100 veces más grande, (b) 1000 veces más grande, (c) del mismo orden que el segundo.

P1 [110pt] Sea la desintegración $\rho^0 \to \pi^+ + \pi^-$.

a) suponiendo que el mesón ρ^0 está en reposo, ¿cuál es la velocidad de los piones salientes?

b) Si el mesón viaja a velocidad v y uno de los piones emerge formando un angulo de 90^0 con la dirección del mesón incidente, ¿con qué ángulo sale despedido el otro pión?

Se puntuará: 1) el dibujo de cada reacción, 2) los cuadrimomentos de cada partícula con toda la información del enunciado, 3) el teorema de conservación de energía-momento en las componentes relevantes, 4) operaciones sensatas, limpias y el resultado **correcto**, 5) el uso de invariantes Lorentz, 6) la aplicación numérica tomando datos del Griffiths,

El resultado ha de escribierse en función de los datos del problema, es decir, m_ρ, m_π, además de β y γ en el apartado b). Notación de los cuadrivectores: la indicada en la pizarra.

P2 [130pt] La interacción spin-órbita en el átomo de hidrógeno viene dada por

$$H_{SO} = \frac{a}{r^3}\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}, \qquad a \equiv \frac{e^2}{2m_e^2c^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0}$$

donde a es una constante. a) Calcular la corrección $\langle\psi|H_{SO}|\psi\rangle$ a la energía del estado ψ siendo ψ el autoestado del hidrógeno $\psi_{211-1/2}$. La notación utilizada es $\psi_{nlm_lm_s}$, o sea, $n = 2, l = 1, m_l = 1, m_s = -1/2$. b) Hacer lo mismo pero con $\psi = \psi_{310\,1/2}$.

El resultado anterior puede dejarse de una de las dos siguientes maneras: como un número multiplicado por $a\hbar^2/a_0^3$ o como un número multiplicado por $E_1\alpha^2$, usted elige. De ninguna otra manera.

Necesitará la tabla de coeficientes de Clebsch-Gordan o similar. No puede usar $\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{nl}$ copiado de sus notas. Tiene que hacer las integrales.

Usted puede necesitar (o no) alguno de los siguientes datos:

En la siguiente lista de armónicos esféricos, θ, φ son los ángulos polar y azimutal, respectivamente, de las coordenadas esféricas. Asterisco significa el complejo conjugado. Las funciones de onda radiales $R_{nl}(r)$ son las del hidrógeno ($Z = 1$), y a_0 es el radio de Bohr.

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}, \qquad \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0} = 2\,|E1| = m_e c^2\alpha^2.$$

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\,\pi}}\sin\theta\, e^{i\,\varphi}, \quad Y_1^{-1} = -Y_1^{1*},$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\,\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right), \quad Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\,\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\,\varphi}, \quad Y_2^{-1} = -Y_2^{1*},$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\,\pi}}\sin^2\theta\, e^{2\,i\,\varphi}, \quad Y_2^{-2} = Y_2^{2*}.$$

$$L_+ Y_l^m = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\,\hbar\; Y_l^{m+1}, \quad L_- Y_l^m = \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\,\hbar\; Y_l^{m-1}.$$

$$R_{10} = 2\,a_0^{-3/2}\exp(-r/a_0),$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,a_0^{-3/2}\Big(1 - \frac{r}{2a_0}\Big)\exp(-r/2a_0), \quad R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}}\,a_0^{-3/2}\frac{r}{a_0}\exp(-r/2a_0),$$

$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}}\,a_0^{-3/2}\Big(1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2}{27}\Big(\frac{r}{a_0}\Big)^2\Big)\exp(-r/3a_0),$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}}\,a_0^{-3/2}\Big(1 - \frac{r}{6a_0}\Big)\Big(\frac{r}{a_0}\Big)\exp(-r/3a_0).$$

$$\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle_{nl} = \frac{1}{n^2\,a_0}, \quad \left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle_{nl} = \frac{2}{n^3\,(2l+1)\,a_0^2},$$

(C1) a) 2
b) 2

The configuration $1s^2 2s^2 2p^5 3s^1$ is the same as $1s^2 2s^2 2p^1 3s^1$ if we only count terms and values of J. This is false if we are studying energies, for instance. But we are counting values of J. The reason is because full shells or subshells have $L = S = 0 = J$.

$1s^2 2s^2 \underbrace{2p^5 3s^1}_{\text{one hole, one electron}}$ or $1s^2 2s^2 \underbrace{2p^1 3s^1}_{\text{one electron another elect}}$

a) jj coupling

$l_1 = 1,\ s_1 = 1/2,\ j_1 = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

$l_2 = 0,\ s_2 = 1/2\ \ j_2 = 1/2$

j_1	j_2	J	$2J+1$	sum of $2J+1$
3/2	1/2	2, 1	5, 3	8
1/2	1/2	1, 0	3, 1	4
				12 states

as expected: $\underbrace{\begin{matrix}1\\0\\-1\end{matrix} \times 1/2}$ $\times$ $\underbrace{0 \times \begin{matrix}1/2\\-1/2\end{matrix}}$ $= 6 \times 2 = 12$

degeneracy: 6 possible states for hole or electron p¹ — 2 possible states for e_2

L

(same number of J's: $\underline{\underline{2}}$)

b) LS coupling

$L = 1,\ S = 1, 0$

L	S	J	$2J+1$	sum of $2J+1$
1	1	2, 1, 0	5, 3, 1	9
1	0	1	3	3
				12

(C3) Scales:

	Angular momentum	E	$t = [\frac{\hbar}{E}]$	vel	length = Vel · t
	$\hbar$	$m_e c^2$	$\frac{\hbar}{m_e c^2}$	c	$\frac{\hbar}{m_e c} = \lambda_c$
"fast"	$\hbar$				
"not so fast" $c \to c\alpha$	$\hbar$	$m_e c^2 \alpha^2$	$\frac{\hbar}{m_e c^2 \alpha^2}$	$c\alpha$	$\frac{\hbar}{m_e c\alpha} = a_0$

$a_0 = \frac{\hbar}{m_e c \alpha}$

$\lambda = \frac{\hbar}{m_e c}$; $\frac{a_0}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \simeq 137$

Then : a) 100 times larger
b) 1000 times larger
c) about the same order

a is the correct answer.

C2 Mesons: quark-antiquark

1 quark: (u)

$u\bar{u}$ ——— $1 = 1^2$ meson

2 quarks (u, d)

$u\bar{u}$
$u\bar{d}$ ——— $4 = 2^2$ mesons
$d\bar{u}$
$d\bar{d}$

3 quarks (u, d, s)

u — $\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{s}$

d — $\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{s}$ ——— $9 = n^2$ mesons

s — $\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{s}$

⋮

n quarks ——— n^2 mesons

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA II
(METODOS MATEMATICOS DE LA FISICA)
28040 MADRID - ESPAÑA
TELEF.: (34) (1) 394 51 98
FAX.: (34) (1) 394 51 97
TELEX: 47273 FFUC - E

Baryons : qqq : three quarks

1 quark (u)

uuu —— 1 baryon

2 quarks (u, d)

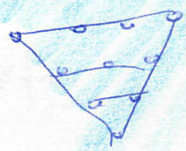
Note : $uud = udu = duu$ (same particle)

uuu
uud —— 4 baryons
udd
ddd

3 quarks (u, d, s)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} uuu \\ ddd \\ sss \end{array}\right\} 3 \\ \\ \left.\begin{array}{l} uud \\ uus \\ ddu \\ dds \\ ssu \\ ssd \end{array}\right\} 3\times 2 \end{array}\right\} 3+6+1 = 10$$

el decuplete de bariones!!



(vamos muy bien)

uds : 1

4 quarks (u, d, s, c)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} uuu \\ ddd \\ sss \\ ccc \end{array}\right\} 4 \\ \\ \left.\begin{array}{l} uu < d, s, c \\ dd < u, s, c \\ \vdots \end{array}\right\} 4\times 3 \end{array}\right\} 4+12+4 = 20 \text{ baryons}$$

All different : 4 :

n quarks

three equal quarks — n

two equal quarks — $n(n-1)$

All three different — $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

$\underbrace{6 = 3!}$ permutation of 3 elements

total: $n + n(n-1) + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

$$= n^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$= n\left[n + \frac{1}{6}(n^2 - 3n + 2)\right]$$

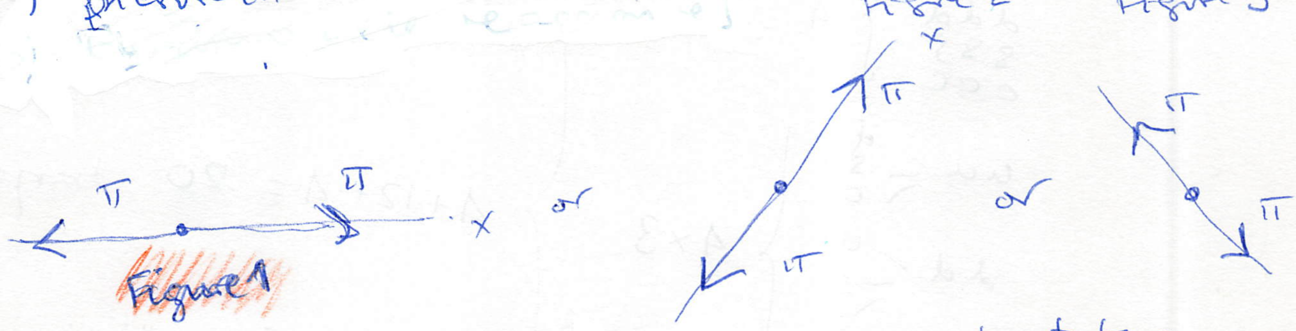
$$= \frac{n}{6}\left[n^2 + 3n + 2\right]$$

$n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

A total of $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ baryons out of n quarks

P2 a) In the system of reference where ρ^0 is at rest, the picture of the reaction is:



You have to take the first figure and add that the decay is on a line (the x axis). If you take the second figure, the x axis is the line of the decay... (it is the same figure as you can see...) The angle with the "horizontal" is inessential. The decay is on a line: call it x axis.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA II
(METODOS MATEMATICOS DE LA FISICA)
28040 MADRID - ESPAÑA
TELEF.: (34) (1) 394 51 98
FAX.: (34) (1) 394 51 97
TELEX: 47273 FFUC - E

$$\overset{\rho^0}{\begin{pmatrix} m_\rho c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \overset{\pi^+}{\begin{pmatrix} E_2/c \\ -p_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} E_2/c \\ p_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mass of π^+ = mass of π^-.

with
$$\left(\frac{E_2}{c}\right)^2 - p_2^2 = m_\pi^2 c^2 \qquad \text{(Lorentz invariant)}$$

From conservation of energy-momentum and Lorentz invariants, we have the equations

$$m_\rho c = \frac{2E_2}{c} \Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{1}{2} m_\rho c^2} \qquad [1]$$

$$\left(\frac{E_2}{c}\right)^2 - p_2^2 = m_\pi^2 c^2. \qquad [2]$$

To determine the velocity of π^-, say, we take the momentum of π^-, p_2, and divide it by the energy of π^-, E_2 since

$$p_2 = m_\pi \gamma_\pi v_\pi$$

"π" is a subindex here

$$E_2 = m_\pi \gamma_\pi c^2$$

Here
$$\gamma_\pi^2 \cong 1 - \frac{v_\pi^2}{c^2}.$$

The velocity of π^- is v_π, but the velocity of π^+ is also v_π in modulus but goes in the opposite direction. Thus,

$$\frac{v_\pi}{c} = c\,\frac{p_2}{E_2} = c\,\frac{1}{E_2}\sqrt{\left(\frac{E_2}{c}\right)^2 - m_\pi^2 c^2}.$$

use Lorentz invariant [2]

since $E_2 = \frac{1}{2} m_\rho c^2$, ~~we~~ we have that

$$\frac{v_\pi}{c} = c\,\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2} m_\rho c\right)^2 - m_\pi^2 c^2}}{\frac{1}{2} m_\rho c^2},$$

that it is simplified to

$$\boxed{\frac{v_\pi}{c} = \sqrt{1 - 4\frac{m_\pi^2}{m_\rho^2}}}$$

[The velocity of π^- is determined exclusively by the masses involved in the decay: m_π and m_ρ.]

numerical application (from Griffiths in your hands]:

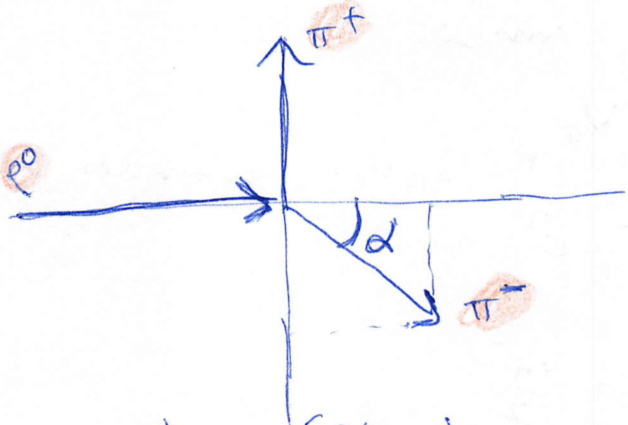
$m_\pi c^2 = 139.57$ MeV

$m_\rho c^2 = 770$ MeV

and

$$\boxed{\frac{v_\pi}{c} = 0.93}$$

b)



$$\underset{\rho^0}{\begin{pmatrix} E_1/c \\ p_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \underset{\pi^+}{\begin{pmatrix} E_2/c \\ 0 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix}} + \underset{\pi^-}{\begin{pmatrix} E_3/c \\ p_3 \cos\alpha \\ -p_3 \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}}$$

that we rewrite (for convenience) as

FACULTAD DE FÍSICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA II
(MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA FÍSICA)
Ciudad Universitaria s/n. 28040 Madrid
Teléfono y fax 913944557

$$\begin{pmatrix} m_\rho \gamma c \\ m_\rho \gamma v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2/c \\ 0 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_3/c \\ p_3 \cos\alpha \\ -p_3 \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\underset{\mathbb{P}_1}{\equiv} \qquad \underset{\mathbb{P}_2}{\equiv} \qquad \underset{\mathbb{P}_3}{\equiv}$$

"artistic" $\mathbb{P}$ is quadrimomentum
"plain" p is momentum.
where v is the velocity of the rho particle and

$$\gamma^2 \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}.$$

observe that γ is not the same as γ_π in case a)
[there $\gamma = 1$ and we never saw it].

Energy-momentum equations and Lorentz invariants are

$$m_\rho \gamma c = \frac{E_2}{c} + \frac{E_3}{c}, \qquad [1]$$

$$m_\rho \gamma v = p_3 \cos\alpha, \qquad [2]$$

$$p_2 = p_3 \sin\alpha, \qquad [3]$$

$$\left(\frac{E_2}{c}\right)^2 - p_2^2 = \left(\frac{E_3}{c}\right)^2 - p_3^2 = m_\pi^2 c^2. \qquad [4] \quad ([4],[5] \text{ in fact})$$

The angle α is easily found with [2], [3], [4].

$$\tan\alpha = \frac{p_2}{m_\rho \gamma v} = \frac{\sqrt{\left(\frac{E_2}{c}\right)^2 - m_\pi^2 c^2}}{m_\rho \gamma v}.$$

[4]

To express E_2 in terms of quantities relative to rho, (p_1, E_1, v) we better use the Lorentz invariant that squared

$$\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_3,$$

that is,

$$\mathbb{P}_1^2 + \mathbb{P}_2^2 - 2\,\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_3^2$$

or

$$m_\rho^2 c^2 + \cancel{m_\pi^2 c^2} - 2 m_\rho \gamma E_2 = \cancel{m_\pi^2 c^2},$$

that gives

$$E2 = \frac{m_\rho c^2}{2\gamma}.$$

What follows is an elemental deduction,

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{\left(\frac{m_\rho c^2}{2\gamma}\right)^2 - m_\pi^2 c^2}}{m_\rho \gamma v}$$

$$E2 = \frac{m_\rho c^2}{2\gamma}$$

or

$$\tan\alpha = \left(\sqrt{1 - \frac{4 m_\pi^2 \gamma^2}{m_\rho^2}}\right) \Big/ 2\beta\gamma^2,$$

in terms of

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \quad , \quad \gamma^2 = 1 - \beta^2.$$

For instance, when $v = 0.8c$, $\gamma^2 = 25/9$ and $\tan\alpha \simeq 0.179$ that corresponds to $\alpha \simeq 10.16°$, if I am right.

<u>comment</u>: The numerator of $\tan\alpha$, $\sqrt{1 - \frac{4 m_\pi^2 \gamma^2}{m_\rho^2}}$

is $\frac{v_{\pi^+}}{c}$, with v_{π^+} the velocity of the prior π^+ that pool along the y-axis. But this is not a comment expected in the exam.

(P2) a) Remember September 2017 (Ver este examen)

b) $\psi_{3,1,0,1/2}$ — n, ℓ, m_ℓ, m_s

L ↓ ↓ S

$L = 1$
$S = 1/2$

$1 \times 1/2$	$3/2$	$1/2$	J
	$1/2$	$1/2$	M_J
1 $\;-1/2$	$1/3$	$2/3$	
0 $\;\;1/2$	$2/3$	$-1/3$	
m_1 $\;m_2$			

Clebsch-Gorden table

$$\psi_{3,1,0,1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} J & M_J \end{array} \\ \vec{L}\cdot\vec{S}\left[\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right] = & \frac{\hbar^2}{2}\left[\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right] \end{array}$$

$$\vec{L}\cdot\vec{S}\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right] = \frac{\hbar^2}{2}(-2)\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right]$$

$$\vec{L}\vec{S}\cdot\psi_{310\,1/2} = \frac{\hbar^2}{2}\left[\sqrt{\tfrac{2}{3}}\left[\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right] + \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right]\right]$$

$$= \frac{\hbar^2}{2}\left[\sqrt{\tfrac{2}{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\psi_{311\,-1/2} + \cancel{\sqrt{\tfrac{2}{3}}\psi_{310\,1/2}}\right] + \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{\tfrac{2}{3}}\psi_{311\,-1/2} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}\psi_{310\,-1/2}}\right]\right]$$

Clebsch-Gordon [again]

$$= \frac{\hbar^2}{2}\left[\sqrt{2}\right]\psi_{311\,-1/2}$$

$$\int d\Omega\, Y_1^{0*}\, Y_1^1 = 0$$

The expected value

$$\langle \underbrace{\psi_{310\,1/2}}_{Y_1^0} \left| \frac{a}{r^3}\frac{\hbar^2}{2} \right| \underbrace{\psi_{311\,-1/2}}_{Y_1^1} \rangle = 0$$

so $\boxed{\langle \psi_{310\,1/2} | H_{SO} | \psi_{310\,1/2} \rangle = 0}$

The spin orbit term does not modify the energy of the $\psi_{310\,1/2}$ hydrogen state.