(Estructura de la Materia, Junio de 2017)

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

12 de Junio de 2017

Examen de Junio de Estructura de la Materia, grupo A

Nombre y Apellidos:

Firma y DNI:

El examen consta de teoría y problemas. Justifique las respuestas, excepto cuando sean de elección múltiple, o no se tendrán en cuenta. Los problemas sí necesitan respuestas justificadas, como siempre. Hay algunas ayudas al final de los enunciados.
El alumno que se presente a todo el curso tiene que hacer todo el examen: 360 puntos normalizables a 10. El que se presente al segundo parcial no hará la pregunta del Helio.

C1 [10 puntos] En el modelo de Thomas-Fermi, la energía total de ligadura de un átomo neutro crece con a) $2\log Z$, b) $Z^{5/3}$, c) $Z^{7/3}$, d) Z^2, siendo Z el número atómico.

C2 [20 puntos] Diga si alguna de las siguientes reacciones **no** se ha observado nunca y por qué. a) $\tau \to e + \gamma$, b) $p \to \pi^0 + e^+$, c) $J/\psi \to \gamma + \gamma$, d) $n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_\mu$. τ es un leptón de tercera generación y J/ψ es el mesón $c\bar{c}$, con c el quark 'charm'.

C3 [20 puntos] Varios experimentos creyeron haber detectado el *pentaquark* Θ consistente en un estado ligado de cuatro quarks y un antiquark de la forma $uudd\bar{s}$. a) Determine su carga, número bariónico y extrañeza. b) Sabiendo que cada quark tiene spin 1/2 diga si Θ es un bosón (spin entero) o un fermión (spin semientero).

C4 [20 puntos] Enumere las *reglas de Hund* y diga para qué se emplean.

C5 [40 puntos] Partiendo de la ecuación diferencial de Thomas-Fermi deducir por qué el modelo no es aplicable a iones negativos.

C6 [50 puntos] El principio variacional aplicado al átomo de Helio para determinar la energía del estado fundamental incluyendo la repulsión de los electrones. Z efectiva igual a 1.6875.

P1 [40+70 puntos] a) Dada la configuración electrónica $1s^2 2s^2 \ldots ns^2 np^6 nd^2$, con todas las capas internas llenas y nd con sólo dos electrones, hallar a1) la degeneración, a2) el estado fundamental mediante las reglas de Hund y a3) escribir otros posibles términos de la configuración, pero sin ordenar energéticamente.

b) En el caso del Nitrógeno, que ya lo hicimos en clase. Se pide: b1) la degeneración, b2) rellenar la tabla (ver pizarra) a medida que se usa Hund con los números cuánticos del estado fundamental y b3) escribir **explícitamente** la función de ondas espacial normalizada del estado fundamental, no con coordenadas esféricas, hoy no, sino utilizando la notación algebraica

$$|l_1, m_{l_1}\rangle \otimes |l_2, m_{l_2}\rangle \otimes |l_3, m_{l_3}\rangle \equiv [m_{l_1}, m_{l_2}, m_{l_3}].$$

y simetríca o antisimetríca, lo que deba ser, al cambio de electrones. b4) Siguiendo con la función espacial: usar los operadores $L_\pm$ de la ayuda para asegurarse de que el estado obtenido en el apartado anterior tiene la L total que debe tener y la proyeccion correspondiente M_L.

P2 [50+20+20 puntos] Si un protón con energía cinética K choca elásticamente con un protón en reposo y los dos protones rebotan con energías iguales, a) calcular el ángulo existente entre ambos en función de K y de la masa del protón.

b) Suponga que $K = 437\,\mathrm{MeV}$, ¿cuál es dicho ángulo? [R.B. Sutton *et al*, *Phys. Rev.* **97** (1955) 783, hallaron experimentalmente el valor $84.0^{\mathrm{o}} \pm 0.2^{\mathrm{o}}$.]

c) Si el protón entrante posee una energía total de 33 GeV, ¿cuál es ahora el ángulo que forman ambos?

Ayuda: Recuérdese, la energía cinética K de una partícula es por definición $K = E - mc^2$, es decir, la energía total E (la que se pone en la entrada superior del cuadrimomento de la partícula) menos la energía de masa.

Usted puede necesitar (o no) alguno de los siguientes datos:

En la siguiente lista de armónicos esféricos, θ, φ son los ángulos polar y azimutal, respectivamente, de las coordenadas esféricas. Asterisco significa el complejo conjugado. Las funciones de onda radiales $R_{nl}(r)$ son las del hidrógeno ($Z = 1$), y a_0 es el radio de Bohr.

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \quad Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{i\varphi}, \quad Y_1^{-1} = -Y_1^{1*},$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right), \quad Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta\, e^{i\varphi}, \quad Y_2^{-1} = -Y_2^{1*},$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta\, e^{2i\varphi}, \quad Y_2^{-2} = Y_2^{2*}.$$

$$L_+ Y_l^m = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\,\hbar\, Y_l^{m+1}, \quad L_- Y_l^m = \sqrt{l(l+1) + m(-m+1)}\,\hbar\, Y_l^{m-1}.$$

$$R_{10} = 2\, a_0^{-3/2} \exp(-r/a_0),$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, a_0^{-3/2} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) \exp(-r/2a_0), \quad R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}}\, a_0^{-3/2} \frac{r}{a_0} \exp(-r/2a_0),$$

$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}}\, a_0^{-3/2} \left(1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2}{27}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2\right) \exp(-r/3a_0)$$

Estructura de la materia - June 2017

(C1) $E_{TF} \sim Z^{7/3}$, Z: número atómico

Es un resultado famoso y bien conocido.

(C2)

Decay	Observado?	Razón
$\tau \to e+\gamma$	NO	NO conserva número electrónico: $0 \neq 1+0$. Es suficiente. [conserva carga: $\tau^- \to e^- + \gamma$ or $\tau^+ \to e^+ + \gamma$, número leptónico $1=1$ or $-1=-1$, número bariónico $0=0$, ...]
$p \to \pi^0 + e^+$	NO	NO conserva número bariónico $1 \neq 0+0$. Es suficiente. Pero además no conserva número electrónico: $0 \neq 0-1$, tb suficiente. Ni leptónico, claro está.
$J/\psi \to \gamma+\gamma$	?	Conserva carga, número bariónico, número leptónico, ... no parece estar prohibido ... debería poder observarse. Esto es lo que desean contestar en el examen "debería poder observarse". Abajo tienen lo que de verdad ocurre.
$n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_\mu$	NO	NO conserva número electrónico. El neutrino $\bar{\nu}_\mu$ no puede salir, tiene que ser $n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ [bien conocida] [desintegración β] $L_e(n) = L_e(p^+) = 0$ $L_e(e^-) = 1$ $L_e(\bar{\nu}_e) = -1$, $L_e(\bar{\nu}_\mu) = 0$ $L_e(e^+) = 2^a$ reacción [decay] $= -1$

C

El decay $J/\psi \to \gamma+\gamma$, que tendría lugar por interacciones electromagnéticas, no se ha observado nunca, porque viola conjugación de carga, un número cuántico conservado en interacciones electromagnéticas,

$$C(J/\psi) = C(c\bar{c}) = (-1)^{l+s} = (-1)^{0+1} = (-1)^1 = -1$$

sistema compuesto

momento angular orbital del sistema $c\bar{c}$: $l=0$, $s=1$ ← spin [ver lista de clase]

[J/ψ: es un bosón, funciona simétrico]

$-1 \neq 1$

$$C(\gamma+\gamma) = C(\gamma)\cdot C(\gamma) = (-1)\cdot(-1) = 1$$

charge conjugation is a multiplicative quantum number ; $C(\gamma) = -1$

Pero sí puede darse,

$$J/\psi \to \gamma+\gamma+\gamma$$

← tres fotones.

Curioso [ver lista de clase]: $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \to \gamma+\gamma$. Lo pone.
Por qué sí π^0, y no J/ψ? Por el spin, claro está.

(G3) $\theta = uudd\bar{s}$

	Q	Strangeness	B
u	2/3	0	1/3
d	-1/3	0	1/3
s	-1/3	-1	1/3
$\bar{s}$	1/3	1	-1/3

strangeness = # antistrange quarks − # strange quarks.

charge: θ is $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}} = 1 = +$: θ^+

strangeness: $0+0+0+0+1 = 1$

$B(\theta)$: barion number $= \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{3}} = 1$

$\boxed{\theta^{+},\ S=1,\ B=1,\ \text{fermion}}$

It is a fermion because ~~the~~ each quark has spin $1/2$

$$\underset{S_1}{\tfrac{1}{2}},\ \underset{S_2}{\tfrac{1}{2}},\ \underset{S_3}{\tfrac{1}{2}},\ \underset{S_4}{\tfrac{1}{2}},\ \underset{S_5}{\tfrac{1}{2}}$$

$S_{12} = 1, 0$

$S_{123} = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

$S_{1234} = 2, 1, 0$

$S_{12345} = \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ θ will be a fermion.

(C4), (C5), (C6) close: son preguntes de teoria.

(P1) a1) $\underbrace{1s^2 2s^2 \ldots ns^2 np^6}_{\text{complete shell or subshells have } L=S=0} nd^2$

Need to consider nd^2 electrons only (incomplete shells)

nd^2: $l_1 = l_2 = 2$, $s_1 = s_2 = 1/2$

Each electron can be in

$$\begin{array}{cc} m_l & m_s \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} & \times \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \end{array} = 10 \text{ states}$$

but not in the same state for the electrons nd^2 are equivalent ($\equiv$ same subshell). The degeneracy is (10 electrons in groups of 2 with these 2 ~~not in~~, not the same state)

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = 45.$$

$\boxed{\text{The degeneracy is } 45}$

a2) a3) Possible values of the total angular momentum L and total spin S are:

$L = |l_1+l_2|, \ldots, |l_1-l_2| = 4, 3, 2, 1, 0$
s a s a s

$S = 1, 0$
s a

Possible J's :

L	S	J	2J+1	sum of 2J+1
4	0	4	9	9
3	1	4, 3, 2	9, 7, 5	21
2	0	2	5	5
1	1	2, 1, 0	5, 3, 1	9
0	0	0	1	1

total 45. (as it should be!)

Ground state: Hund's rules: (in red)
$S=1,\ L=3,\ J=2$ or $^3F_2$

s p d f g
0 1 2 3 4

Other possible terms are
$S=0,\ L=4,\ J=4$: $^1G_4$
$S=1,\ L=3,\ J=3$: $^3F_3$
$S=1,\ L=1,\ J=1$: $^3P_1$
.... no digo más ... hay 9, independo al fundamental.

---

nitrogen $1s^2 2s^2 2p^3$

	↑	↑	↑
m_l	1	0	-1

Degeneracy: each electron can be in $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1/2\\-1/2\end{bmatrix} = 6$ states
so the three equivalent electrons can be in $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$ states.

$\boxed{\text{Degeneracy is } 20}$

Ground state ≡ given by Hund's rules!

$L=0$
$S=3/2$: $^4S_{3/2}$
$J=3/2$

the term of the electrons 2p3 is (ground state)

← electron 3

	e_1	e_2	e_3
n	2	2	2
l	1	1	1
s	1/2	1/2	1/2
m_s	1/2	1/2	1/2
m_l	~~1~~	~~1~~	~~1~~
	~~1~~	~~1~~	~~0~~
	1	0	-1

not possible: Pauli does not allow it.

and permutations: no other possibilities are allowed

$$m_{l_1} + m_{l_2} + m_{l_3} = 0$$

m_{l_1}	m_{l_2}	m_{l_3}
1	0	-1
1	-1	0
-1	1	0
-1	0	1
0	1	-1
0	-1	1

$\longrightarrow$ notation $\varphi_1^1 \varphi_2^0 \varphi_3^{-1} \equiv [1\ 0\ -1]$ ← electron 3

Spin + + +

$$u = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 & \varphi_3^1 \\ \varphi_1^0 & \varphi_2^0 & \varphi_3^0 \\ \varphi_1^{-1} & \varphi_2^{-1} & \varphi_3^{-1} \\ \varphi_1^1 & \varphi_2^1 & \varphi_3^1 \\ \varphi_1^0 & \varphi_2^0 & \varphi_3^0 \\ \varphi_1^{-1} & \varphi_2^{-1} & \varphi_3^{-1} \end{vmatrix}$$

auxiliary "picture"

notation of the exam.

$$u = \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} [1\ 0\ -1] + [0\ -1\ 1] + [-1\ 1\ 0] \\ - [-1\ 0\ 1] - [1\ -1\ 0] - [0\ 1\ -1] \end{array} \right\}$$

antisymmetric to the interchange of electrons.

what is this state? obviously $M = 0$

Is it $|||0\ 0\rangle\rangle\rangle$ (L M). why not $|||1\ 0\rangle\rangle\rangle$ or $|||2\ 0\rangle\rangle\rangle$? ($L$)

Because $L_+ u = L_- u = 0$. check one: (L_+ for instance)

$$L_+ |lm\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\ |l, m+1\rangle$$

$$L_+ Y_1^1 = 0, \quad L_+ Y_1^0 = \hbar\sqrt{2}\, Y_1^1, \quad L_+ Y_1^{-1} = \hbar\sqrt{2}\, Y_1^0$$

↑ notación de electrón simple (= un)

V

A

C

I

O

no hay nada...

$$L_+ u = \frac{\hbar\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \Big[0 + [1\,1\,{-1}] + [1\,0\,0]$$
$$+ [1\,{-1}\,1] + [0\,0\,1] + 0$$
$$+ [0\,1\,0] + 0 + [-1\,1\,1]$$
$$- [0\,0\,1] - [-1\,1\,1] - 0$$
$$- 0 - [1\,0\,0] - [1\,{-1}\,1]$$
$$- [1\,1\,{-1}] - 0 - [0\,1\,0] = 0$$

• cancels with •

•• with ••

↑ número cero,

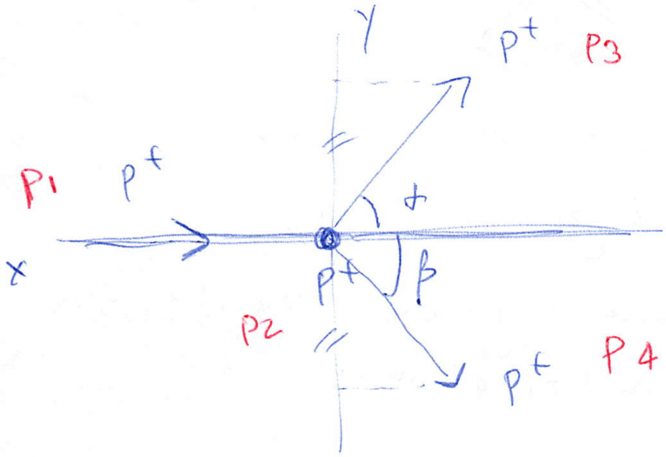
similarly, $L_- u = 0$,

where $u \equiv |||0,0\rangle\rangle\rangle$. $l_{123}=0$, $S_{123}=3/2$

$J = 3/2$: $^4S_{3/2}$

(ground state)

(P2)



the reaction takes place in a plane, so $Z=0$ and the third component of the momentum too. ↑ is zero

$p^+ + p^+ \to p^+ + p^+$ ∝ proton

$P_1 + P_2 = P_3 + P_4$: conservation energy-momentum

↑ quadrimomentum

obviously $\alpha = \beta$, by conservation energy momentum, but we will deduce it as well.

$$P_1 = \begin{pmatrix} E_1/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} m_p c \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} E_3/c \\ \vec{p_3} \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} E_3/c \\ \vec{p_4} \end{pmatrix}$$

notation: m_p: proton mass

$\vec{p} \equiv (p, 0, 0)$

$\vec{p_3} = (|\vec{p_3}| \cos\alpha, |\vec{p_3}| \sin\alpha, 0)$

$\vec{p_4} = (|\vec{p_4}| \cos\beta, -|\vec{p_4}| \sin\beta, 0)$

We write E_3/c in the fourth quadrimomentum and not E_4/c because it is said so explicitly in the problem. Notice that

$$p_3^2 = (m_p c)^2 = \left(\frac{E_3}{c}\right)^2 - \vec{p}_3^{\,2}$$

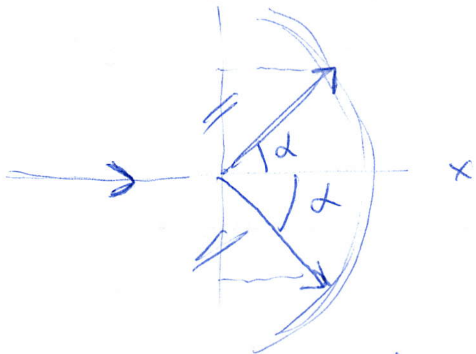
and

$$p_4^2 = (m_p c)^2 = \left(\frac{E_3}{c}\right)^2 - \vec{p}_4^{\,2},$$

what implies that $\vec{p}_3^{\,2} = \vec{p}_4^{\,2}$ or (it is the same thing), $|\vec{p}_3| = |\vec{p}_4|$. Since the momentum before and after collision is conserved, this means that

$\alpha = \beta$

necessarily,



conservation of energy-momentum is

$$\frac{E_1}{c} + m_p c = 2\frac{E_3}{c} \qquad [1]$$

$\vec{p} = (p, 0, 0)$
$p \equiv |\vec{p}|$

$$|\vec{p}| = p = |\vec{p}_3| \cos\alpha + |\vec{p}_4| \cos\alpha = 2|\vec{p}_3| \cos\alpha \qquad [2]$$

$$0 = |\vec{p}_3| \sin\alpha - |\vec{p}_4| \sin\alpha . \qquad [3]$$

In addition we have

$$\left(\frac{E_1}{c}\right)^2 - \vec{p}^{\,2} = (m_p c)^2, \qquad [4]$$

which is a Lorentz-invariant.

From [2],

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{p}|}{2|\vec{p}_3|},$$

and $|\vec{p}|$ is obtained from [4] as

$$|\vec{p}|^2 = \left(\frac{E_1}{c}\right)^2 - (m_p c)^2 .$$

Thus,

$$\cos^2\alpha = \frac{|\vec{p}_1|^2}{4|\vec{p}_3|^2} = \frac{E_1^2 - m_p^2c^4}{4(E_3^2 - m_p^2c^4)}$$

$$= \frac{(E_1 - m_pc^2)(E_1 + m_pc^2)}{4(E_3 - m_pc^2)(E_3 + m_pc^2)}$$

$$= \frac{K(K + 2m_pc^2)}{4\left(\frac{E_1}{2} - \frac{m_pc^2}{2}\right)\left(\frac{E_1}{2} + \frac{3m_pc^2}{2}\right)}$$

$K = E_1 - m_pc^2$ = datum
& [1]

$$= \frac{\cancel{K}(K + 2m_pc^2)}{\frac{\cancel{4}}{\cancel{4}}\cancel{K}(K + 4m_pc^2)}$$

$$= \frac{K + 2m_pc^2}{K + 4m_pc^2}$$

Result:

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{K + 2m_pc^2}{K + 4m_pc^2}}$$

or

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$= \frac{2K + 4m_pc^2}{K + 4m_pc^2} - 1$$

$$= \frac{K + 4m_pc^2 + K}{K + 4m_pc^2} - 1$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{K}{K + 4m_pc^2} \quad ''$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \frac{K}{K + 4m_pc^2}}$$

b) Numerical application

$K = 437$ MeV

$m_pc^2 = 1836\, m_ec^2 = 938$ MeV,

this is $\simeq 0.104$

$$\cos 2\alpha = \frac{437}{4189} \; , \quad 2\alpha \simeq 1.47 \text{ rad} \simeq 84.01^\circ$$

c) $E_\alpha = 33$ GeV

$K = 33000$ MeV $- 938$ MeV $= 32062$ MeV

$$\cos 2\alpha = \frac{32062}{35814} \; ; \quad 2\alpha \simeq 0.46 \text{ rad} \simeq 26.46^\circ$$

$\simeq 0.895$

smaller than in the previous case, of course,

lo doy en grados (°) por el enunciado.