Estructura de la Materia. Septiembre 2017

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

7 de Septiembre de 2017

Examen Final de Estructura de la Materia, grupo A

Nombre y Apellidos:

Firma y DNI:

El examen consta de teoría y problemas. Todas las respuestas necesitan justificación, excepto cuando sean de elección múltiple. Hay algunas ayudas al final de los enunciados. La calculadora en modo **radianes**.

C1 [10 puntos] En los átomos de un sólo electrón (H-atoms, H-like atoms, hidrogenoideos, se llaman de varias maneras), la dependencia en α de la energía de Bohr y de la energía debida a la estructura fina va como: a) α^2 y α^4, b) α^2 y α^3, c) α y α^2, d) $\alpha^{4/3}$ y $\alpha^{7/3}$, respectivamente.

C2 [20 puntos] Cuando un K^- colisiona con un protón, tiene lugar la siguiente reacción:

$$K^- + p \to K^0 + K^+ + X,$$

donde X es una cierta partícula. a) Explicar razonadamente si K^- es un hadrón, un leptón o una parítcula de intercambio (gluón, fotón, $\mathrm{W}^\pm$,...) b) Atendiendo a los quarks de las partículas que intervienen en la reacción, determinar el contenido en quarks de X. c) ¿De qué partícula de su tabla podría tratarse? d) De acuerdo al resultado obtenido en c), explique si, en términos de masas, dicha rección sería posible.

C3 [40 puntos] El *término de Darwin* en la estructura fina. (lo que usted sepa, orden de magnitud, por qué hay que considerarlo, qué determina su valor exacto, breve desarrollo, etc...).

P1 [60+10 puntos] La interacción spin-órbita en el átomo de hidrógeno es

$$H_{SO} = \frac{a}{r^3}\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}, \qquad a \equiv \frac{e^2}{2m_e^2c^2\cdot 4\pi\varepsilon_0}$$

donde a es una constante.

a) Calcular la corrección $\langle\psi|H_{SO}|\psi\rangle$ a la energía del estado ψ si en este ejercicio ψ denota la función propia del hidrógeno $\psi_{211-1/2}$. La notación utilizada es $\psi_{nlm_lm_s}$, o sea, $n=2, l=1, m_l=1, m_s=-1/2$.

b) Sabiendo que el radio de Bohr es $a_0 = 0.5292\times10^{-10}$ m, y que $\hbar c = 0.1973\,\mathrm{eV}\mu\mathrm{m}$, calcular el valor numérico de la corrección y compararlo con la energía de Bohr correspondiente.

Necesitará la tabla de coeficientes de Clebsch-Gordan o similar.

P2 [50 puntos] Un pión que viaja a velocidad v se desintegra en un muón y un neutrino, $\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. Si el neutrino ($\bar{\nu}_\mu$) sale formando un ángulo de 90^0 con la dirección del pión incidente, ¿con qué ángulo sale despedido el muón?

Nota: Los datos del problema son v y las masas m_π, m_μ, así que el resultado ha de escribirse en función de estos datos, o lo que es igual, β y γ. Ayuda1: el momento lineal y la velocidad están relacionados mediante $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$. Esto es así, claro está, si la masa de la partícula m no es cero. Ayuda2: Mis cuentas dicen que cuando $v = 0.8\,c$, el ángulo es aproximadamente 5.49^0.

Usted puede necesitar (o no) alguno de los siguientes datos:

En la siguiente lista de armónicos esféricos, θ, φ son los ángulos polar y azimutal, respectivamente, de las coordenadas esféricas. Asterisco significa el complejo conjugado. Las funciones de onda radiales $R_{nl}(r)$ son las del hidrógeno ($Z = 1$), y a_0 es el radio de Bohr.

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \quad Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{i\varphi}, \quad Y_1^{-1} = -Y_1^{1*},$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right), \quad Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta\, e^{i\varphi}, \quad Y_2^{-1} = -Y_2^{1*},$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta\, e^{2i\varphi}, \quad Y_2^{-2} = Y_2^{2*}.$$

$$L_+ Y_l^m = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\, \hbar\, Y_l^{m+1}, \quad L_- Y_l^m = \sqrt{l(l+1) + m(-m+1)}\, \hbar\, Y_l^{m-1}.$$

$$R_{10} = 2\, a_0^{-3/2} \exp(-r/a_0),$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} a_0^{-3/2} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) \exp(-r/2a_0), \quad R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}} a_0^{-3/2} \frac{r}{a_0} \exp(-r/2a_0),$$

$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}} a_0^{-3/2} \left(1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2}{27}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2\right) \exp(-r/3a_0)$$

$$\beta \equiv \frac{v}{c}, \qquad \gamma^{-2} = 1 - \beta^2$$

Estructura de la Materia. Sep 2017

① Correct answer: a) α^2 and α^4, respectively

(or if you want $Z^2\alpha^2 \to Z^4\alpha^4$, which is the same thing).

Bohr energies Hydrogen: $E_n = -\frac{1}{2} m_e c^2 \frac{\alpha^2}{n^2}$ ↙ ie. α^2

Fine Structure: of order α^4 (closes)

---

② $K^- + p^+ \to K^0 + K^+ + X$

who is X?
obviously, charge of X is −1.

a) [with table] K^- is the meson with quark content equal to $s\bar{u}$ (~~not~~ $u\bar{s}$ because the charge of $u\bar{s}$ is +1 instead of −1). Since K^- is made out of quarks is a Hadron

[Remember: A Hadron is a particle that participates in the strong force interactions. It is made out of quarks. Quarks form baryons or mesons. Here K^- is a meson.

b) [with table] K^- is $s\bar{u}$ ↙ quarks
p is uud
K^0 is $d\bar{s}$
K^+ is $u\bar{s}$

written in terms of quarks, the reaction $K^- + p \to K^0 + K^+ + X$ is

$$s\bar{u} + uud \to d\bar{s} + u\bar{s} + X$$

or what is equivalent,

note: los leptones no están compuestos de quarks.

left hand side: s, u, d because $u\bar{u}$ cancel each other

right hand side: $d, \bar{s}, u, \bar{s}$ .... and X... ,

then

$$X \equiv sss \quad \text{(es un barión)}$$

to balance the quark contain in the lhs & rhs

c)

$$X \equiv \Omega^-$$

Notice that strangeness is conserved, as it should be in strong force reactions.

d) Masses: checking

$$\text{mass}(K^- + p^+) = \begin{array}{r} 493.67 \\ 938.28 \\ \hline 1431.95 \end{array} \ MeV/c^2$$

$$\text{mass}(K^0 + K^+ + \Omega^-) = \begin{array}{r} 497.72 \\ 493.67 \\ 2281.00 \\ \hline 3272.39 \end{array} \ MeV/c^2$$

the reaction IS possible (all conservations are ok, baryonic number, charge, ...) if one supplies energy (at least the difference 3272.39 − 1431. 3272.39 − 1431.95) to the incident K^-, p^+.

Comments on this reaction [Phys. Rev Lett. 12 (1964) 204]

This reaction is not only possible but famous too. The particle Ω^- was expected to exist to confirm the pattern of baryons decuplet and was discovered in 1964. Has decay $\Omega^- \to \pi^- + \Xi^0$

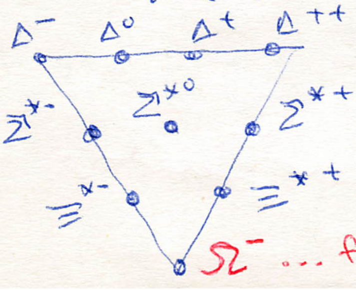
$\Xi^0 \to \Lambda^0 + \pi^0$

$\pi^0 \to \gamma + \gamma$

$\Lambda^0 \to p + \pi^-$

$\gamma \to e^+e$

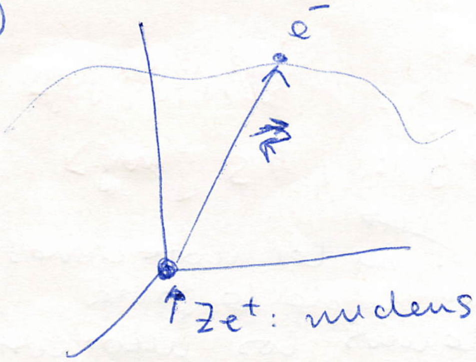
$\gamma \to e^+e$



... faltaba la punta del ▽

③ Darwin term (clase) λ_C e^- ; $\frac{1}{8}$ ≡ Dirac ; V_{eff} ; $l=0$ porque... ... y siguiendo...!

④



$$H_{SO} = a\,\frac{\vec{L}\cdot\vec{S}}{r^3}$$

$$a = \frac{1}{2m_e^2c^2}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

$\vec{L}, \vec{S}$ refer to the only electron that the H-like atoms have.

state: $\psi_{211-1/2}$

$n=2,\ l=1,\ m_l=1,\ m_s=-1/2$

[obviously we are treating the only electron in the problem, so $S=1/2$. It is not said but understood]

To calculate

$$\langle \psi_{211-1/2} | a\,\frac{\vec{L}\cdot\vec{S}}{r^3} | \psi_{211-1/2} \rangle$$

we do not use the basis $\{\vec{L}^2, L_z, \vec{S}^2, S_z\}$ but $\{\vec{L}^2, \vec{S}^2, \vec{J}^2, J_z\}$.

L_z: o sea "m_l"; S_z: o sea "m_s"

$\vec{J}^2$: o sea j; J_z: o sea m_j

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$$\vec{J}^2 = (\vec{L}+\vec{S})^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\,\vec{L}\cdot\vec{S}$$

2 because $\vec{L}\cdot\vec{S} = \vec{S}\cdot\vec{L}$

$$\Rightarrow \vec{L}\cdot\vec{S} = \vec{S}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}\left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2\right)$$

The state $\psi_{211-1/2}$ has $\begin{bmatrix} j = 3/2 \text{ or } 1/2 \\ m_j = 1/2 \end{bmatrix}$ because

$\underbrace{l=1,\ s=1/2}$, $j = 3/2, 1/2$, $m_j = m_l + m_s = 1/2$ <u>only</u>

"How much" of $j=3/2$ and "how much of $j=1/2$" it is said by the change of basis ($\equiv$ Clebsch-Gordan coefficients to the effect).

Notation for basis $\{\vec{L}^2, L_z, \vec{S}^2, S_z\}$: $\varphi_{nlm_l m_s}$
Notation for basis $\{\vec{L}^2, \vec{S}^2, \vec{J}^2, J_z\}$: $|l\, s\, j\, m_j\rangle$

OJO!!! Esto es solamente notación. En las notaciones cada uno de nosotros coge lo que le da la gana siempre y cuando nos entendamos los unos con los otros

$1\times 1/2$		j: 3/2	1/2
		m_j: 1/2	1/2
1	−1/2	1/3	2/3
0	1/2	2/3	−1/3
m_1	m_2		

CG

$$\varphi_{211-1/2} = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1,\tfrac12,\underbrace{\tfrac32,\tfrac12}\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\,\tfrac12\,\tfrac12\,\tfrac12\rangle$$

Clebsch-Gordan table

"reducido" a

$$\vec{L}\cdot\vec{S}\,\varphi_{211-1/2} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2-\vec{L}^2-\vec{S}^2)\left[\sqrt{\tfrac13}\,|\tfrac32,\tfrac12\rangle + \sqrt{\tfrac23}\,|\tfrac12,\tfrac12\rangle\right]$$

$$= \frac{\hbar^2}{2}\left[\sqrt{\tfrac13}\,\underbrace{\left(\tfrac{15}{4}-2-\tfrac34\right)}_{=1}|\tfrac32,\tfrac12\rangle + \sqrt{\tfrac23}(-2)\,|\tfrac12,\tfrac12\rangle\right]$$

$\frac32\left(\frac32+\frac22\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2} = \frac{15}{4}$

$$= \frac{\hbar^2}{2}\left[\sqrt{\tfrac13}\,|\tfrac32,\tfrac12\rangle - 2\sqrt{\tfrac23}\,|\tfrac12,\tfrac12\rangle\right]$$

back to the basis $\varphi_{nlm_l m_s}$ (Clebsch-Gordan table)

$$= \frac{\hbar^2}{2}\left[\sqrt{\tfrac13}\left(\tfrac{1}{\sqrt3}\varphi_{211-1/2} + \sqrt{\tfrac23}\,\varphi_{210\,1/2}\right) - 2\sqrt{\tfrac23}\left(\sqrt{\tfrac23}\,\varphi_{211-1/2} - \sqrt{\tfrac13}\,\varphi_{210\,1/2}\right)\right]$$

$$= \frac{\hbar^2}{2}\left[-\varphi_{211-1/2} + \sqrt2\,\varphi_{210\,1/2}\right].$$

Consequently, $\langle\varphi|H_{SO}|\varphi\rangle$ is equal to

$$\langle\varphi_{211-1/2}\,|\,\frac{a}{r^3}\frac{\hbar^2}{2}\left(-\varphi_{211-1/2}+\sqrt2\,\varphi_{210\,1/2}\right)\rangle$$

$$= \frac{a\hbar^2}{2}\left[-\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle_{21} + 0\right]$$

n l because $Y_1^1 \perp Y_1^0$ $\left[\int d\Omega\, Y_1^{1*} Y_1^0 = 0\right]$

$\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle_{21} = \frac{1}{24 a_0^3}$

$$= -\frac{a\hbar^2}{2}\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle_{21}$$

$$= -\frac{1}{48}\,a\,\frac{\hbar^2}{a_0^3}$$

* a_0: Bohr radius.

I calculate that $\langle \frac{1}{r^3} \rangle_{21} = \frac{1}{24 a_0^3}$:

$$\langle \frac{1}{r^3} \rangle_{21} = \int_0^\infty dr \, \frac{r^2}{r^3} R_{21}^2$$

(r^2 is from the Jacobian)

$$R_{21}^2 = \frac{1}{24} a_0^{-3} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0}$$

$$= \frac{1}{24} a_0^{-3} \underbrace{\int_0^\infty \frac{dr}{a_0} \frac{r}{a_0} e^{-r/a_0}}_{\text{that with the change } u \equiv r/a_0 \text{ is } \int_0^\infty du\, u\, e^{-u} = 1}$$

$$= \frac{1}{24} a_0^{-3}$$

L

conclusion

$$\boxed{\langle \psi_{211,-1/2} | H_{SO} | \psi_{211,-1/2} \rangle = -\frac{a\hbar^2}{48 a_0^3}}$$

b) Numerical application:
How much is $-\frac{a\hbar^2}{48 a_0^3}$ in eV? Exactly: $\frac{E_1 \alpha^2}{48}$

Remember that $a = \frac{1}{2 m_e^2 c^2} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$

One should know that

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0} = -2E_1, \quad a_0 \stackrel{\text{def correct scale}}{=} \frac{\hbar}{m_e c \alpha}, \quad E_1 = -13.6\,eV$$

$$-\frac{a\hbar^2}{48 a_0^3} = \left[-\frac{1}{48}\right] \cdot \underbrace{\frac{1}{2 m_e^2 c^2} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3} \cdot \hbar^2}_{\text{is a}}$$

$$\frac{1}{a_0^3} = \frac{1}{a_0^2} \cdot \frac{1}{a_0}$$

$$= \left[-\frac{1}{48}\right] \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{m_e c a_0}\right)^2 \cdot \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0}$$

$$= -\left[\frac{1}{48}\right] \frac{1}{2} \cdot \alpha^2 (-2E_1)$$

$$= \frac{E_1 \alpha^2}{48} \approx -0.000015\ eV$$

L

Total energy of the e^- in the state $\psi_{211,-1/2}$ $= \dfrac{E_1}{2^2} + \langle \psi_{211,-1/2} | H_{so} | \psi_{211,-1/2} \rangle$

Bohr energy ↑ ↑ spin-orbit

-13.6 if you wish.

$= -\dfrac{13.60569\,eV}{4} - 0.000015\,eV$

$= -3.401423$
-0.000015

The correction to Bohr energy is in the 5th decimal digit.

[In an old version of this problem I wrote

$$\frac{\hbar^2}{m_e^2 c^2} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{a_0^3} = \alpha^3 \frac{\hbar c}{a_0}$$

and used $a_0 = 0.529177\,\text{Å}$ $\qquad \mu = 10^{-6}$
$\hbar c = 0.1973\,eV\,\mu m$)
famous number.

as given in the exercise. The result is the same.

⌊

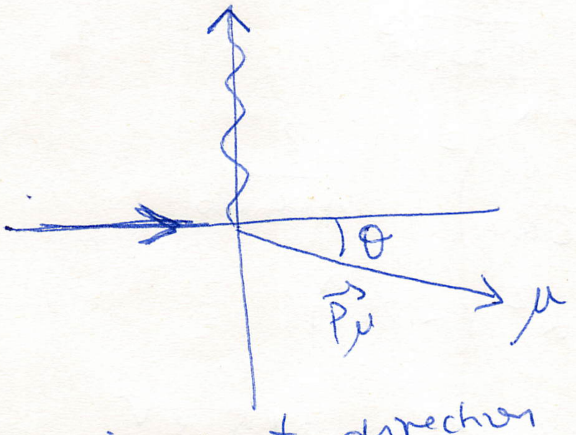
[note that $E_{Bohr} = \dfrac{E_1}{n^2} \sim m_e c^2 \alpha^2$
(take $n=1$)

$\langle H_{so} \rangle \sim m_e c^2 \alpha^4$

⌊

---

(5) A picture of the reaction $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ is



quadrimomenta:
$p_1 = p_2 + p_3$
pion   neutrino   muon

The incident direction of π^- is taken as the x axis. The reaction is in a plane.

With this assumption the quadrimomentum of each particle is

$$p_1 = \begin{pmatrix} E_\pi/c \\ p_\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_\pi \gamma c \\ m_\pi \gamma v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad p_1^2 = m_\pi^2 c^2$$

lorentz invariant.

La idea: rellenar los quadrimomentos con todo lo que se sepa inicialmente. Las entradas cero se ponen (mire p_1... ...se ha puesto todo)

$$p_2 = \begin{pmatrix} E_\nu/c \\ 0 \\ |\vec{p}_\nu| \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \text{ with } p_2^2 = \left(\frac{E_\nu}{c}\right)^2 - p_\nu^2 = 0 \Rightarrow \frac{E_\nu}{c} = p_\nu$$

lorentz invariant

$\boxed{\text{neutrino has mass} = 0}$

Algunos alumnos no lo han recordado...

$$p_3 = \begin{pmatrix} E_\mu/c \\ |\vec{p}_\mu| \cos\theta \\ -|\vec{p}_\mu| \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad p_3^2 = \left(\frac{E_\mu}{c}\right)^2 - |\vec{p}_\mu|^2 = m_\mu^2 c^2$$

lorentz invariant

Energy-momentum conservation: $p_1 = p_2 + p_3$.
In equations:

$$m_\pi \gamma c = \frac{E_\nu}{c} + \frac{E_\mu}{c} \qquad [1]$$

$$m_\pi \gamma v = |\vec{p}_\mu| \cos\theta \qquad [2]$$

$$|\vec{p}_\nu| = |\vec{p}_\mu| \sin\theta \qquad [3]$$

We are asked for the angle θ, then

$$tg\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{|\vec{p}_\nu|}{m_\pi \gamma v} = \frac{E_\nu/c}{m_\pi \gamma v}$$

cociente: quita $|\vec{p}_\mu|$

$p_2^2 = 0$

E_ν is not a datum. Needs to be removed.

E_ν is E sub nu

To remove E_ν there are two manners to proceed: the <u>long</u> manner and the <u>short manner</u>.

<u>Short</u>: with Lorentz invariants

$$p_1 = p_2 + p_3 \quad \text{or} \quad p_3 = p_1 - p_2 .$$

Squaring and using the Lorentz invariants:

$$p_3^2 = (m_\mu c)^2 = (p_1 - p_2)^2 = \underset{(m_\pi c)^2}{\underset{\shortparallel}{p_1^2}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{p_2^2}} - \underset{2 m_\pi \gamma c \frac{E_\nu}{c}}{\underset{\shortparallel}{2 p_1 p_2}} ,$$

then

$$(m_\mu c)^2 = (m_\pi c)^2 - 2 m_\pi \gamma E_\nu$$

or

$$E_\nu = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c^2}{2 m_\pi \gamma} .$$

nunca nula

<u>Nota mía</u>: $p_\nu = \frac{E_\nu}{c} \equiv$ <u>nunca</u> cero. Claro ν viaja a la veloc de la luz. Su momento <u>no</u> puede ser nulo, aunque lo sea su masa!!!!!!!

<u>Long</u>:

$$[2]^2 + [3]^2 \text{ is } \quad m_\pi^2 \gamma^2 v^2 + \underset{\left(\frac{E_\nu}{c}\right)^2}{\underset{\shortparallel}{|\vec{p}_\nu|^2}} = |\vec{p}_\mu|^2$$

Also

$$\begin{aligned}
m_\mu^2 c^2 &= \left(\frac{E_\mu}{c}\right)^2 - |\vec{p}_\mu|^2 \\
&= \left(\frac{E_\mu}{c}\right)^2 - m_\pi^2 \gamma^2 v^2 - |\vec{p}_\nu|^2 \\
&= \left(\frac{E_\mu}{c}\right)^2 - m_\pi^2 \gamma^2 v^2 - \left(\frac{E_\nu}{c}\right)^2 \\
&= \left(\frac{E_\mu}{c} + \frac{E_\nu}{c}\right)\left(\frac{E_\mu}{c} - \frac{E_\nu}{c}\right) - m_\pi^2 \gamma^2 v^2 \\
[1] \searrow \quad &= m_\pi \gamma c \left(\frac{E_\mu}{c} - \frac{E_\nu}{c}\right) - m_\pi^2 \gamma^2 v^2
\end{aligned}$$

Thus,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{E_\mu}{c} - \frac{E_\nu}{c} &= \frac{m_\mu^2 c^2 + m_\pi^2 \gamma^2 v^2}{m_\pi \gamma c} \\
\text{remember } [1] \longrightarrow \quad \frac{E_\mu}{c} + \frac{E_\nu}{c} &= m_\pi \gamma c
\end{aligned}\right\}$$

Substracting to obtain $\frac{E\nu}{c}$ one has,

$$\frac{E\nu}{c} = \frac{1}{2}\left[-\frac{m_\mu^2 c^2 + m_\pi^2 \gamma^2 v^2}{m_\pi \gamma c} + m_\pi \gamma c\right]$$

this is $+ m_\pi^2 c^2$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-m_\mu^2 c^2 \cancel{- m_\pi^2 \gamma^2 v^2} + m_\pi^2 \gamma^2 c^2}{m_\pi \gamma c}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{m_\pi^2 c^2 - m_\mu^2 c^2}{m_\pi \gamma c}\right]$$

that is the "short" result for.

Back to the previous...

$$\tan\theta = \frac{E\nu/c}{m_\pi \gamma v} = \frac{1}{m_\pi \gamma v}\left(\frac{m_\pi^2 c - m_\mu^2 c}{2 m_\pi \gamma}\right)$$

Final result,

$$\boxed{\tan\theta = \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)\Big/ 2\beta\gamma^2}$$

$\beta \equiv \frac{v}{c}$

numerical checking:

$m_\mu = 105.659\,\mathrm{MeV}$

$m_\pi = 139.569\,\mathrm{MeV}$

$\beta = 0.8$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-0.8^2} = \frac{1}{0.2 \times 1.8} = \frac{5}{1.8}$$

$$\theta \simeq 0.096 \text{ radians} \simeq 5.49^\circ$$

Moraleja: Use los invariantes Lorentz. Mire los ceros de los cuadrimomentos y eleve al cuadrado $p_1 = p_2 + p_3$ o $p_3 = p_1 - p_2$, o lo que converge de manera que los muchos ceros den resultados lo más reducido posible.

[De no hacerlo así, trabajamos más].