UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

12 de Mayo de 2017

Examen Parcial de Física Cuántica I

Nombre y Apellidos:

Firma y DNI:

Nota: No se darán puntos por respuestas sin la debida justificación. Total, 220 puntos a normalizar a 10.

1. [50 puntos] Una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de un oscilador armónico se halla en un estado ψ tal que al medir su energía se obtiene E_0 con probabilidad 1/2 y E_1 con probabilidad 1/2 también.

   a) ¿Puede ser el valor medio de X en el estado ψ igual a $l/3$? Si la respuesta es sí, escribir explícitamente el estado.

   b) Con los datos del enunciado, ¿qué valores máximo y mínimo de $\langle\psi|X|\psi\rangle$ son posibles?

   c) ¿Y qué valores máximo y mínimo de $\langle\psi|P|\psi\rangle$ son posibles? ¿Y en el estado ψ?

   Notación: l es la longitud natural del oscilador. Ver ayuda.

2. [100 puntos] Una partícula está obligada a moverse en el intervalo $0 \leq x < \infty$ bajo la acción de un potencial unidimensional $V(x)$. Sabiendo que su función de ondas es

$$u(x) = A\left(\frac{x}{a}\right)^2 e^{-x/a}, \qquad a > 0,$$

   donde A y a son constantes. Se pide:

   1) encontrar el potencial $V(x)$ y la energía E para que u sea función propia del Hamiltoniano con valor propio E. Por supuesto, $H = \dfrac{P^2}{2m} + V(x)$.

   2) Calcular P actuando sobre u, o sea Pu, expresando el resultado en función de u y de x. ¿Es u función propia de P? En caso de que lo sea, ¿con qué valor propio?

   3) Sin hacer el cálculo, ¿hay alguna razón para anticipar que el valor medio $\langle u|P|u\rangle$ es cero?

   4) Hallar $|A|^2$ para que u esté normalizada.

   5) Calcular $\langle u|\dfrac{\partial H}{\partial a}|u\rangle$ (derive sin miedo el hamiltoniano respecto a a, que no pasa nada) y $\dfrac{\partial E}{\partial a}$. A la vista de ambos resultados, ¿están relacionados estos valores? No olvide que $\langle u|u\rangle = 1$.

   6) Calcular la distancia x a la que es más probable encontrar a la partícula y el valor medio $\langle u|X|u\rangle$ de su posición.

3. [30 puntos] Considérese un sistema en el estado $|v\rangle = (1, 0, 4)^t$ y los observables

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

   a) ¿Pueden A y B medirse simultáneamente? b) La probabilidad de que se obtenga el valor 1 al medir B en el estado $|v\rangle$ es 1/17. ¿Es esto cierto o falso? Justifique su respuesta

4. [40 puntos] Una partícula de masa m está confinada en una región $0 \leq x \leq a$ como se muestra en la pizarra (si me olvido, es un pozo infinito). En un instante dado su función de ondas es

$$u(x) = \sqrt{\frac{8}{5a}}\left(1 + \cos\frac{\pi x}{a}\right)\sin\frac{\pi x}{a}.$$

a) Qué valores de la energía se pueden medir y con qué probabilidad?

b) Calcular la energía media del estado.

Usted puede necesitar (o no) alguno de los siguientes datos:

$$P = -i\hbar\frac{d}{dx}, \quad [A, B] \equiv AB - BA, \quad [X, P] = i\hbar$$

Oscilador armónico

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2, \quad l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}),$$

$$a = \frac{iP}{\sqrt{2m\hbar\omega}} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X, \quad a^\dagger = \frac{-iP}{\sqrt{2m\hbar\omega}} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X, \quad [a, a^\dagger] = 1.$$

FÍSICA CUÁNTICA - PARCIAL, May 2017

1) $X = \frac{l}{\sqrt{2}}(a+a^+)$, $P = \frac{m\omega l}{\sqrt{2}i}(a-a^+)$,

$|0\rangle$: ground state, $E_0 = \hbar\omega/2$

$|1\rangle$: 1st excited state, $E_1 = 3\hbar\omega/2$.

a) What we know about the state ψ is that

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + c|1\rangle\right],$$

with c a constant s.t. $|c|^2 = 1$. But we do not know which one.

$$\langle\psi|X|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{l}{\sqrt{2}}\left[\langle 0| + c^*\langle 1|\right](a+a^+)\left[|0\rangle + c|1\rangle\right]$$

from ψ from X

$a|0\rangle = 0$, $a|1\rangle = |0\rangle$

$a^+|0\rangle = |1\rangle$, $a^+|1\rangle$ proportional to $|2\rangle$ but $\langle 2|0\rangle = 0$, $\langle 2|1\rangle = 0$;

then

$$\langle\psi|X|\psi\rangle = \frac{l}{2\sqrt{2}}\left[\langle 0| + c^*\langle 1|\right]\left[c|0\rangle + |1\rangle\right]$$

$$= \frac{l}{2\sqrt{2}}(c + c^*)$$

$$= \frac{l}{\sqrt{2}}A \quad \text{A is the real part of } c$$

real, real

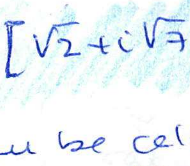
$c = A + iB$

$c^* = A - iB$

$c + c^* = 2A$

$$= \frac{l}{3}$$

so $A = \frac{\sqrt{2}}{3}$



Yes. it is possible to have $\langle\psi|X|\psi\rangle = \frac{l}{3}$ and in this case ψ is s.t.

$|c|^2 = 1$ with $c = \frac{1}{3}\left[\sqrt{2} + i\sqrt{7}\right]$

(Relative phase, c in this case, can be calculated with expectation values. Here with $\langle X\rangle$.

b) $\langle\varphi|X|\varphi\rangle = \frac{l}{2\sqrt{2}}(c+c^*)$

Then,

$$\langle x\rangle_{max} = \frac{l}{\sqrt{2}}, \quad \langle x\rangle_{min} = -\frac{l}{\sqrt{2}}$$

$c=1$ $\qquad\qquad$ $c=-1$

And $\langle x\rangle_\varphi$ is in $\left[-\frac{l}{\sqrt{2}}, \frac{l}{\sqrt{2}}\right]$. No other values are possible; l for instance it is not possible.

c) The situation with P is similar.

$$P = m\omega l\frac{(a-a^+)}{\sqrt{2}i}$$

$$\langle P\rangle_\varphi = \frac{m\omega l}{\sqrt{2}i}\frac{1}{2}\underbrace{[\langle 0| + c^*\langle 1|](a-a^+)[|0\rangle + c|1\rangle]}$$

$$[\langle 0| + c^*\langle 1|][c|0\rangle - |1\rangle] = c - c^* = 2iB$$

And

$$\langle P\rangle_\varphi = \frac{m\omega l}{\sqrt{2}\cancel{i}}\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\cancel{i}B = \frac{B\,m\omega l}{\sqrt{2}}.$$

As in the $\langle x\rangle_\varphi$ case

$$\langle P\rangle_{max} = \frac{m\omega l}{\sqrt{2}}, \quad \langle P\rangle_{min} = -\frac{m\omega l}{\sqrt{2}}$$

and when $c = \frac{1}{3}(\sqrt{2}+i\sqrt{7})$,

$$\langle P\rangle_\varphi = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}m\omega l.$$

Como el parcial 2016. Igualito.

---

(2) $u = A\left(\frac{x}{a}\right)^2 e^{-x/a}$ $\qquad$ $[a]=L$

a) Solut: $\boxed{E = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}}$ // $\boxed{V(x) = \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{ax}\right)}$ //

Basta con forzar a que u satisfaga la ecuación $Hu = Eu$, con E una constante (siempre siempre siempre los valores propios son constantes). Here

$$Hu = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}u'' + V(x)\,u\right] = Eu$$

Calculate u'':

$$u = A\left(\frac{x}{a}\right)^2 e^{-x/a}$$

el paso esencial. Escribir el resultado en función de u.

$$u' = A e^{-x/a}\left[\frac{2x}{a^2} - \frac{x^2}{a^3}\right] = \frac{2u}{x} - \frac{u}{a} = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{a}\right)u$$

$$u'' = \left(\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{a}\right)u\right)' = -\frac{2}{x^2}u + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{a}\right)u' = -\frac{2}{x^2}u + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{a}\right)^2 u$$

$$= \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{4}{xa}\right)u$$

$$= \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{4}{ax}\right)u$$

This has to be zero: $0 = Eu - Hu$,

$$0 = Eu - Hu = Eu - \left[-\frac{\hbar^2}{2m}u'' + V(x)u\right]$$

substitute u''

$$= Eu + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{4}{ax}\right)u - V(x)u$$

arrange...

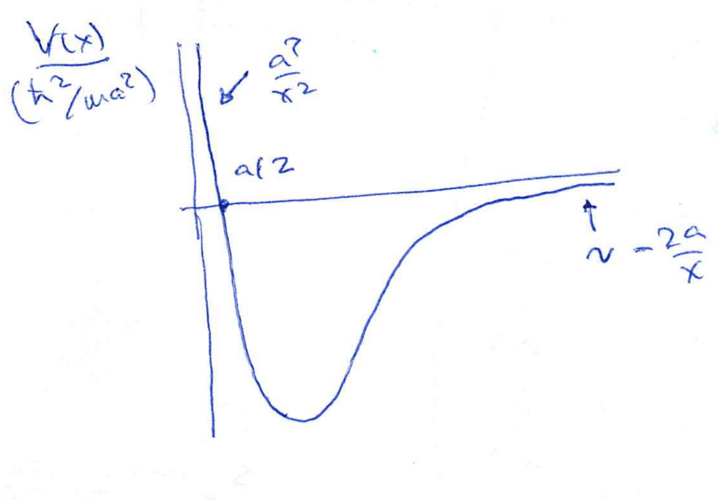
$$= \underbrace{\left(E + \frac{\hbar^2}{2ma^2}\right)}_{\text{this forced to be zero (gives E)}}u + \left[\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{ax}\right) - V(x)\right]u$$

this gives $V(x)$. (forced to ...)

conclusion: $E = -\dfrac{\hbar^2}{2ma^2}$, $\quad V(x) = \dfrac{\hbar^2}{m}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{ax}\right)$

or

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{ma^2}\underbrace{\left(\frac{2a}{x} - \frac{a^2}{x^2}\right)}_{\text{dimensionless}}$$



no es constante...

b) $Pu = -i\hbar u' = -i\hbar \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{a}\right) u \neq \text{constant} \cdot u$

The state u is not proper of P

c) Yes. $\langle u|P|u\rangle = 0$ for

- u is an stationary state that tends to zero when $x \to \infty$ ($u \equiv 0$ in $x \in (-\infty, 0)$)

or because

- u is a real function that tends to zero at infinity.

Notice that since $Pu = -i\hbar\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{a}\right)u$,

$$\langle u|P|u\rangle = -i\hbar \langle u|\tfrac{2}{x} - \tfrac{1}{a}|u\rangle$$

$$= -i\hbar\left(\langle u|\tfrac{2}{x}|u\rangle - \tfrac{1}{a}\langle u|u\rangle\right)$$

Take $\langle u|u\rangle = 1$, then $\boxed{\langle u|\frac{1}{x}|u\rangle = \frac{1}{2a}}$

Este resultado no lo hemos hecho aún "integrado", o sea con $\int_0^\infty dx\, u^* \frac{1}{x} u$, pero va a salir así seguro.

d) $1 = \langle u|u\rangle = |A|^2 \int_0^\infty dx \left(\frac{x}{a}\right)^4 e^{-2x/a}$

$$= |A|^2 a \int_0^\infty d\eta\, \eta^4 e^{-2\eta}$$

$\left.\begin{matrix}\eta = \frac{x}{a}\\ d\eta = \frac{dx}{a}\end{matrix}\right\}$

$$= |A|^2 a \frac{3}{4} \quad \text{"}$$

$\boxed{|A|^2 a = \frac{4}{3}}$

Me aseguro de que $|A|^2$ tenga las dimensiones correctas. Las tiene.

Integrals: [table]

[Las sabemos sacar en 5 minutos]

$$\int_0^\infty dx\, e^{-ax} = \frac{1}{a}$$

$$\int_0^\infty dx\, x e^{-ax} = \frac{1}{a^2}$$

$$\int_0^\infty dx\, x^2 e^{-ax} = \frac{2}{a^3}$$

$$\int_0^\infty dx\, x^3 e^{-ax} = \frac{6}{a^4}$$

$$\int_0^\infty dx\, x^4 e^{-ax} = \frac{24}{a^5}, \quad \int_0^\infty dx\, x^5 e^{-ax} = \frac{120}{a^6}.$$

e) $\langle u|\frac{a}{x}|u\rangle = |A|^2 \int_0^\infty dx \left(\frac{x}{a}\right)^3 e^{-2x/a}$

$$= |A|^2 a \int_0^\infty d\eta\, \eta^3 e^{-2\eta}$$

$\eta = \frac{x}{a}$

$$= |A|^2 a \frac{3}{8}.$$

[table of integrals]

$|A|^2 = \frac{4}{3a}$

Thus,

$$\langle u|\frac{1}{x}|u\rangle = |A|^2 \frac{3}{8} = \frac{4}{3a} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{2a},$$

as expected in c).

$$\boxed{\langle u|\frac{1}{x}|u\rangle = \frac{1}{2a}}$$

f) $\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\hbar^2}{ma^3}$

$$\frac{\partial H}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{p^2}{2m} + V(x)\right) = \frac{\partial V(x)}{\partial a} = \frac{\hbar^2 \cdot 2}{ma^2 x}$$

$$\langle u|\frac{\partial H}{\partial a}|u\rangle = \frac{2\hbar^2}{ma^2} \langle u|\frac{1}{x}|u\rangle$$

$$= \frac{2\hbar^2}{ma^2} \frac{1}{2a} = \frac{\hbar^2}{ma^3}$$

Conclusion:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \langle u|\frac{\partial H}{\partial a}|u\rangle \quad \text{" } \langle u|u\rangle = 1$$

"a" a parameter (any parameter, in fact)

This is the famous Hellmann-Feynman (or Feynman-Hellmann) theorem. Both quantities are equal.

g) We know that

$$1 = |A|^2 \underbrace{\int_0^\infty dx \left(\frac{x}{a}\right)^4 e^{-2x/a}}$$, $|A|^2$ = la que hace falta para que sea verdad.

$f(x) = x^4 e^{-2x/a}$ (remove constants to calculate critical points) — prob density —

$$f'(x) = e^{-2x/a}\left[4x^3 - \frac{2x^4}{a}\right]$$

$$= x^3 e^{-2x/a}\left[4 - 2\frac{x}{a}\right]$$

$f'(x) = 0$ if $\boxed{x = 2a}$ olvidese de $x=0$. Aquí no interesa.

distance where the prob of finding the particle has a maximum.

$$\langle u|\frac{x}{a}|u\rangle = |A|^2 \int_0^\infty dx \left(\frac{x}{a}\right)^5 e^{-2x/a}$$

$$= |A|^2 a \cdot \frac{24 \cdot 5}{2^6} = |A|^2 a \cdot \frac{15}{8}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{15}{8} = \frac{5}{2} =$$

$a|A|^2 = \frac{4}{3}$

$$\boxed{\langle u|x|u\rangle = \frac{5}{2}a}$$

Todo muy simplote, pero muy bien.

---

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

c) Sí, A y B (ambos autoadjuntos, matrices autoadjuntas) pueden medirse simultáneamente en cualquier estado porque A y B conmutan.

Recuerdo que

$$\Delta_v A \cdot \Delta_v B \geq \frac{1}{2} |\langle v | [A, B] | v \rangle|$$

Aquí

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix},$$

así que conmutan. O sea, se se miden a la vez (simultáneamente), si uno quiere.

b) B tiene un valor propio que es (igual a) 1 porque se ve a ojo

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{array}\right)$$

Es el valor propio 1 simple? No ve a ámosla:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -x & -i \\ i & -x \end{vmatrix} = x^2 - 1 \quad \text{"} \quad x \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$$

" " = 1

Eigenvalues of B are: 1 (double), −1 (single).

Más fácil así:

Take the single, $x = -1$ and its eigenvector $\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$

After a measure of B on $v \equiv \frac{1}{\sqrt{17}} (1\ 0\ 4)^t$ the probability of obtaining −1 is

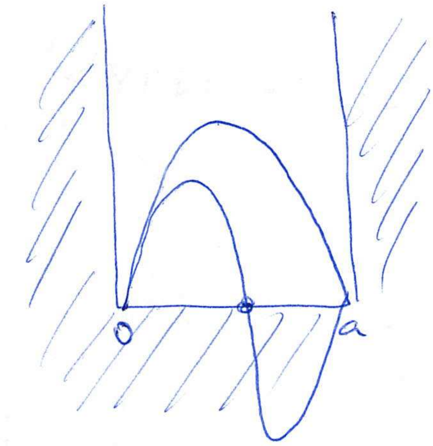
$$\left| \frac{1}{\sqrt{17}} \frac{1}{\sqrt{2}} (0\ -i\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{8}{17}.$$

so the probability of measuring 1 is $(1 - 8/17)$

$$\frac{9}{17}$$

The number $\frac{1}{17}$ is false. [lo sacqué de $\frac{1}{\sqrt{17}} (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{17}}$, a ver si picabais...]

(4)



Potential well.

close

Eigenfuctions:

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

Eigenvalues:

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{2 m a^2},$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

$$u = \sqrt{\frac{8}{5a}} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi x}{a},$$

can be written also as

$$u = \sqrt{\frac{8}{5a}} \left(\sin \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{a} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{4}{5}} \Bigg(\underbrace{\sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}}_{\varphi_1} + \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}}_{\varphi_2} \Bigg)$$

$$= \sqrt{\frac{4}{5}} \left(\varphi_1 + \frac{1}{2} \varphi_2 \right)$$

linear combination of proper states

a) Se puede medir la energía E_1 con probabilidad $\frac{4}{5}$ y la E_2 con probabilidad $\frac{1}{5}$. Ninguna otra. (que se mide E_1 cuatro veces más que E_2).

$E_2 = 2^2 E_1$

b) $$\langle H \rangle = \frac{4}{5} \cdot E_1 + \frac{1}{5} E_2$$

$$= \left(\frac{4}{5} \cdot 1 + \frac{2^2}{5} \right) \cdot \frac{\hbar^2}{2 m a^2}$$

$\uparrow E_1$

$$= \frac{4 \hbar^2}{5 m a^2}$$

— o O O — FIN — o O O —