UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

25 de Junio de 2014

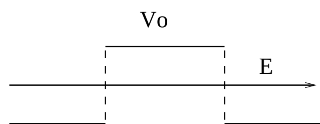
Física Cuántica I, segunda parte del curso

Nombre y Apellidos:

Firma y DNI:

---

1. [2.5 puntos] Una partícula de masa m incide sobre una barrera de potencial de anchura l y altura V_0 tal y como indica la figura. Suponiendo que $E = V_0/2$, donde $E = \dfrac{\hbar k^2}{2m}$ es la energía cinética de la partícula incidente, encontrar los coeficientes de reflexión y transmisión de la barrera

$V(x) =$ 

$$= \begin{cases} V_0, & 0 < x < l, \\ 0, & |x| > l \end{cases}$$

Nota: Utilice la condición $E = V_0/2$ desde el principio pues **simplifica considerablemente** los cálculos. La barrera va de 0 a l. Los resultados pedidos debe dejarlos en función de k's.

2. [2.5 puntos] Un rotor se encuentra en el estado

$$\psi = N \sin^2\theta \cos 2\varphi$$

donde N es una constante de normalización, y θ, φ son los ángulos polar y azimutal, respectivamente, de las coordenadas esféricas. Expresar el estado ψ en cartesianas (suponga que trabajamos en la esfera unidad, es decir, que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) y conteste a las siguientes preguntas:

a) En una medida de $\mathbf{L}^2$, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidad? b) Calcular $L_z\psi$. ¿Es ψ función propia de L_z? c) A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, y si usted conoce de memoria algunos armónicos esféricos famosos ya puede saber exactamente qué combinacion lineal de armónicos esféricos es ψ. Escriba esta combinación lineal y normalice (**ahora**, antes no) el estado. d) En una medida de L_z, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidad? e) Calcular los valores esperados $\langle L_z^2\rangle_\psi$ y $\langle L_z\rangle_\psi$ y deducir $\Delta_\psi L_z$.

Usted puede necesitar (o no) **algunos** de los siguientes datos:

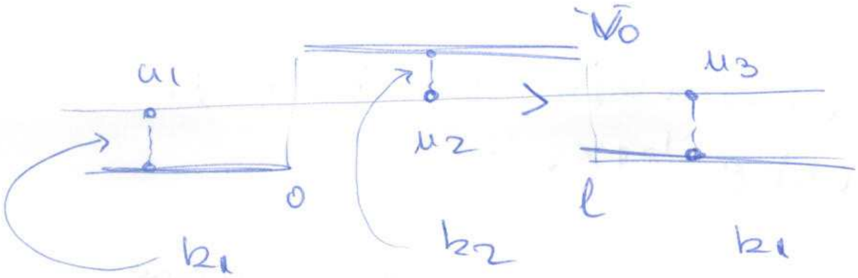
$$Y_l^{-m}(\theta,\varphi) = (-1)^m Y_l^m(\theta,\varphi)^*$$

Asterisco significa el complejo conjugado. Esta relación viene a decir que la constante de normalizacion de Y_l^{-m} es la misma que la de Y_l^m si m es par y la opuesta si m es impar. Y siempre se toman reales.

$$L_+ Y_l^m = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\,\hbar\, Y_l^{m+1}, \quad L_- Y_l^m = \sqrt{l(l+1) + m(-m+1)}\,\hbar\, Y_l^{m-1}.$$

June 2014. NJRPlere.

(1)



$E = \frac{V_0}{2}$

$$k_1 = +\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = +\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}}$$

$$k_2 = +\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)} = +\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}}$$

then $\boxed{k_1 = k_2}$

[from the very beginning use $k_1 = k_2$, as indicated]

Particle incident from the left wave function:

$$\begin{cases} u_1 = A e^{ik_1x} + B e^{-ik_1x}, \\ u_2 = D \sinh k_1x + F \cosh k_1x, \quad [\text{or } G e^{k_1x} + H e^{-k_1x}] \ (*) \\ u_3 = C e^{ik_1x}. \end{cases}$$

Coefficients of reflection and transmission (or diffusion) are here:

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2, \qquad T = \left|\frac{C}{A}\right|^2 \quad \text{(visto en clase)}$$

[Estos coeficientes se escriben desde el principio para saber qué busca uno, uno busca $\frac{B}{A}$ o bien $\frac{C}{A}$. Hay que saber lo que se busca para reconocerlo cuando se encuentra. El cálculo, de otro modo, no sale, es purposeless.

o para forzar los cálculos en nuestro beneficio.

The derivative of the wave function is

(*) A mí, en compactos me gusta más escribir combinación lineal de sinh y cosh que e^{k_1x}, e^{-k_1x}, pero eso es al gusto del consumidor.

$$\begin{cases} u_1' = ik_1 (A e^{ik_1x} - B e^{-ik_1x}), \\ u_2' = k_1 (D \cosh k_1 x + F \sinh k_1 x), \\ u_3' = ik_1 G e^{ik_1 x}. \end{cases}$$

Matching conditions at $x=0$ and $x=l$ are

$$\begin{cases} A+B = F \\ i\cancel{k_1}(A-B) = \cancel{k_1} D \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} A+B=F \\ A-B = -iD \end{cases} \quad [1]$$

and

$$\begin{cases} D \sinh k_1 l + F \cosh k_1 l = G e^{ik_1 l} \\ \cancel{k_1}(D \cosh k_1 l + F \sinh k_1 l) = i\cancel{k_1} G e^{ik_1 l} \end{cases} \quad [2]$$

combining eqs [1] and [2] in a suitable manner, we obtain

$$\frac{A+B}{A-B} = \frac{F}{-iD},$$

with the quotient $\frac{F}{D}$ depending only on k_1 (remember, k_1 is given). The calculation of R is now an easy task: the quotient $\frac{F}{D}$ is obtained from [2] eliminating G:

$$D \cosh k_1 l + F \sinh k_1 l = i (D \sinh k_1 l + F \cosh k_1 l),$$

$$\cosh + \frac{F}{D} \sinh = i\left(\sinh + \frac{F}{D} \cosh\right),$$

$$\frac{F}{D}(\sinh - i \cosh) = i \sinh - \cosh,$$

$$\frac{F}{D} = \frac{i \sinh - \cosh}{\sinh - i \cosh}$$

$$\frac{A+B}{A-B} = -\frac{F}{iD} = i\left(\frac{i \sinh k_1 l - \cosh k_1 l}{\sinh k_1 l - i \cosh k_1 l}\right)$$

$$= -\frac{\sinh k_1 l + i \cosh k_1 l}{\sinh k_1 l - i \cosh k_1 l}$$

$$= \frac{i \cosh k_1 l + \sinh k_1 l}{i \cosh k_1 l - \sinh k_1 l},$$

$$\frac{1+\frac{B}{A}}{1-\frac{B}{A}} = \frac{1+\frac{\sinh k_0 l}{i\cosh k_0 l}}{1-\frac{\sinh k_0 l}{i\cosh k_0 l}},$$

then

$$\frac{B}{A} = \frac{\sinh k_0 l}{i\cosh k_0 l} = -i\tanh k_0 l,$$

and

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \tanh^2 k_0 l.$$

Final result

$$R = \tanh^2 k_0 l, \qquad T = 1-\tanh^2 k_0 l$$

No lo calculo. Sé que $R+T=1$
by the "continuity equation"

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

ese 0 es $R+T=1$ en 1-dimension.

Comentario: 1- A ojo he visto $\frac{1+\frac{B}{A}}{1-\frac{B}{A}} = \frac{1+\boxed{}}{1-\boxed{}}$, pero puede que no quede tan fácil en otros casos. No importa: llamo

$$a = \frac{B}{A}$$

y $\frac{1+\frac{B}{A}}{1-\frac{B}{A}} = \frac{1+a}{1-a} = b$, then $a = \frac{b-1}{b+1}$.

[Here $b = -\frac{\sinh + i\cosh}{\sinh - i\cosh}$]

$$b-1 = \frac{-\sinh - \cancel{i\cosh} - \sinh + \cancel{i\cosh}}{\sinh - i\cosh} = \frac{-2\sinh}{\sinh - i\cosh},$$

$$b+1 = \frac{-\cancel{\sinh} - i\cosh + \cancel{\sinh} - i\cosh}{\sinh - i\cosh} = \frac{-2i\cosh}{\sinh - i\cosh},$$

and

$$a = \frac{-2\sinh k_0 l}{-2i\cosh k_0 l} = -i\tanh k_0 l,$$

as before.

2- [NO del examen] Books say that

$$\frac{1}{T} = 1 + \frac{V_0^2 \sinh^2 2k_2 a}{4E(V_0-E)}, \quad E<0.$$

$2k_2a$ is here $k_\kappa l$

$\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}$ is here 1,

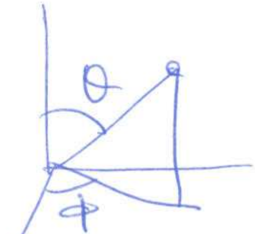
thus

$$\frac{1}{T} = 1+\sinh^2 k_\kappa l = \cosh^2 k_\kappa l,$$

$$T = \frac{1}{\cosh^2 k_\kappa l} = 1-\tanh^2 k_\kappa l.$$ Perfect!! result

---

② $$u(\theta,\phi) = N \sin^2\theta \cos 2\phi.$$



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

First of all, the dependence on ϕ is through

$$\cos 2\phi = \frac{e^{2i\phi} + e^{-2i\phi}}{2}.$$

It indicates that u has a part $Y_{\dots}^{2}$ and a part $Y_{\dots}^{-2}$.

[Notation: Y_ℓ^m]

[$e^{2i\phi}$ is Y^{2},

$e^{-2i\phi}$ is Y^{-2}.
]

Moreover

$$\begin{aligned} u &= N\sin^2\theta\cos 2\phi \\ &= N\sin^2\theta(\cos^2\phi - \sin^2\phi) \\ &= N(x^2-y^2). \end{aligned}$$

The 2's in x^2, y^2 together with Y^2, Y^{-2} indicate that the state u is a linear combination of Y_2^2 and Y_2^{-2} only. [~~Y_0^2~~ no puede ser]

↑ ese 2 es x^2

i) u is a state with $l=2$.
L^2 will always (probability $=1$) measure the value $6\hbar^2$.

ii) calculation of $L_z u$:
$L_z = -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x)$, $\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$

$\partial_y u = N[-2y]$
$\partial_x u = N[2x]$

$L_z u = (-i\hbar)N[-2xy-2xy] = \hbar N[4ixy]$,
then u is not proper vector of L_z (u no es proporcional a Y_2^2 sólo, ni proporcional a Y_2^{-2} sólo).
← era sabido.

iii) What state is u then? You must know Y_2^2, Y_2^{-2} by heart): [*]

$$Y_2^2 = N_1 \sin^2\theta\, e^{2i\phi} = N_1 \sin^2\theta(\cos^2\phi - \sin^2\phi + 2i\sin\phi\cos\phi)$$
$$= N_1[x^2 - y^2 + 2ixy]$$

$$Y_2^{-2} = N_2 \sin^2\theta\, e^{-2i\phi} = N_2[x^2 - y^2 - 2ixy],$$

but $N_1 = N_2$ because

$$Y_l^{-m} = (-1)^m (Y_l^m)^* \longrightarrow \text{complex conjugate}.$$

[*] Dije en clase que uno tiene que saberse de memoria los armónicos esféricos famosos (de igual manera se uno sabe $\cos\pi/3$, $\cos\pi/4$, etc...). Los famosos son $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, Y_l^l, Y_l^{-l}, Y_l^{l-1}, $Y_l^{-(l-1)}$. Es poca cosa.
[$Y_l^l = N(\sin\theta)^l e^{il\phi}$, $Y_l^{l-1} = N(\sin\theta)^{l-1}\cos\theta\, e^{i(l-1)\phi}$]

conocer salvo constante de normalización, se entiende.

We know then that $u = N(x^2-y^2)$ is

u proportional to $Y_2^{2} + Y_2^{-2}$,

$L_z u$ proportional to $Y_2^{2} - Y_2^{-2}$;

hence:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_2^{2} + Y_2^{-2}\right).$$

In particular, measurement of L_z will give the value $2\hbar$ with probability $1/2$ and $-2\hbar$ with probability $-1/2$. Even more: $\langle L_z \rangle_u = 0$.

iv) $\langle L_z^2 \rangle_u = \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\text{probability}} [\overbrace{4\hbar^2}^{\text{value}} + 4\hbar^2] = 4\hbar^2$

$$\Delta_u L_z = \sqrt{4\hbar^2 - 0} = 2\hbar.$$

Comentarios: 1- Si usted no se sabe Y_2^{2}, Y_2^{-2} de memoria pero le dan $L_+ Y_l^m$, usted sabe que $(L_+)^5 u = 0$, y que $(L_+)^4 u$ es proporcional a Y_2^{2}. Pues de allí saca Y_2^{2}. [Pero tiene que trabajar más...]

$L_+ = L_x + iL_y$

$L_+ u = (-i\hbar) N [2zy + i2xz]$,

$(L_+)^2 u = (-i\hbar)^2 N [2x^2 + 2y^2 - 4z^2]$,

$(L_+)^3 u = (-i\hbar)^3 N [-12zy + i12zx]$,

$(L_+)^4 u = (-i\hbar)^4 N [12(x^2-y^2) + i24xy]$.

this state: $x^2 - y^2 + 2ixy$ is Y_2^{2}, save for a normalization constant.

2- For the same reason as in 1: $(L_+)^3 u$ is proportional to Y_2^{1} [lo veo: $Y_2^{1} = N \sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi} = N[xz + iyz] = -iN[\underline{\underline{-zy + izx}}]$].

Similarly $(L_+)^2 u \sim Y_2^{0}$. Este yo no me lo sé, pero veo que es especialmente $x^2+y^2-2z^2$!

sale todo...