UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

25 de Junio de 2015

Física Cuántica I, segunda parte del curso

Nombre y Apellidos:

Firma y DNI:

Nota: No se darán puntos por respuestas sin la debida justificación.

1. [2.5 puntos] Una partícula de masa m incide desde la izquierda sobre el pozo de potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ V_0, & x < 0, \quad x > a \end{cases}$$

donde V_0 es una constante positiva (finita, por supuesto). La partícula lleva una energía $E > V_0$.

i) Calcular el coeficiente de reflexión R del problema de scattering.

ii) Una vez obtenido R, averiguar los dos valores más pequeños de la energia E para los que $R = 0$, o sea, para los que el potencial es totalmente *transparente* a la partícula incidente. Aviso: ninguno de los valores de E pedidos es cero.

El pozo va de 0 a a para que los cálculos sean más sencillos. No imponga una paridad definida a la función de onda porque no la tiene. La energía E es un dato, y no la tiene usted que calcular.

2. [2.5 puntos] La función de onda de una partícula en un potencial central es

$$\psi = ax + by + cz,$$

donde a, b, c son constantes y $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

i) Determinar a, b, c para que ψ sea estado propio de L_x con valor propio $\hbar$, o sea $L_x\psi = \hbar\psi$.

ii) Escribir el estado obtenido en i) en términos de los armónicos esféricos Y_l^m (ver datos tras enunciados). Normalizar **ahora**, antes no, el estado resultante. Llamaremos u a este estado normalizado.

iii) Al medir L_z sobre u, ¿qué valores se obtienen y con qué probabilidades? ¿Y al medir L_z^2?

iv) Comprobar que se cumple la conocida desigualdad

$$\Delta_u A \cdot \Delta_u B \geq \frac{1}{2} |\langle u|[A, B]|u\rangle|$$

con $A = L_x, B = L_y$. $[A, B] = AB - BA$ indica el conmutador y $|\ |$ el valor absoluto. Hacer los mismo con $A = L_x, B = L_z$ y después con $A = L_y, B = L_z$. Si se satura la igualdad en algún caso, indíquese.

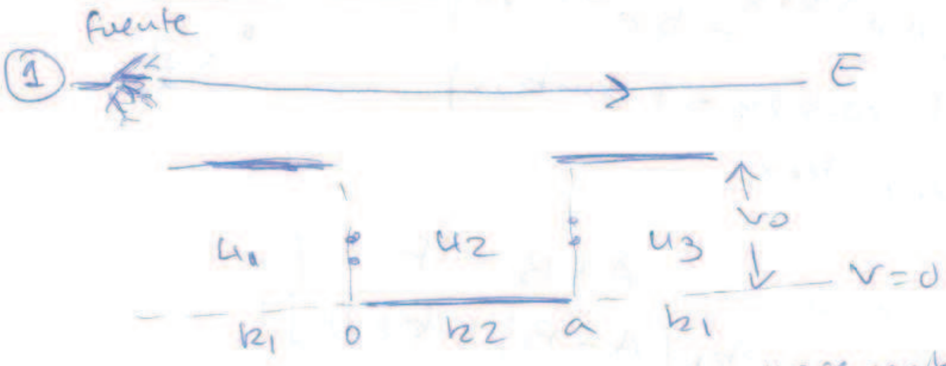
Usted puede necesitar (o no) alguno de los siguientes datos:

En la siguiente lista de armónicos esféricos, θ, φ son los ángulos polar y azimutal, respectivamente, de las coordenadas esféricas. Asterisco significa el complejo conjugado.

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\,\pi}}\cos\theta, \quad Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\,\pi}}\sin\theta\, e^{i\,\varphi}, \quad Y_1^{-1} = -Y_1^{1*},$$
$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\,\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right), \quad Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\,\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\,\varphi}, \quad Y_2^{-1} = -Y_2^{1*},$$
$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\,\pi}}\sin^2\theta\, e^{2\,i\,\varphi}, \quad Y_2^{-2} = Y_2^{2*}.$$

$$L_+\, Y_l^m = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\,\hbar\; Y_l^{m+1}, \quad L_-\, Y_l^m = \sqrt{l(l+1) + m(-m+1)}\,\hbar\; Y_l^{m-1}.$$

June 2015 : FQE



E: un dato conocido, m = mass partícula incidente:
Partículas inciden por la izda exclusivamente.

$$k_1 = +\sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$k_2^2 - k_1^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$: "teorema de conservación"

wave function

$$\begin{cases} u_1 = A e^{ik_1x} + B e^{-ik_1x} \\ u_2 = D \sin k_2x + F \cos k_2x \\ u_3 = C_1 e^{ik_1x} \end{cases}$$

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 \qquad T = \left|\frac{C}{A}\right|^2$$

A, B, D, F, C_1 constants.

[u_2 se puede escribir como $Ge^{ik_2x} + He^{-ik_2x}$.
Así en compactos ([0,a] lo es) no me gusta.
Además, sin 0 = 0, y lo aprovecho. Pero los alumnos
pueden poner u_2 tb con exponenciales complejas,
como digo. Más latoso, though.]

Derivative of the wfunction:

$$\begin{cases} u_1' = ik_1\left(Ae^{ik_1x} - Be^{-ik_1x}\right) \\ u_2' = k_2\left(D\cos k_2x - F\sin k_2x\right) \\ u_3' = C\, ik_1 e^{ik_1x} \end{cases} \qquad ' = \frac{d}{dx}$$

Matching at $x=0$:
$$\left.\begin{aligned} A+B &= F \\ ik_1(A-B) &= k_2 D \end{aligned}\right\},$$

at $x=a$:
$$\left.\begin{aligned} D\sin k_2a + F\cos k_2a &= C e^{ik_1a} \\ D\cos k_2a - F\sin k_2a &= \frac{C}{k_2}\, ik_1 e^{ik_1a} \end{aligned}\right\}.$$

To obtain $R = \left|\frac{B}{A}\right|^2$, we first calculate $\frac{B}{A}$, that is related to F/D. The quotient F/D is obtained from the matching at $x=a$.

Explicitly,
$$\begin{aligned} A+B &= F \\ A-B &= \frac{k_2}{ik_1}D \end{aligned} \quad \text{or} \quad \frac{1+\frac{B}{A}}{1-\frac{B}{A}} = \frac{ik_1}{k_2}\frac{F}{D}.$$

ojo! $\sin k_2 a$, no $\sin k2.a$.

But
$$\frac{D\sin k_2a + F\cos k_2a}{D\cos k_2a - F\sin k_2a} = \frac{k_2}{ik_1} \quad (\text{no } C\text{'s}).$$

Divide by D

28040 MADRID - ESPAÑA
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA I
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

TELEX: 47273 FFUC - E
FAX: (34) (1) 394 51 97
TELEF.: (34) (1) 394 45 09

$$\frac{\sin + \frac{F}{D}\cos}{\cos - \frac{F}{D}\sin} = \frac{k_2}{ik_1} \quad \text{or}$$

$$\frac{F}{D} = \frac{k_2 \cos k_2 a - ik_1 \sin k_2 a}{ik_1 \cos k_2 a + k_2 \sin k_2 a}.$$

Thus,

$$\frac{1+B/A}{1-B/A} = \frac{ik_1 k_2 \cos k_2 a + k_1^2 \sin k_2 a}{ik_1 k_2 \cos k_2 a + k_2^2 \sin k_2 a}.$$

Write this relation as

$$\frac{1+v}{1-v} = u \implies v = \frac{u-1}{u+1}$$

with

$$v = B/A, \quad u = \frac{ik_1 k_2 \cos k_2 a + k_1^2 \sin k_2 a}{ik_1 k_2 \cos k_2 a + k_2^2 \sin k_2 a}$$

and $\left(v = \frac{u-1}{u+1}\right)$

$$\frac{B}{A} = \frac{(k_1^2 - k_2^2)\sin k_2 a}{2ik_1 k_2 \cos k_2 a + (k_1^2 + k_2^2)\sin k_2 a}.$$

Now compute R and T

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left(\frac{B}{A}\right)\left(\frac{B}{A}\right)^*$$

$$= \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2 k_2 a}{(k_1^2 + k_2^2)\sin^2 k_2 a + 4k_1^2 k_2^2 \cos^2 k_2 a}$$

To calculate T:

$$(k_1^2-k_2^2)^2\sin^2 k_2a = \underbrace{(k_1^2+k_2^2)^2\sin^2 k_2a - 4k_1^2k_2^2\sin^2 k_2a}_{\text{identity}}$$
$$=(k_1^2+k_2^2)^2 s^2 k_2a + 4k_1^2k_2^2\cos^2 k_2a$$
$$- 4k_1^2k_2^2$$

or

identity: $\overset{R}{(k_1^2-k_2^2)\sin^2 k_2a} + \overset{T}{4k_1^2k_2^2}$
$= \underbrace{(k_1^2+k_2^2)^2 s^2 k_2a + 4k_1^2k_2^2\cos^2 k_2a}_{\text{denominator}}.$

And conclude that

$$T = \frac{4k_1^2k_2^2}{(k_1^2+k_2^2)^2\sin^2 k_2a + 4k_1^2k_2^2\cos^2 k_2a}$$

Curiosity: the potential well is transparent to the incident particle (we mean that $R=0$) if

i) $k_1=k_2$; does not apply

ii) $k_2=0$; " "

iii) $k_2a=\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ or $k_2a=n\pi,\ n=1,2,3,\ldots$

In this case,

$$k_2^2a^2=n^2\pi^2 \quad \text{"} \quad \frac{2mEa^2}{\hbar^2}=n^2\pi^2 \text{ or } (*)$$

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2},\quad n=1,2,3,\ldots$$

If $V_0 < E_1$, the smallest possible values of the energy are $E_1, E_2, \ldots$ If $E_1 < V_0 < E_2$, the smaller possible values are $E_2, E_3, \ldots$ and so on.

This is a surprising result: R is always different from zero except when the energy of the particle is the energy of an infinite potential box.

(*) This applies for n's s.t. $\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} > V_0$, of course.

28040 MADRID - ESPAÑA
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA I
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
TELEX: 47273 FFUC - E
FAX: (34) (1) 394 51 97
TELEF.: (34) (1) 394 45 09

Este es el efecto Ramsauer, descubierto en 1921 (un buen año...) por un físico alemán, Ramsauer, al hacer colisiones electrones de baja energía sobre átomos de argon. El átomo de argon, representado en nuestro examen por un pozo finito de potencial, dejaba pasar como si tal cosa a electrones lentos (los rápidos a ver quien los para...!) cuando se daban unas condiciones favorables entre la long de onda de los e^-'s y el tamaño del átomo ($k_2 a = n\pi$). No tiene explicación clásica este fenómeno...

---

2 $\quad \psi = ax + by + cz \quad , \quad x^2+y^2+z^2=r^2$

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \quad , \quad L_x = y p_z - z p_y$$
$$= -i\hbar\left[y\partial_z - z\partial_y\right]$$

$L_x \psi = \hbar \psi$ is

$L_x \psi = -i\hbar\,(cy - bz) = \hbar\,(ax+by+cz)$

for all x,y,z (there are many x,y,z here...)

$\Rightarrow \quad a=0 \quad , \quad -ic = b \quad , \quad ib = c$

compatible. ($\equiv$ same relation)

i) $\psi \sim y + iz$, basically.

ii) Since

$\frac{x}{r}$ estrictamente hablando...

$1/r$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(x+iy)\,, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,z\,, \quad Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(x-iy)\,,$$

we have that

$$y = -\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(Y_1^1 + Y_1^{-1}\right), \quad z = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_1^0 .$$

thus

$$\psi \sim -\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(Y_1^1+Y_1^{-1}\right) + i\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_1^0$$

$$= \underbrace{i\sqrt{\frac{4\pi}{3}}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_1^1+Y_1^{-1}\right) + Y_1^0\right]$$

aquí habría r's si usted las arrastra... pasarían a la parte radial. Aquí no hay parte radial, por eso no las conservo.

or

$$\psi \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_1^1+Y_1^{-1}\right) + Y_1^0 ,$$

that normalized to 1 is

$$\boxed{u \equiv \frac{1}{2}\left(Y_1^1+Y_1^{-1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,Y_1^0} \quad , \; L_x u = \hbar u .$$

[shortest, more direct manner of calculating proper eigenvectors of L_x, or L_y or... with L_+, L_- too... pero son muy pesados !!

(iii) L_z: $+\hbar$ with prob $1/4$

$-\hbar$ " prob $1/4$

0 " " $1/2$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA I
28040 MADRID - ESPAÑA

TELEF.: (34) (1) 394 45 09
FAX: (34) (1) 394 51 97
TELEX: 47273 FFUC - E

$$\langle L_z\rangle_u = \frac{1}{4}(-\hbar) + \frac{1}{4}(\hbar) + \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

$$\langle L_z^2\rangle_u = \frac{1}{4}\hbar^2 + \frac{1}{4}\hbar^2 + 0 = \frac{\hbar^2}{2}$$

$$\Delta_u L_z = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2} - 0} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}.$$

↑ easy results when u is written in terms of Y_ℓ^m.

Easy too: $\langle L_x\rangle_u = \langle u|L_x|u\rangle = \hbar$

$\langle L_x^2\rangle_u = \langle u|L_x^2|u\rangle = \hbar^2$

$$\Delta_u L_x = \sqrt{\hbar^2 - \hbar^2} = 0 \quad \text{(of course!)}$$

Easy too: $\langle L_y\rangle_u = 0$ since $[L_x, L_z] = -i\hbar L_y$

$$\langle u|[L_x, L_z]|u\rangle \underset{\uparrow}{=} 0 \Rightarrow \langle L_y\rangle_u = 0$$

u is proper of L_x

$$\langle L_y^2\rangle = \langle L^2\rangle - \langle L_x^2\rangle - \langle L_z^2\rangle$$
$$= 2\hbar^2 - \hbar^2 - \frac{\hbar^2}{2} = \frac{\hbar^2}{2}$$

$$\Delta_u L_y = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2} - 0} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$$

General inequality

---

[*] $\boxed{\Delta_u A \cdot \Delta_u B \geq \frac{1}{2}|\langle u|[A,B]|u\rangle|}$

1) $A = L_x$, $B = L_y$

$$\Delta_u A \cdot \Delta_u B = 0 \cdot \frac{\hbar}{\sqrt{2}} = 0$$

$\langle u|[A,B]|u\rangle$ proportional to $\langle L_z\rangle_u = 0$

[*] is $\quad 0 = 0.$ ✓ ok [true]

2) $A = L_x$, $B = L_z$

$\Delta_u A \cdot \Delta_u B = 0 \cdot \frac{\hbar}{\sqrt{2}} = 0$

$\langle u | [A,B] | u \rangle \sim \langle u | L_y | u \rangle = 0$

[*] is $0 = 0$ too. ok [true]

3) $A = L_y$, $B = L_z$ (most interesting case)

$\Delta_u A \cdot \Delta_u B = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hbar}{\sqrt{2}} = \frac{\hbar^2}{2}$

$\langle u | [A,B] | u \rangle \sim \langle u | L_x | u \rangle = \hbar$

[*] is now $\frac{\hbar^2}{2} = \frac{\hbar^2}{2}$. ok, ok, ok [true]

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA I
28040 MADRID - ESPAÑA
TELEF.: (34) (1) 394 45 09
FAX.: (34) (1) 394 51 97
TELEX: 47273 FFUC - E