UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

10 de Septiembre de 2014

Física Cuántica I, segunda parte del curso

Nombre y Apellidos:

Firma y DNI:

Nota: No se darán puntos por respuestas sin la debida justificación.

1. [2.5 puntos] Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de un potencial armónico unidimensional de frecuencia ω. Su Hamiltoniano es el habitual
$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2.$$
En el sistema se define el observable adimensional $A = \frac{1}{\hbar}(XP + PX)$. a) Calcular el conmutador $[A, H]$. *Ayuda*: $[X, P] = i\hbar$. b) Demostrar, **utilizando el resultado obtenido en el apartado anterior**, que en el estado n-simo de un oscilador armónico la energía cinética media $\langle K \rangle_n$ es igual a la energía potencial media $\langle V \rangle_n$, es decir que
$$\langle K \rangle_n = \frac{1}{2m}\langle P^2 \rangle_n = \langle V \rangle_n = \frac{1}{2}m\omega^2 \langle X^2 \rangle_n.$$
Recuerde que este resultado lo obtuvimos en clase aunque de manera diferente. Notación obvia: $\langle K \rangle_n = \langle n|K|n \rangle$. c) Expresando X en términos de los operatores $a, a^\dagger$, calcular el valor esperado $\langle n|X^4|n \rangle$. *Ayuda*: Simplifica considerablemente los cálculos utilizar que $\langle n|X^4|n \rangle = \langle X^2 n|\, X^2 n \rangle$, pero no es obligatorio hacerlo. d) Calcular, si existe, el valor de n para el que $\langle n|X^4|n \rangle = 16\, l^4$ siendo $l = \sqrt{\hbar/m\omega}$.

2. [2.5 puntos] a) Una partícula se encuentra en un estado que es combinación lineal de los estados
$$\psi_1 = x f(r) \qquad \psi_2 = y f(r)$$
donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Responda a las **tres** siguientes preguntas. a1) Determinar las combinaciones lineales que son propias de L_z y los valores propios correspondientes. a2) Diga cuál es el contenido, salvo constante de normalización, en armónicos esféricos de las combinaciones obtenidas en el apartado anterior. a3) Eligiendo una de esas combinaciones, la que usted quiera, calcular el valor esperado $\langle L_y \rangle$.

   Modificando de manera obvia los estados obtenidos en a1) se pueden obtener estados propios de L_y. Hágalo y responda a las **dos** preguntas que siguen. a4) Determinar los valores propios de L_y en dichos estados. a5) Indicar, lo más exactamente posible, sus contenidos en armónicos esféricos.

   Nota: Cuanto más sepa usted de momento angular cuántico y de los armónicos esféricos, mejor sera su respuesta a a5). Desde algo muy vago y general hasta fijar (casi) por completo los coeficientes. Haga lo que pueda.

Usted puede necesitar (o no) **algunos** de los siguientes datos (sigue a la vuelta):
$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}),$$

$$a = \frac{iP}{\sqrt{2m\hbar\omega}} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X, \quad a^\dagger = \frac{-iP}{\sqrt{2m\hbar\omega}} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X, \quad [a, a^\dagger] = 1.$$

$$Y_l^{-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_l^m(\theta, \varphi)^*$$

Asterisco significa el complejo conjugado. Esta relación viene a decir que la constante de normalizacion de Y_l^{-m} es la misma que la de Y_l^m si m es par y la opuesta si m es impar. Y siempre se toman reales.

$$L_+ \, Y_l^m = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\, \hbar \, Y_l^{m+1}, \quad L_- \, Y_l^m = \sqrt{l(l+1) + m(-m+1)}\, \hbar \, Y_l^{m-1}.$$

Física Cuántica I, Sep 2014 [2nd part] [MJRPlozo]

(1) $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$, $\quad A = \frac{1}{\hbar}[xP + Px]$

a) Calculate first $[x, P^2]$ and $[P, x^2]$: Use Leibnitz's rule [applies here: $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, since $[A, B] \equiv AB - BA$]. [Vista en clase].

$$[x, P^2] = P[x, P] + [x, P]P = 2i\hbar P,$$
$$[P, x^2] = x[P, x] + [P, x]x = -2i\hbar P.$$

Now

$$\begin{aligned}[xP + Px, P^2] &= [xP, P^2] + [Px, P^2] = x[P,P^2] + [x,P^2]P + P[x,P^2] + [P,P^2]x \\ &= x\underset{0}{[P, P^2]} + \underset{2i\hbar P}{[x, P^2]}P \\ &= \cancel{4i\hbar} \\ &= 4i\hbar P^2,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}[xP + Px, x^2] &= [xP, P^2] + [Px, x^2] \\ &= x[P, x^2] + 0\cdot P + P\cdot 0 + [P, x^2]x \\ &= -4i\hbar x^2.\end{aligned}$$

Thus

$$\boxed{\begin{aligned}[A, H] &= \frac{1}{\hbar}[xP + Px, H] \\ &= 4i\left[\frac{P^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right]\end{aligned}}$$

b) Acting on $|n\rangle$ states (proper states of H):

$$\begin{aligned}\langle n|[A, H]|n\rangle &= \langle n|AH - HA|n\rangle \\ &= \langle n|AH|n\rangle - \langle Hn|An\rangle \\ &= (E_n - E_n)\langle n|A|n\rangle \\ &= 0 \,//\end{aligned}$$

es más corto en realidad...

This means that

$$\boxed{\langle K\rangle_n = \langle V\rangle_n} \quad , \quad K \equiv \frac{P^2}{2m} \quad V \equiv \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

as requested.

[no pedido pero lo hago tb:

$$\langle m|[A,H]|n\rangle = \langle m|AH-HA|n\rangle$$
$$= E_n\langle m|A|n\rangle - E_m\langle m|A|n\rangle$$
$$= (E_n-E_m)\langle m|A|n\rangle;$$

no necesariamente iguales: "elemento de matriz"

and

$$\frac{1}{4i\hbar}(E_n-E_m)\langle m|xP+Px|n\rangle$$
$$= \langle m|\frac{P^2}{2m}|n\rangle - \langle m|\frac{1}{2}m\omega^2x^2|n\rangle$$

no confundir las m's...

nombre: $\langle n|K|n\rangle$ es un valor esperado de K en n
$\langle m|K|n\rangle$ es un "elemento de matriz"!)

c) $$\left.\begin{aligned} a &= \frac{iP}{\sqrt{2m\hbar\omega}} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x \\ a^+ &= \frac{-iP}{\sqrt{2m\hbar\omega}} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x \end{aligned}\right\}$$

$l \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$: "longitud natural del oscilador armónico"

From here: $\frac{x}{l} = \frac{a+a^+}{\sqrt{2}}$

$$\langle n|x^4|n\rangle = \langle x^2 n|x^2 n\rangle$$

$$\left(\frac{x}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[aa + a^+a^+ + aa^+ + a^+a\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[aa + a^+a^+ + 2a^+a + \mathbb{1}\right]$$

$[a,a^+]=\mathbb{1}$ si se quiere

$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ No lo dan en los "apuntes"! tengo q saberlo o saber sacarlo...

$a^2|n\rangle = \sqrt{n}\,a|n-1\rangle = \sqrt{n(n-1)}\,|n-2\rangle$

$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ Lo mismo...

$(a^+)^2|n\rangle = \sqrt{(n+1)(n+2)}\,|n+2\rangle$

$$\left(\frac{x}{\ell}\right)^2|n\rangle = \frac{1}{2}\Big[\sqrt{n(n-1)}\,|n-2\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}\,|n+2\rangle + (2n+1)|n\rangle\Big]$$

$$\left\langle \frac{x^2}{\ell^2}n \middle| \frac{x^2}{\ell^2}n\right\rangle = \frac{1}{4}\left[n(n-1) + (n+1)(n+2) + (2n+1)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\begin{matrix} n^2-n \\ n^2+3n+2 \\ 4n^2+4n+1 \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[6n^2+6n+3\right]$$

Result: $\boxed{\langle x^4\rangle_n = \frac{\ell^4}{4}(6n^2+6n+3)}$ $\qquad \frac{\ell^4}{4} = \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}$

d) obviamente $\langle x^4\rangle_n = 16\ell^4$ es imposible pues

$\langle x^4\rangle_2 = 9\frac{3}{4}\ell^4$ and $\langle x^4\rangle_3 = 18\frac{3}{4}\ell^4$

and there is nothing in between $|2\rangle$ and $|3\rangle$.

[no estate propio of H].

$\boxed{\nexists n}$

---

② $\psi_1 = x f(r)$, $\qquad \psi_2 = y f(r)$

$r^2 = x^2+y^2+z^2$

a1) $\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$, $L_z = x p_y - y p_x$
$= -i\hbar (x \partial_y - y \partial_x)$

$(x\partial_y - y\partial_x)\, x\, \underbrace{f(r)}_{\text{a constant for the components of } \vec{L}} = f(r)\,[-y]$

$(x\partial_y - y\partial_x)\, y\, f(r) = f(r)[x]$.

These relations are also $L_z \varphi_1 = i\hbar \varphi_2$
$L_z \varphi_2 = -i\hbar \varphi_1$,

then
$L_z \underbrace{(\varphi_1 + b\varphi_2)}_{\substack{\text{esto es} \\ \text{una combinación} \\ \text{lineal. Solo que el} \\ \text{coef de } \varphi_1 \text{ es 1 [porque quiero]}}} = i\hbar(\varphi_2 - b\varphi_1) = -i\hbar b \underbrace{(\varphi_1 - \tfrac{1}{b}\varphi_2)}_{\substack{\text{también el coef de } \varphi_1 \\ \text{es 1 (salvo por } -i\hbar b)}}$.

Take $b = -\frac{1}{b}$ [viene de comparar "$\varphi_1 + b\varphi_2$" con "$\varphi_1 - \frac{1}{b}\varphi_2$"]

(no other possibilities are correct since φ_1, φ_2 are linearly independent) :

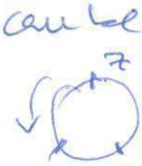
$b^2 = -1$, $b \begin{cases} i \\ -i \end{cases}$ two possibilities.

one has:

$\boxed{u = \varphi_1 + i\varphi_2}$ proper of L_z with eigenvalue $\hbar$:
it is x/i essentially

$\boxed{v = \varphi_1 - i\varphi_2}$ " " " " " $-\hbar$:
it is x/i^{-1} essentially [save for a normalization constant]

a2) This can be computed in two different manners: a), b).

a)  $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$

$\langle u | [L_z, L_x] | u \rangle = 0 = i\hbar \langle u | L_y | u \rangle$

then $\boxed{\langle L_y \rangle_u = \langle L_y \rangle_v = 0}$

b) use $L_+ - L_- = 2i L_y$

$(L_+ - L_-)\, Y_1^1$ is proportional to Y_1^0
↑
is a sepe for a constant multiplicative

and $\langle Y_1^0 | Y_1^1 \rangle \equiv 0$. Then $\langle L_y \rangle_u = 0$.
Same applies to $\langle L_y \rangle_v$.
used here that $L_+ Y_\ell^m \sim Y_\ell^{m+1}$
$L_- Y_\ell^m \sim Y_\ell^{m-1}$

Si las combinaciones $(x-iy)f(r)$, $(x+iy)f(r)$
son propias de L_z [falta la z], entonces
$(z-ix)f(r)$ and $(z+ix)f(r)$
[falta la y] son propias de L_y. Si estas no gustan
coja $(x-iz)f(r)$ and $(x+iz)f(r)$

$L_y = zP_x - xP_z = -i\hbar\,(z\partial x - x\partial z)$
To obtain the eigenvalues:

$$
\begin{aligned}
L_y (x-iz) &= -i\hbar\,(z\partial x - x\partial z)(x-iz) \\
&= -i\hbar\,(z+ix) \\
&= \hbar\,(-iz+x) \\
&= \hbar\,(x-iz),
\end{aligned}
$$

indicates that
$(x-iz)f(r)$ is proper of L_y with eigenvalue $\hbar$
$(x+iz)f(r)$ " " " " " $-\hbar$

contenido en armónicos esféricos:

$$\frac{x}{r} = \sin\theta\cos\phi = \sin\theta\left(\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}\right) \sim Y_1^1 - Y_1^{-1}$$

$$\frac{z}{r} = \cos\theta \sim Y_1^0 ,$$

and

no cuenta aquí...

$$(x-iz)\,\cancel{f(r)} \sim a\left(Y_1^1 - Y_1^{-1}\right) + b\,Y_1^0$$

$$(x+iz) \sim -a^*\left(Y_1^1 - Y_1^{-1}\right) + b^* Y_1^0$$

[no hace falta decir más.]

[sé que x va con la diferencia de armónicos porque

$Y_1^1 \sim \sin\theta\, e^{i\phi}$ (lo sé de memoria) [es un "famoso"]

$Y_1^{-1} = (-1)^m\, Y_1^{1\,*} = -Y_1^{1\,*}$

]