UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

10 de Septiembre de 2015

Física Cuántica I, segunda parte del curso

Nombre y Apellidos:

Firma y DNI:

Nota: No se darán puntos por respuestas sin la debida justificación.

1. [1.5 puntos] Una partícula de masa m y energía E incide desde la izquierda sobre el potencial dibujado en la pizarra. Escriba la solución de la ecuación de Schrödinger, con las amplitudes y número de ondas k en cada trozo del potencial **a falta** de imponer las condiciones de continuidad (anclaje las llaman algunos de ustedes). No pido las derivadas. Escriba también las relaciones de conservación que cumplen los cuadrados de los números de onda.

   Lo mismo para el segundo potencial pero como la pared en $x = 0$ es infinita pegue debidamente la función de ondas **exclusivamente** en este punto.

2. [2 puntos] Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de un potencial armónico unidimensional de frecuencia ω. Su Hamiltoniano es el conocido
$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2.$$
   Se define en el sistema el operador adimensional
$$C = a\frac{X}{l} + b\,\frac{P}{ml\,\omega},$$
   donde a, b son constantes arbitrarias y l la longitud natural del oscilador.

   a) Calcular el conmutador $[H, C]$. *Ayuda:* $[X, P] = i\hbar$.

   b) Utilizar el resultado obtenido para calcular los valores esperados $\langle n|X|n\rangle$, $\langle n|P|n\rangle$ sobre el estado n-simo de un oscilador armónico.

   c) Encontrar a, b de manera que $[H, C] = \hbar\omega\, C$ y relacionar el C obtenido con un operador muy famoso de la teoría del oscilador armónico cuántico.

   d) Lo mismo que en el apartado anterior pero para que se cumpla $[H, C] = 2\hbar\omega\, C$. Identificar nuevamente C.

3. [1.5 puntos] Sea $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ el operador de momento angular cuántico.

   a) Demostrar que para ccualquier entero n se cumple
$$L_z(x + iy)^n f(r) = n\hbar(x + iy)^n f(r), \qquad L_+(x + iy)^n f(r) = 0,$$
   Aquí $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y f es una función arbitraria.

   b) Demostrar que $(x + iy)^n\, f(r)$ es una función propia de $\mathbf{L}^2$ y determinar su valor propio.

   c) ¿Por qué $L_-(x+iy)^n\, f(r)$ tiene que ser una función propia de $\mathbf{L}^2$? ¿Cúal es su valor propio?

   Los datos, atrás.

Usted puede necesitar (o no) alguno de los siguientes datos:

$$l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}),$$

En la siguiente lista de armónicos esféricos, θ, φ son los ángulos polar y azimutal, respectivamente, de las coordenadas esféricas. Asterisco significa el complejo conjugado.

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}, \quad Y_1^{-1} = -Y_1^{1*},$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right), \quad Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\varphi}, \quad Y_2^{-1} = -Y_2^{1*},$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\varphi}, \quad Y_2^{-2} = Y_2^{2*}.$$

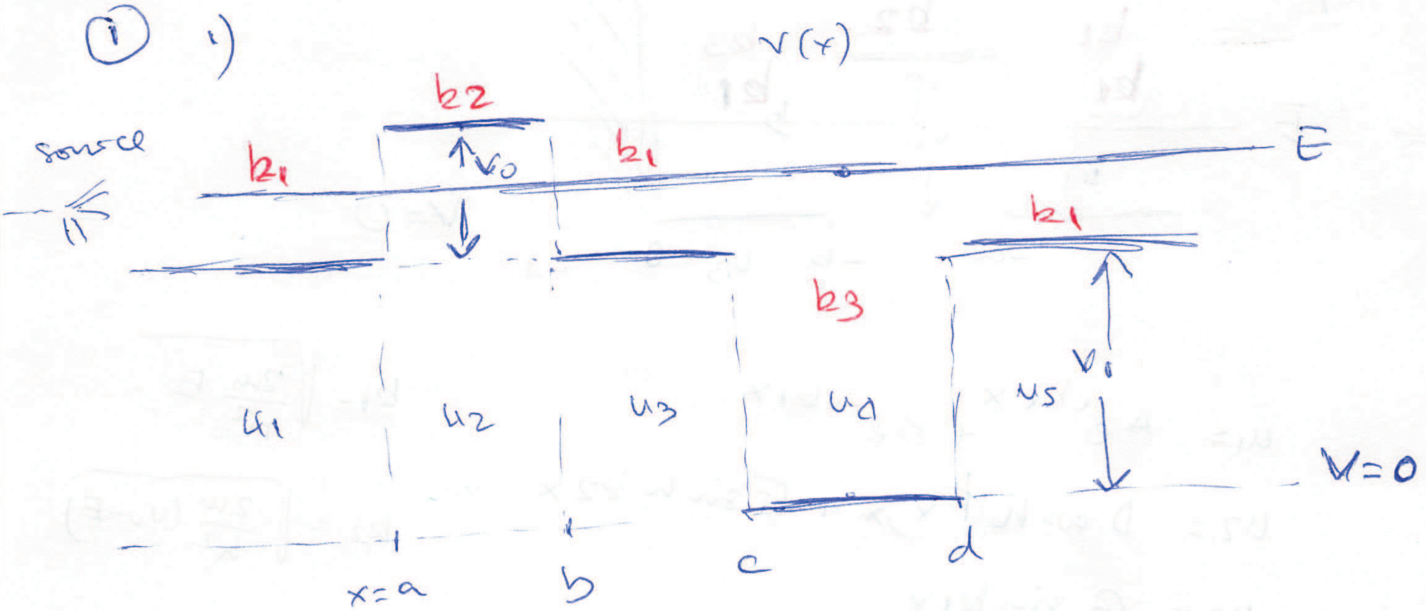
$$L_x = yP_z - zP_y, \quad L_y = zP_x - xP_z, \quad L_z = xP_y - yP_x$$

$$L_+ = L_x + iL_y, \quad L_- = L_x - iL_y.$$

$$L_+ Y_l^m = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\,\hbar\, Y_l^{m+1}, \quad L_- Y_l^m = \sqrt{l(l+1) + m(-m+1)}\,\hbar\, Y_l^{m-1}.$$

Física Cuántica. Sep 2015

(1) 1)



$$k_1 = \sqrt{\frac{2m(E-V_1)}{\hbar^2}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(V_0+V_1-E)}{\hbar^2}}, \quad k_3 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$u_1 = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$ reflected piece

$u_2 = D\sinh k_2x + F\cosh k_2x$

$u_3 = Ge^{ik_1x} + He^{-ik_1x}$ present due to the V_1 well

$u_4 = J\sin k_3x + M\cos k_3x$

$u_5 = Ce^{ik_1x}$ ← transmitted part

conservation laws: $k_3^2 - k_1^2 = \frac{2mV_1}{\hbar^2}$

$$k_2^2 + k_3^2 = \frac{2m(V_0+V_1)}{\hbar^2}$$

Another conservation law,

$$k_1^2 + k_2^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

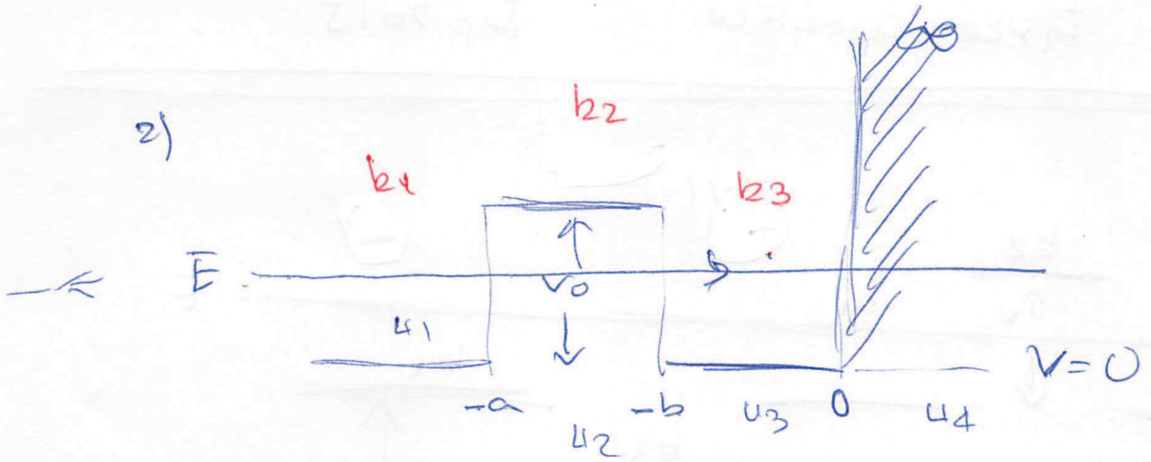
derives from the previous two.

$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2, \quad T = \left|\frac{C}{A}\right|^2$

9 constants, 8 conditions, A free (or any other)

[better A]

2)



$u_1 = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}$ $\qquad k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$

$u_2 = D \cosh k_2 x + F \sinh k_2 x$ $\qquad k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}$

$u_3 = G \sin k_1 x$

$u_4 = 0, \ \forall x > 0$ [from $x=0$ to infinity]

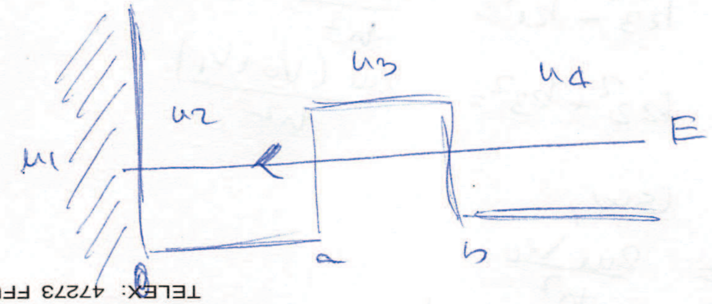
$G \sin k_1 x$ because $u_3(0) = u_4(0) \equiv 0$. $\cos k_1 x$ cannot enter there.

obviously $R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = 1$, $T = 0$. ← no se pide...

[No hace falta hacer los cálculos para verlo, pero puede hacerlos. Qué amiga la pared infinita del haz inicial de la izda? Pues eso, nada.

Also $k_1^2 + k_2^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$.

= source from the right:



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA I
28040 MADRID - ESPAÑA
TELEF.: (34) (1) 394 45 09
FAX.: (34) (1) 394 51 97
TELEX: 47273 FFUC - E

$u_1 = 0$

$u_2 = C \sin k_1 x$

$u_3 = D \cosh k_2 x + F \sinh k_2 x$

$u_4 = A e^{-ik_1 x} + B e^{ik_1 x}$

↑ reflected piece.

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = 1$$

---

(2) a)
$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \qquad , [l] = L, \text{ of course.}$$

$$C = a\frac{X}{l} + b\frac{P}{ml\omega}$$

To calculate $[H, C]$ is required, basically, the computation of two commutators

$$[P^2, X] = P[P,X] + [P,X]P = -2i\hbar P,$$
$$[X^2, P] = X[X,P] + [X,P]X = 2i\hbar X.$$

Thus

$$[H, C] = \frac{1}{2m}\underbrace{[P^2, X]}_{-2i\hbar P}\frac{a}{l} + \frac{1}{2}m\omega^2 \underbrace{[X^2, P]}_{2i\hbar X}\frac{b}{ml\omega}$$

$$= i\hbar b\omega \frac{X}{l} - i\hbar a\omega \frac{P}{ml\omega}$$

$$= \hbar\omega\left[ib\frac{X}{l} - ia\frac{P}{ml\omega}\right]$$

energy dimensions ok

Result:
$$\boxed{\left[H, a\underbrace{\frac{X}{l}}_{\text{no dimensions}} + b\underbrace{\frac{P}{ml\omega}}_{\text{no dimensions}}\right] = \hbar\omega\left[ib\underbrace{\frac{X}{l}}_{\text{no dimen}} - ia\underbrace{\frac{P}{ml\omega}}_{\text{no dimens}}\right]} \quad [*]$$

b) Calculate now the expectation value relation:

$$\langle n|[H, C]|n\rangle = \hbar\omega\left[ib\langle n|\frac{X}{l}|n\rangle - ia\langle n|\frac{P}{ml\omega}|n\rangle\right]$$

on the proper states of H: $(H|n\rangle = E_n|n\rangle)$.

Obviously

$$ib\langle n|\frac{X}{l}|n\rangle - ia\langle n|\frac{P}{ml\omega}|n\rangle = 0$$

since

$$\langle n|[H, \dots]|n\rangle = 0.$$

But a, b are arbitrary constants! Take

$a=1, b=0$: $\boxed{\langle P\rangle_n = 0}$

$a=0, b=1$: $\boxed{\langle X\rangle_n = 0}$

result that was obtained = the lectures too!!

Nótese esto resaltado

Aunque yo no sepa calcular $\langle P\rangle_n$ ni $\langle X\rangle_n$, aunque fuera lo más difícil del mundo, sé que son 0

c) $[H, C] = \hbar\omega C$ implies that (see [*])

two conditions

$$a = ib \quad \text{and} \quad b = -ia \quad \text{(compatible!!)},$$

that can be solved for $a = 1$, $b = -i$. Then C is equal (or proportional, who cares?) to

$$\frac{X}{l} - \frac{iP}{ml\omega},$$

that is the operator.... $\hat{a}^+$!!!!!!

the creation operator. I write hat (a) on top to avoid confusion with the constant 'a' of the problem!!

Simplemente por el conmutador y la arbitrariedad de a, b (esto es mucho...)

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA I
28040 MADRID - ESPAÑA
TELEF.: (34) (1) 394 45 09
FAX.: (34) (1) 394 51 97
TELEX: 47273 FFUC - E

Remember this?

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{iP}{m l \omega} + \frac{X}{l}\right]$$

$$\hat{a}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{iP}{m l \omega} + \frac{X}{l}\right]$$

d) $[H, C_1] = 2\hbar\omega C_1$

is possible only if

$a = 2ib$, $b = -2ia$,

which is impossible unless $\boxed{a = b = 0}$

two conditions

not just one!!

Then: $\boxed{C_1 = 0}$

No operator in the theory of HO satisfies $[H, C] = 2\hbar\omega C_1$!!

Comments:

- Side results not asked in the exam, consequences of relation [*]. Since

$$H|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \tfrac{1}{2}\right)|n\rangle,$$

$$H|m\rangle = \hbar\omega\left(m + \tfrac{1}{2}\right)|m\rangle,$$

take $a = 1, b = 0$ in [*] and evaluate the expression in $\langle m| \ldots |n\rangle$:

[1] $$(m - n)\underbrace{\langle m|\frac{X}{l}|n\rangle}_{} = -i\langle m|\frac{P}{m l \omega}|n\rangle$$

si $m \neq n$ no son valores esperados.
Se le llama "elemento de matriz mn"

now take $a = 0, b = 1$:

[2] $$(m - n)\langle m|\frac{P}{m l \omega}|n\rangle = i\langle m|\frac{X}{l}|n\rangle .$$

Observe [0] and [2] together. Both together imply that

$$(m-n)^2 \langle m|\frac{X}{\ell}|n\rangle = \langle m|\frac{X}{\ell}|n\rangle$$

(for instance). This relation means that only when $m-n=1$ or when $m-n=-1$, the matrix element

$\langle m|X|n\rangle$ may be different from zero

[we know that too!].

Pero aquí lo hemos sacado con un poco cálculo... una gran economía...

It is necessarily zero in all the ~~remaining~~ remaining cases. Of course, $|n\rangle, |m\rangle$ are eigenstates of H.

---

al derivar...

(3) L_x, L_y, L_z regard $f(r)$ as a constant, because it is a function of r merely! [de clase...]

Remember that

$$L_x = -i\hbar(y\partial_z - z\partial_y), \quad L_y = -i\hbar(z\partial_x - x\partial_z)$$

$$L_z = -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x)$$

a) $L_x (x+iy)^n = -i\hbar(y\partial_z - z\partial_y)) = -i\hbar\left[n(x+iy)^{n-1}\right][-iz]$

[I omit $f(r)$: it can be included at the end, like this

$$L_x (x+iy)^n f(r) = -i\hbar\left[n(x+iy)^{n-1}\right][-iz] f(r);$$

it's merely a "constant" after all.

$$L_y (x+iy)^n = -i\hbar \left[n (x+iy)^{n-1} \right] [z]$$

$$L_z (x+iy)^n = -i\hbar \left[n (x+iy)^{n-1} \right] [ix - y]$$

$$= \hbar n (x+iy)^n \quad [1] \qquad \underline{\underline{ok}} \ !!!$$

$$L_+ = L_x + i L_y$$

$$L_+ (x+iy)^n = -i\hbar \left[n (x+iy)^{n-1} \right] \underbrace{[-iz + iz]}_{0} = 0 \quad [2]$$

$\underline{\underline{ok!!}}$

These two results are equivalent to see that $(x+iy)^n$ is proportional to the Spherical Harmonics

Y_n^n → la "m": la veo de [1]

↑ la "l": veo que es igual a "m" porque $L_+ (x+iy)^n = \underline{\underline{0}}$

This solves b) and c) at the same time

b) $\vec{L}^2 Y_n^n = n(n+1) \hbar^2 Y_n^n$

↑ o see "$(x+iy)^n$"

(*)

c) $L_- Y_n^n \propto$ (proportional to) Y_n^{n-1},

This is the reason why $L_- (x+iy)^n$ is an eigenfunction of $\vec{L}^2$: because it is Y_n^{n-1} essentially !!! (an eigenfunction of $\vec{L}^2$) with eigenvalue $n(n+1)\hbar^2$ as well.

(*) Tb calc con

$L_- L_+ = \vec{L}^2 - L_z^2 - \hbar L_z$ (identity)

Acting on $u \equiv (x+iy)^n$: $\quad$ lhs $= 0$

rhs $= (\vec{L}^2 - L_z^2 - \hbar L_z) u$

$= \vec{L}^2 u - n^2\hbar^2 u - n\hbar^2 u$

$\Rightarrow \boxed{\vec{L}^2 u = n(n+1)\hbar^2 u}$