UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

12 de Septiembre de 2017(9)

Física Cuántica I

Nombre y Apellidos:

Firma y DNI:

Nota: No se darán puntos por respuestas sin la debida justificación. Son 160 puntos normalizables a 10, pero si sólo se contesta a las cuestiones éstas valdrán un máximo de 60 puntos.

C1 [20 puntos] i) Un haz de partículas de masa m y energía $E > 0$ se lanza sobre un step de potencial. El potencial (ver pizarra) es cero para $x \leq 0$ y $3E/4$ para $x > 0$. ¿Que fracción de partículas son reflejadas en $x = 0$? ii) ¿Cuál sería esa fracción si las partículas hubieran sido lanzadas en sentido opuesto? (o sea, si iban de izda a dcha en el primer apartado, en este segundo de dcha a izda, o viceversa).

C2 [20 puntos] Sean los observables T_1, T_2, T_3 definidos por

$$T_1 \equiv \frac{1}{4}(P^2 - X^2), \quad T_2 \equiv \frac{1}{4}(XP + PX), \quad T_3 \equiv \frac{1}{4}(P^2 + X^2).$$

Utilizando que $[X, P] = i\hbar$, calcular los conmutadores $[T_1, T_2]$ y $[T_2, T_3]$, expresando el resultado, en ambos casos, como una combinación lineal de T_1, T_2, T_3. Escriba sólo el resultado:

$[T_1, T_2] = -i\hbar T_3$

$[T_2, T_3] = i\hbar T_1$

C3 [20 puntos] Se mide el operador L_z en cada uno de los estados siguientes:

$$\psi_1 = Y_1^1 + Y_1^{-1}, \quad \psi_2 = Y_1^1 + Y_1^{-1} + Y_3^1, \quad \psi_3 = Y_1^1 + Y_1^{-1} + Y_3^1 + Y_3^{-1}.$$

a) Calcular la indeterminación ΔL_z en cada estado. b) La precisión de la medida está relacionada con la indeterminación, como usted sabe. Ordene, pues, de menos a mayor los tres resultados obtenidos, e indique la medida más precisa. Escriba sólo el resultado:

$\Delta_{\psi_1} L_z = \hbar$

$\Delta_{\psi_2} L_z = \frac{2\sqrt{2}}{3}\hbar$

$\Delta_{\psi_3} L_z = \hbar$

El orden es: $\Delta_{\psi_2} L_z < \Delta_{\psi_1} L_z = \Delta_{\psi_3} L_z$

la mejor medida de L_z es en el estado 2

C4 [20 puntos] La función de ondas $\psi(x) = A\, e^{-b^2 x^2}$ corresponde al estado fundamental de un oscilador armónico unidimensioanl. A y b son constantes reales.

a) ¿Qué unidades tiene A y qué unidades tiene b? (le estoy preguntando de qué tienen dimensiones)

b) Determinar la constante A, supuesta real, para que la función esté normalizada.

c) ?'Cuál es el potencvial $V(x)$ en terminos de $\hbar, m$ abd b?

d) ?'Cuál es la energía de este estado? ¿Cuál es la energía del primer estado excitado?

Las unidades de A son $\text{longitud}^{-1/2}$

Las unidades de b son long^{-1}

$A^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, b$

V(x)= $\frac{2\hbar^2 b^4}{m} x^2$

$E_0 = \frac{\hbar^2 b^2}{m}$

$E_1 = \frac{3\hbar^2 b^2}{m}$

P1 [40 puntos] a) Un electrón se halla en el estado fundamental de un pozo infinito de potencial cuyas paredes están en $x = 0$ y $x = a$, siendo a una longitud positiva. Escribir su función de ondas **normalizada**. b) De repente, la pared que está en $x = a$ se mueve hasta $x = 2a$. Se ha hecho tan rápido este cambio de potencial que el electrón no se ha enterado y sigue en el estado descrito en el apartado anterior. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al electrón en el estado fundamental del segundo pozo? c) ¿Y la probabilidad de encontrarlo en el primer estado excitado? Nota: en la pizarra pinto los dos pozos. $\frac{32}{9\pi^2}$; $\frac{1}{2}$

P2 [40 puntos] La función de onda de un electrón en un potencial central es

$$\psi = (e^{i\varphi}\sin\theta + \cos\theta) f(r),$$

donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, f es una función aribtraria y θ, φ son los ángulos polar y azimutal, respectivamente, en las coordenadas esféricas.

a) ¿Qué posibles valores de L_z pueden medirse al electrón? $\hbar, 0$

b) ¿Cuáles son las probabilidades de obtener cada uno de los valores del apartado a)? $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$

c) Calcular el valor medio de L_x en el estado del apartdo b). ¿Hay alguna razón para que coincida con el valor medio de L_y? $\langle L_x \rangle = -\frac{2}{3}\hbar$; $\langle L_y \rangle = 0$

Usted puede necesitar (o no) alguno de los siguientes datos:

$$l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}).$$

En la siguiente lista de armónicos esféricos, θ, φ son los ángulos polar y azimutal, respectivamente, de las coordenadas esféricas. Asterisco significa el complejo conjugado.

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}, \quad Y_1^{-1} = -Y_1^{1*},$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right), \quad Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\varphi}, \quad Y_2^{-1} = -Y_2^{1*},$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\varphi}, \quad Y_2^{-2} = Y_2^{2*}.$$

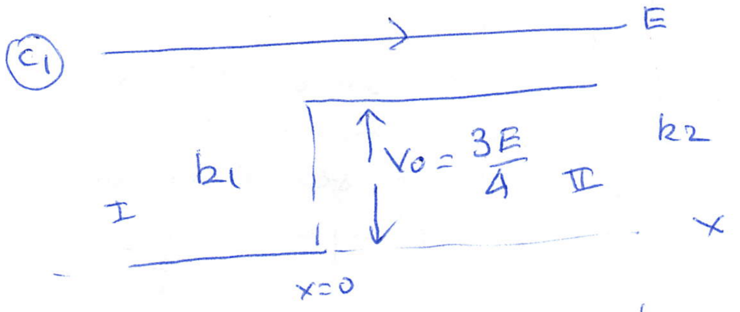
$$L_x = yP_z - zP_y, \quad L_y = zP_x - xP_z, \quad L_z = xP_y - yP_x$$

$$L_+ = L_x + iL_y, \quad L_- = L_x - iL_y.$$

$$L_+ Y_l^m = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\,\hbar\, Y_l^{m+1}, \quad L_- Y_l^m = \sqrt{l(l+1) + m(-m+1)}\,\hbar\, Y_l^{m-1}.$$

Física Cuántica I – Septiembre 2017

(C1)



$$k_1 = +\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad , \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)}$$

here $E - V_0 = E - \frac{3E}{4} = \frac{E}{4}$, or what is equivalent

$$\boxed{k_1 = 2k_2}$$

Se ve desde el principio, faltaría más!!

(remember k_1, k_2 are real and positive quantities by construction).

Wave functions ($k_1 = 2k_2$)

$$\begin{cases} u_1 = A e^{2ik_2 x} + B e^{-2ik_2 x} & x<0 \\ u_2 = C e^{ik_2 x} & x>0 \end{cases}$$

and, as we know, from the lectures,

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 \quad , \quad T = \left|\frac{C}{A}\right| \frac{k_2}{k_1} \rightarrow \frac{1}{2} \; ,$$

with A, B, C obtained from the conditions

$$\begin{cases} u_1(0) = u_2(0) \\ u_1'(0) = u_2'(0) \end{cases}$$

or, the conditions

$$\begin{cases} A + B = C \\ A - B = \frac{C}{2} \end{cases} .$$

From this system,

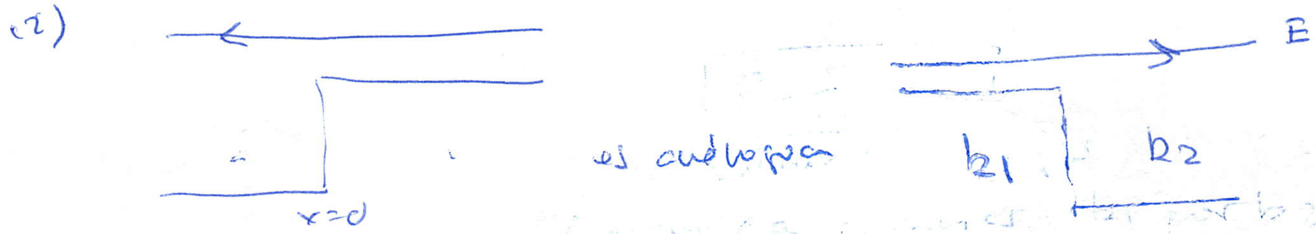
$$\frac{C}{A} = \frac{4}{3} \quad , \quad \frac{B}{A} = \text{not necessary if you know} = \frac{1}{3}$$

and then

$$T = \left|\frac{4}{3}\right|^2 \frac{1}{2} = \frac{8}{9} \quad ,, \quad \boxed{R = \frac{1}{9}}$$

Esto es lo que pregunta el ejercicio, la fracción de partículas reflejadas pues si se lanzan N partículas se reflejan $\frac{N}{9}$.

c2)



Todo queda igual, sólo hay que cambiar al final, ya en R, k1 por k2 ... y no cambia, luego $R = 1/9$.

(c2) $T_1 = \frac{1}{4}(P^2 - x^2)$, $T_2 = \frac{1}{4}(xP + Px)$, $T_3 = \frac{1}{4}(P^2 + x^2)$

Solution: $\boxed{[T_1,T_2] = -i\hbar T_3}$, $\boxed{[T_2,T_3] = i\hbar T_1}$.

a) $[T_1,T_2] = \frac{1}{16}[P^2 - x^2, Px + xP]$

Calculate

$$[P^2,x] \quad , \quad [x^2,P]$$

First:

$$[P^2,x] = P\underbrace{[P,x]}_{-i\hbar} + \underbrace{[P,x]}_{-i\hbar}P = -2i\hbar P,$$

$$[x^2,P] = x[x,P] + [x,P]x = 2i\hbar x.$$

With these two results write (notice that $[T_1,T_2]$ has four terms) the commutators

$$[P^2, xP] = x[P^2,P] + [P^2,x]P = 0 - 2i\hbar P^2$$
$$[P^2, Px] = P[P^2,x] + [P^2,P]x = -2i\hbar P^2 + 0$$
$$[x^2, xP] = x[x^2,P] + [x^2,x]P = 2i\hbar x^2 + 0$$
$$[x^2, Px] = P[x^2,x] + [x^2,P]x = 0 + 2i\hbar x^2$$

and

$$[T_1,T_2] = \frac{1}{16}\left(-4i\hbar P^2 - 4i\hbar x^2\right)$$
$$= -\frac{i\hbar}{4}(P^2+x^2)$$
$$= -i\hbar T_3$$

b) $$[T_3,T_2] = \frac{1}{16}[P^2+x^2, xP+Px]$$
$$= -\frac{i\hbar}{4}(P^2-x^2)$$

previous results $= -i\hbar T_1$.

C3

a) $$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1^1 + Y_1^{-1})$$

siempre, siempre, siempre, siempre, hay que normalizar para calcular valores medios (excepto si sale cero el valor medio).

$$\Delta L_z = \sqrt{\langle L_z^2\rangle - \langle L_z\rangle^2}$$

ψ_1 normalized

$$\langle L_z\rangle = \frac{1}{2}[1-1] = 0, \qquad \langle L_z^2\rangle = \frac{\hbar^2}{2}[1+1] = \hbar^2$$

$$\boxed{\Delta_{\psi_1} L_z = \hbar}$$

b) $$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(Y_1^1 + Y_1^{-1} + Y_3^1)$$

$$\langle L_z\rangle = \frac{\hbar}{3}(1-1+1) = \frac{\hbar}{3}, \qquad \langle L_z^2\rangle = \frac{\hbar^2}{3}(1+1+1) = \hbar^2$$

$$\boxed{\Delta_{\psi_2} L_z = \frac{2\sqrt{2}}{3}\hbar}$$

c) $$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{4}}(Y_1^1 + Y_1^{-1} + Y_3^1 + Y_3^{-1})$$

$$\langle L_z\rangle = 0 \qquad \langle L_z^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4}(1+1+1+1) = \hbar^2$$

$$\boxed{\Delta_{\psi_3} L_z = \hbar}$$

Since

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} < 1 = 1$$

$\downarrow$

En ψ_2 secuide L_z conuenos dispersión $\equiv$ mejor medida.

(c4) $\boxed{A \text{ es } L^{-1/2}}$, $\boxed{b \text{ es } L^{-1}}$ L de longitud.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{dx}_{\text{longitud}} \underbrace{|A|^2}_{\text{longitud}^{-1}} \underbrace{e^{-2b^2x^2}}_{\text{sin dimensiones}}$$

"$\int$" resume suma, no cuenta para dimensiones.

1: sin dimensiones

$-\infty$: no cuenta.

sin dimensiones : los exp no tienen dimensiones.

[luego $A = L^{-1/2}$]

$$\boxed{|A|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, b}$$

Hay que saber que $\int_0^{\infty} dx\, e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ [sale pasando a polares, como vimos en clase] para obtener $|A|^2$. Cambio variable : $\eta = \sqrt{2}\, bx$.

$$\boxed{\text{Potencial: } V(x) = \frac{2\hbar^2 b^4}{m} x^2 \qquad E_0 = \frac{\hbar^2 b^2}{m}, \quad E_1 = \frac{3\hbar^2 b^2}{m}}$$

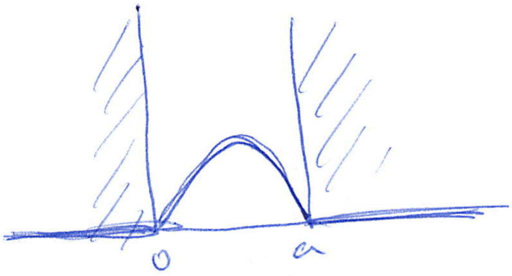
Dice que se trata de un oscilador armónico: lo dice y lo sabemos: reconocemos la función del estado fundamental, la Gaussiana. $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$. Seguimos con: con $H\psi = E\psi$.

$\psi = Ae^{-b^2x^2}$, $\psi_x = \psi[-2b^2x]$, $\psi_{xx} = \psi[4b^4x^2 - 2b^2]$

$$H\psi = \psi\left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\cancel{4b^4x^2} - 2b^2) + \cancel{\tfrac{1}{2}m\omega^2x^2}\right] = \frac{\hbar^2 b^2}{m}\psi$$

if $\omega = \frac{2\hbar b^2}{m}$,, E_0 ,, $\frac{\hbar\omega}{2}$

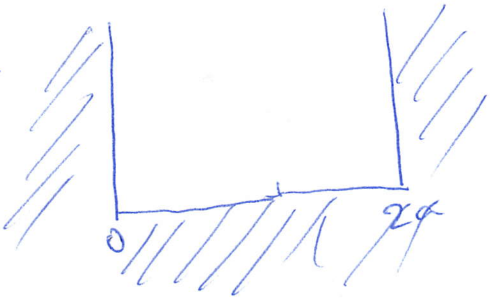
$E_1 = \hbar\omega\, 3/2$



La función de onda del electrón es

$$u = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} & x \in [0,a] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

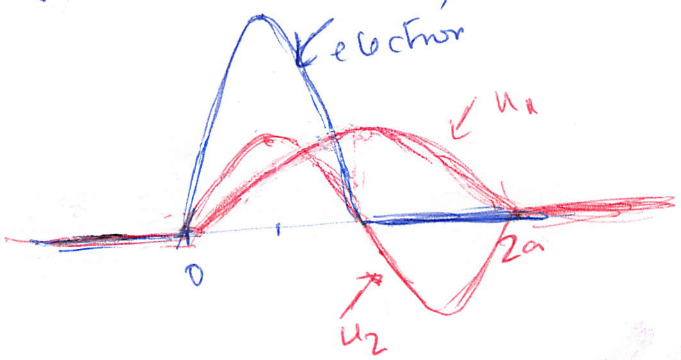
nueva caja



$u_1 \equiv$ ground state de la nueva caja $= \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \frac{\pi x}{2a} & \text{si } x \in [0,2a] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

$u_2 \equiv$ first excited state $= \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} & \text{si } x \in [0,2a] \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}$

compare funciones donde gráficamente...



i) Probabilidad de encontrar al electrón en u_1 : $\left|\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\right|^2 \approx 0.36$

ii) Prob encontrar al electrón en u_2 : $\frac{1}{2} = 0.5$: obviamente, mayor ya

[u_2 se parece más a u que lo que se parece u_1]

i) According to a postulate of QM:

$$\langle u|u_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^a dx \, \sin\frac{\pi x}{a}\,\sin\frac{\pi x}{2a}$$

$\int_0^a$ because u is zero outside $[0,a]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$$= \frac{\sqrt{2}}{a}\cdot\frac{1}{2}\int_0^a dx\left[\cos\left(\frac{\pi}{a}-\frac{\pi}{2a}\right)x - \cos\left(\frac{\pi}{a}+\frac{\pi}{2a}\right)x\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2a}\int_0^a dx\left[\cos\frac{\pi x}{2a} - \cos\frac{3\pi}{2a}x\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2a}}\frac{\cancel{2a}}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{2a} - \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2a}\right]_0^a$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} = \sqrt{0.3602530\ldots}$$

$\Rightarrow$ probability is $|\langle u|u_1\rangle|^2 = \frac{32}{9\pi^2} = 0.3602\ldots$

ii) $$\langle u|u_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^a dx\,\underbrace{\sin^2\frac{\pi}{a}x}_{=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi x}{a}}$$

$\to 0$ the integral

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow$ probability is $|\langle u|u_2\rangle|^2 = \frac{1}{2} = 0.5$

<u>Comment</u>: not for the exam. If the energy of the particle is measured immediately after the box changes from $x=a$ to $x=2a$ is observed:

E_1 of the <u>new</u> box with probability $\frac{32}{9\pi^2}$

E_2 " <u>"</u> " " $\frac{1}{2}$

or

$$\underbrace{\frac{32}{9\pi^2}E_1 + \frac{1}{2}E_2}_{\text{sellounall cell fo do... } 86\%} + \ldots\ldots$$

rest ... with $u_3, u_4, u_5, \ldots$

(P2)

$$\psi = (e^{i\phi}\sin\theta + \cos\theta) f(r)$$

a) The state is "basically" (talking about rotations) $e^{i\phi}\sin\theta + \cos\theta$

$e^{i\phi}\sin\theta$ → this 1 indicates that Y^1

$e^{0\phi}\cos\theta$ → this 0 indicates that Y^0

The possible values of L_z on the state ψ are

$\hbar$, 0.

exclusively.

b) The state is basically $\psi \sim x+iy+z$, so we have to read the list of harmonics with a 1 (polynomials of order 1) in Y_1 the downstair index.

The list says that

$$e^{i\phi}\sin\theta = -\frac{\sqrt{8\pi}}{\sqrt{3}} Y_1^1$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{3}} Y_1^0$$

$$\psi = \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{3}} \left(-\sqrt{2}\, Y_1^1 + Y_1^0\right) f(r)$$

$$\boxed{\psi_{\text{normalized (rotations only)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{2}\, Y_1^1 + Y_1^0\right)}$$

= angular part

Prob measure $\hbar$: $\frac{2}{3}$

prob measure 0 : $\frac{1}{3}$

c) $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$, $L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)$

$L_+ Y_1^1 = 0$, $L_+ Y_1^0 = \sqrt{2}\hbar Y_1^1$,

$L_- Y_1^1 = \sqrt{2}\hbar Y_1^0$, $L_- Y_1^0 = \sqrt{2}\hbar Y_1^{-1}$.

$$L_+\psi = \frac{\hbar}{\sqrt{3}}\sqrt{2}\,Y_1^1$$

$$L_-\psi = \frac{\hbar}{\sqrt{3}}\left(-2Y_1^0 + \sqrt{2}\,Y_1^{-1}\right)$$

$$L_x\psi = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)\psi = \frac{\hbar}{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\,Y_1^1 - 2Y_1^0 + \sqrt{2}\,Y_1^{-1}\right)$$

$$L_y\psi = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)\psi = \frac{\hbar}{i2\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\,Y_1^1 + 2Y_1^0 - \sqrt{2}\,Y_1^{-1}\right),$$

$$\langle L_x\rangle = \frac{\hbar}{2\cdot 3}\langle -\sqrt{2}\,Y_1^1 + Y_1^0 \,|\, \sqrt{2}\,Y_1^1 - 2Y_1^0 + \sqrt{2}\,Y_1^{-1}\rangle = -\frac{2\hbar}{3}$$

$$\langle L_y\rangle = \frac{\hbar}{i2\cdot 3}\langle -\sqrt{2}\,Y_1^1 + Y_1^0 \,|\, \sqrt{2}\,Y_1^1 + 2Y_1^0 - \sqrt{2}\,Y_1^{-1}\rangle = [\ldots](-2+2) = 0$$

conclusion:

$$\boxed{\langle L_x\rangle_\psi = -\frac{2}{3}\hbar, \quad \langle L_y\rangle_\psi = 0}$$

There is no relation (not in this case where $\psi \sim x+iy+z$) between $\langle L_x\rangle$ and $\langle L_y\rangle$.

last thing: $\langle \vec{L}\rangle_\psi = \frac{2\hbar}{3}(-1, 0, 1)$

Nota de enfado: Leo una y otra vez la siguiente tontería: "Aquí $\langle L_x\rangle_\psi = \langle L_y\rangle_\psi = 0$ porque sobre estados propios de L_z esta relación es verdad".

Cierto como la vida misma. La tontería es que nuestro ψ no es un estado propio de L_z, sino una combinación lineal de propios de L_z, que no tiene por qué ser (como aquí) propio de L_z.

Álgebra de 1º ... de la básica

Y no me lo digan más!!!!!!!!!!