UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA I

Abril-Junio MJRPlaza

Física Cuántica I – Exámenes

Página web de la asignatura: http://teorica/ft8/problemas.html

Las soluciones se encuentran en algún lugar visible de la página web de la asignatura.

1. [Jun2013] Una partícula de masa m se halla en el pozo de potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0, & -a/2 < x < a/2, \\ V_0, & |x| > a/2 \end{cases}$$

donde V_0 es una constante positiva. La partícula tiene un solo estado ligado de energía $E = V_0/2$. Calcular la probabilidad de encontrar a la partícula en la región i) clásicamente permitida, ii) clásicamente prohibida.

Nota: Utilice la condición $E = V_0/2$ desde el principio pues **simplifica considerablemente** los cálculos. El pozo va de $-a/2$ a $a/2$ para que usted imponga una paridad definida a la función de onda. Los resultados pedidos son **números**.

2. [Jun2013] El oscilador armónico isótropo en 2 dimensiones tiene hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2\,m}(P_x^2 + P_y^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2),$$

siendo los estados estacionarios de la forma $X(x)Y(y)$ y los niveles de energía igual a $E = (n_x + n_y + 1)\,\hbar\omega$, con n_x, n_y enteros no negativos.

i) ¿Cuántos estados linealmente independientes tienen energía $E = (N + 1)\,\hbar\omega$?

ii) Igual que hicimos en clase, pruebe que el hamiltoniano es invariante bajo rotaciones en torno a un eje perpendicular al plano xy (el eje z) porque después de la rotación **se sigue cumpliendo** la ecuación de Schrödinger.

Alternativa importante: Sólo si el párrafo anterior no le resulta familiar, calcule el conmutador de H con $L_z = -i\hbar(x\,\partial_y - y\,\partial_x)$.

iii) Encuentre una combinación lineal de los estados de energía $E = 2\,\hbar\omega$ que sea propia de L_z con valor propio $\hbar$ y otra con valor propio $-\hbar$.

Para hacer 1, 2 usted puede necesitar (o no) alguno de los siguientes datos:

La integral del cuadrado de un seno o del cuadrado de un coseno se calcula pasando al ángulo doble. En las fórmulas siguientes, l es la longitud natural de un oscilador armónico, u_n el enésimo autoestado en una dimensión, $H_n(x)$ los polinomios de Hermite y c_n constantes de normalización. Muchos libros utilizan la constante $\alpha = 1/l$ en lugar de l.

$$l = \sqrt{\hbar/m\omega}, \quad u_n(x) = c_n\, H_n\left(\frac{x}{l}\right) e^{-x^2/2\,l^2}, \quad H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2.$$

3. [Sep2013] Una partícula de masa m se halla en el pozo de potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0, & -a/2 < x < a/2, \\ V_0, & |x| > a/2 \end{cases}$$

donde V_0 es una constante positiva. La partícula se encuentra en el primer estado excitado y tiene energía $E = V_0/2$. Calcular la probabilidad de encontrar a la particula en la región i) clásicamente permitida, ii) clásicamente prohibida.

Nota: Utilice la condición $E = V_0/2$ desde el principio pues **simplifica considerablemente** los cálculos. El pozo va de $-a/2$ a $a/2$ para que usted imponga una paridad definida a la función de onda. Los resultados pedidos son **números**.

4. [Sep2013] La función de onda de una partícula en un potencial central es

$$\psi = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2} \right) + \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{xz}{r^2},$$

donde $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. a) Expresar el estado ψ como combinación lineal de armónicos esféricos (ver datos al final de los enunciados). b) Calcular $\mathbf{L}^2|\psi\rangle$ y $L_z|\psi\rangle$, así como los valores esperados $\langle \mathbf{L}^2 \rangle_\psi$ y $\langle L_z \rangle_\psi$. c) Sabiendo que

$$L_+ Y_l^m = \hbar \sqrt{(l-m)(l+m+1)}\, Y_l^{m+1},$$

calcular $\langle \psi | L_+ | \psi \rangle$.

Usted puede necesitar **algunos** de los siguientes datos:

La integral del cuadrado de un seno o del cuadrado de un coseno se calcula pasando al ángulo doble. En la siguiente lista de armónicos esféricos, θ, φ son los ángulos polar y azimutal, respectivamente, de las coordenadas esféricas. Asterisco significa el complejo conjugado.

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \quad Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{i\varphi}, \quad Y_1^{-1} = -Y_1^{1*},$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2} \right), \quad Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta\, e^{i\varphi}, \quad Y_2^{-1} = -Y_2^{1*},$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta\, e^{2i\varphi}, \quad Y_2^{-2} = Y_2^{2*}.$$