UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA I

FEBRERO-JUNIO DE 2005

Cálculo II

http://teorica.fis.ucm.es/docenteft1.html

GEOMETRÍA DEL ESPACIO EUCLÍDEO

1. [M&T] Describir el significado geómetrico de la siguiente transformación en coordenadas cilíndricas: (a) $(\rho, \phi, z) \to (\rho, \phi+\pi, -z)$. Y de las transformaciones: (b) $(r, \theta, \phi) \to (r, \theta, \phi+\pi)$, (c) $(r, \theta, \phi) \to (r, \pi - \theta, \phi)$, (d) $(r, \theta, \phi) \to (2r, \theta, \phi + \pi/2)$ en coordenadas esféricas.

2. Expresar los vectores $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\phi$ en términos de $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

3. Demostrar que la distancia entre dos rectas no paralelas $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{v} + t\mathbf{a}$ y $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{w} + t\mathbf{b}$ está dada por
$$d = \frac{|(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}.$$

4. [M&T] Encontrar una ecuación para el plano que (i) pasa por $(2, -1, 3)$ y es perpendicular a la recta $\mathbf{v} = (1, -2, 2) + t(3, -2, 4)$; (ii) contiene a las rectas $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -2) + t(2, 3, -1)$ y $\mathbf{v}_2 = (2, -1, 0) + t(2, 3, -1)$. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(1, -2, -3)$ y es perpendicular al plano $3x - y - 2z + 4 = 0$.

5. Considérese el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Obtener y describir las curvas (cónicas) obtenidas como lugar geométrico de la intersección del cono con los planos:
   (a) Plano horizontal $z = c$
   (b) Plano vertical $y = c$
   (c) Plano inclinado paralelo a la generatriz $z = y + c$
   (d) Plano inclinado $az + by = c$ donde $a > b$

6. Dibujar las curvas de nivel y las gráficas de las siguientes funciones indicando además el dominio y la imagen en cada caso (a, b, c, p y q son constantes positivas):
   (a) $f(x, y) = x + y - 1$
   (b) $f(x, y) = c\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$
   (c) $f(x, y) = c\sqrt{x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1}$
   (d) $f(x, y) = c\sqrt{x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1}$
   (e) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q}$.

   [*Problemas propuestos:* $f(x, y) = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q}$ *y* $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}}$].

LÍMITES Y CONTINUIDAD

7. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:
   (a) $f(x,y) = x \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}$ cuando $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$
   (b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ cuando $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

8. Hallar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones: (a) $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ y (b) $z = \cos\dfrac{y}{x}$.

9. Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definida por $f(x,y) = \left(\dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}, \sin(x+y)\right)$ cuando $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = (0,0)$.

10. Estudiar la existencia y calcular en su caso los siguientes límites
    (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+\sin^2 x)\ \tan y}{(1-\cos\sqrt{y})\ \arcsin x^2}$ si $y > 0$
    (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+x)}{e^y-1}$ si $1+x>0$, $y \neq 0$.

11. ¿Para qué valores positivos de α, β y γ puede ser continua la función $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2+y^2)^\gamma}$ en el punto $(0,0)$? ¿Cuánto ha de valer en $(0,0)$?

12. Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, y si existen dos límites $\lim_{x\to a} f(x,y)$ y $\lim_{y\to b} f(x,y)$, demostrar que $\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)) = \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y)) = L$.

13. Encontrar ejemplos de funciones $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tales que
    (a) $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ y $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ existan ambos y sean distintos
    (b) $f(x,y)$ es continua a lo largo de cada recta que corta al origen pero no es continua en $(0,0)$.

DIFERENCIACIÓN

14. La ecuación
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$
se llama *ecuación de Laplace* y sus soluciones $f(x,y)$ se denominan *funciones armónicas.* ¿Cuáles de las siguientes funciones son armónicas?
    (a) $x^2 - y^2$ (b) $\sin x \cosh y$ (c) $e^x \sin y$

15. Si $u = f(x-ct) + g(x+ct)$, donde f y g son funciones arbitrarias derivables dos veces, demostrar que
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$
Esta ecuación en derivadas parciales es la *ecuación de ondas* en una dimensión.

Comentario: La ecuación de ondas en tres dimensiones es $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-\frac{1}{c^2}u_{tt} = 0$. Comprobar que $u = \dfrac{1}{r}(f(r-ct)+g(r+ct))$, donde $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, es solución de esta ecuación.

Nótese el factor $1/r$ que aparece en la solución porque es importante en física.

16. Comprobar que la *fórmula de D'Alambert*
$$u = \frac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} ds\, g(s),$$
donde f y g son derivables (f tiene que serlo dos veces por lo menos), satisface la ecuación de ondas en una dimensión con condiciones iniciales $u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=g(x)$.

17. [M&T, pg 161] La ecuación en derivadas parciales
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
es la ecuación de Korteweg-de Vries (abreviadamente ecuación KdV). Demostrar que para cualquier valor positivo de la constante c, la función
$$u(x,t) = 3c\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\right]$$
es una solución de la ecuación KdV.

18. Considérese la función $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ con $f(0,0)=0$. Si $(x,y)\neq(0,0)$ evalúese f_x y f_y. Demostrar que $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, $f_{xy}(0,0)=-1$ y $f_{yx}(0,0)=1$. ¿Por qué las derivadas cruzadas no coinciden en $(0,0)$?

19. Sea la función $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ definida por $f(x,y)=\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$ cuando $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(0,0)=0$. ¿En qué puntos del plano existen las derivadas parciales de f con respecto a x e y? ¿En qué puntos del plano es diferenciable la función?

20. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z=x^2+y^3$ en el punto $(3,1,10)$.

21. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $(x-1)^2+(y-2)^2+2z^2=1$ en el punto $(3/2,2,\sqrt{6}/4)$.

22. Sea la ecuación en derivadas parciales $y^2u_{yy}-x^2u_{xx}=0$. Utilizando la regla de la cadena escribir dicha ecuación en función de unas nuevas variables $s=xy$, $t=x/y$.

23. Demostrar que la función $u(x,t)=f(xy)+\sqrt{xy}\,g\left(\frac{x}{y}\right)$ donde f y g son funciones de clase C^2 (es decir, dos veces diferenciables con continuidad) satisface la ecuación $y^2u_{yy}-x^2u_{xx}=0$

24. (a) Expresar el operador ∇^2 bidimensional en coordenadas polares y una vez obtenido calcular como aplicación práctica $\boldsymbol{\nabla} f$ y $\nabla^2 f$ para $f(r,\theta)=r\cos^3\theta$ en el punto $(x,y)=(1,1)$ (en coordenadas polares este punto es el $(\sqrt{2},\pi/4)$). (b) Expresar el operador ∇^2 tridimensional en coordenadas cilíndricas y esféricas.

25. Calcular el gradiente de $f(x,y,z)$ dada por

    (a) $1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (b) $xy+yz+zx$ (c) $1/(x^2+y^2+z^2)$

    ¿Cuál es la dirección de más rápido crecimiento de cada función en el punto $(1,1,1)$?.

26. Determinar las constantes a, b y c de manera que la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en el punto $(1, 2, -1)$ sea máxima en la dirección del vector $(0, 0, 1)$ y tenga como valor 64.

27. Una partícula se mueve siguiendo la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ donde t denota el tiempo. Hallar los vectores velocidad y aceleración así como sus módulos en cada instante de tiempo. Si en el instante $t = \pi$ la partícula abandonara esta trayectoria y pasara a moverse libremente, ¿qué posición ocuparía en el instante $t = 2\pi$?

28. (a) Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xye^z\mathbf{i} + x^2e^z\mathbf{j} + (x^2ye^z + z^2)\mathbf{k}$. Encontrar $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}$ y $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$. ¿Existe alguna función f tal que $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f$? En caso afirmativo calcúlese tal función discutiendo si es única. (b) ¿Existen campos vectoriales $\mathbf{F}$ tales que $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$? En caso afirmativo calcule uno de ellos.

29. Sea $\mathbf{r} = (x, y, z)$ con módulo $r = \|\mathbf{r}\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Calcular $\boldsymbol{\nabla}(1/r)$, $\boldsymbol{\nabla}(\ln r)$, $\nabla^2(1/r)$ y $\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{r}/r^3)$ si $r \neq 0$. Calcular también $\boldsymbol{\nabla}(r^n)$, $\nabla^2(r^n)$, $\boldsymbol{\nabla}(r^n\mathbf{r})$ y $\boldsymbol{\nabla}\times(r^n\mathbf{r})$ cuando $n = 0, 1, 2 \ldots$.

30. Demostrar que

$$\begin{aligned} &\text{rot rot}\,\mathbf{g} = \text{grad div}\,\mathbf{g} - \nabla^2\mathbf{g}, \\ &\text{rot}\, f\mathbf{g} = f\text{rot}\,\mathbf{g} + \boldsymbol{\nabla} f \times \mathbf{g}, \\ &\text{div}\, f\mathbf{g} = f\text{div}\,\mathbf{g} + \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\nabla} f, \end{aligned}$$

y comprobarlo con los campos $\mathbf{g}(x, y, z) = (x^2, 1, y^2)$, $f(x, y, x) = z$.

FÓRMULA DE TAYLOR Y EXTREMOS

31. Desarrollar las siguientes funciones en serie de Taylor:
    (a) $f(x, y) = (x + y)^2$ en torno a $(0, 0)$ a tercer orden
    (b) $f(x, y) = (x + y)^2$ en torno a $(1, 2)$ a tercer orden
    (c) $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2)$ en torno a $(0, 0)$ a cuarto orden
    (d) $f(x, y) = e^{x+y} \cos(x + y)$ en torno a $(0, 0)$ a segundo orden

32. Escribir los dos primeros términos del desarrollo de Taylor de la función

$$F(x, y) = \int_0^1 dt\, (1 + x)^{t^2 y}$$

en el entorno de (0,0).

33. Encontrar los máximos y mínimos locales de las siguientes funciones:
    (a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ (b) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

34. Determinar el valor del máximo absoluto y del mínimo absoluto de la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

35. Hallar un punto interior a un triángulo tal que la suma de los cuadrados de las distancias a los tres vértices sea mínima.

FUNCIÓN IMPLÍCITA

36. [M&T, pg 287] Demostrar que en un entorno del punto $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ las ecuaciones

$$\begin{aligned} xu + yvu^2 &= 2 \\ xu^3 + y^2v^4 &= 2, \end{aligned}$$

definen de manera única u y v como funciones de x e y. Calcular además $(\partial u/\partial x)(1, 1)$.

37. [M&T, pg 144] Si $f(x, y, z) = 0$, entonces $(\partial z/\partial y)(\partial y/\partial x)(\partial x/\partial z) = -1$ (no $+1$!). Precisar el significado de esta afirmación y determinar cuando puede enunciarse.

Sugerencia: Después de hacer este ejercicio pueden hacerse como aplicación a la termodinámica los números 19 de [M&T, pg 144], y 51 y 53 de [M&T, pg 187].

38. Probar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} xy^2 + xzu + yu^2 &= 3 \\ u^3yz + 2xv - 2u^2v^2 &= 1 \end{aligned}$$

define funciones $u(x, y, z)$ y $v(x, y, z)$ en un entorno de $(x_0, y_0, z_0; u_0, v_0) = (1, 1, 1; 1, 1)$ y obtener $\partial v/\partial y$ y $\partial^2 v/\partial y^2$ en el punto $(1, 1, 1)$.

39. Dadas las ecuaciones

$$\begin{aligned} u + v &= x + y \\ y \sin u &= x \sin v, \end{aligned}$$

demostrar que definen funciones implícitas $u(x, y)$ y $v(x, y)$ en el entorno del punto $(x, y, u, v) = (\pi/4, \pi/4, \pi/4, \pi/4)$ y averiguar los valores que deben tomar los parámetros α, β y γ para que exista el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(\pi/4,\pi/4)} \frac{\pi u(x, y) - \pi v(x, y) + \alpha + \beta x + \gamma y}{\sqrt{(x - \pi/4)^2 + (y - \pi/4)^2}}.$$

EXTREMOS CONDICIONADOS

40. Encontrar los extremos de las siguientes funciones con las restricciones que se indican:

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ con $x^2 + y^2 = 1$ (b) $f(x, y) = 3x + 2y$ con la condición $2x^2 + 3y^2 = 3$.

Comentario: (a) está resuelto en el libro [M&T, pg 268], (b) [M&T, pg 278].

41. Calcular la distancia máxima y mínima del origen de coordenadas a la elipse $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

42. [M&T, pg 271] Obtener los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y, z) = x + y + z$ sujeta a las condiciones $x^2 + y^2 = 2$ y $x + z = 1$.x

43. Inscribir en un cono circular recto de altura h y cuya generatriz forma un ángulo α con el eje z el paralepípedo recto de volumen máximo. ¿Cuáles son los lados del paralepípedo? Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange.

44. Calcular las integrales dobles de las f que se dan en los recintos D que se indican:

   (a) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-2}$ y $D = [1,2] \times [0,1]$
   (b) $f(x,y) = e^{x-y}$ y D el cuadrilátero de vértices $(0,0),(2,2),(0,2)$ y $(-1,0)$
   (c) $f(x,y) = x^3$ y D el círculo unidad
   (d) $f(x,y) = y/(x^2+y^2)$ y D la parte del círculo $x^2+(y-1)^2 \leq 1$ con $y \geq 1$
   (e) $f(x,y) = (1+e^{2y})^{1/2}$ y $D = \{0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq 2\}$
   (f) $f(x,y) = x$ y D el triángulo de vértices $(0,0),(2,5)$ y $(-3,7)$.

45. Sea $Q = [1,2] \times [3,4]$ y sea S su imagen bajo la aplicación $(u,v) \to (x,y)$ dada por $x = u^{1/3}v^{2/3}, y = u^{2/3}v^{1/3}$. Calcular el área de S.

46. Sea B la región del primer cuadrante acotada por las curvas $xy = 1, xy = 3, x^2-y^2 = 1$ y $x^2-y^2 = 4$. Calcular $\iint_B dxdy\,(x^2+y^2)$.

47. Usando integrales dobles calcule el área de una elipse de semiejes a y b.

48. Hallar las coordenadas del *centro de gravedad* de

   (a) el primer arco de la cicloide $x = a\,(t-\sin t), y = a\,(1-\cos t)$.
   (b) las figuras limitadas por $\{0 \leq y \leq \sin^2 x, 0 \leq x \leq \pi\}$ y por $\{\sqrt{x}+\sqrt{y} = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

49. Calcular los *momentos de inercia* respecto a los dos ejes de una lámina situada en $0 \leq y \leq \sqrt{2x}, 0 \leq x \leq 2$ de densidad $\rho(x,y) = |x-y|$.

   [*Problema propuesto*: Calcular el momento de inercia respecto del eje y de una placa circular de densidad constante cuyo borde es la circunferencia $(x-3)^2+y^2 = 9$. *Solución*: $\frac{405}{4}\pi\rho$, ρ la densidad de la placa]

50. Calcular el volumen de un sólido acotado por el plano xz, el plano yz, el plano xy, los planos $x = 1$ e $y = 1$, y la superficie $z = x^2+y^4$.

51. Evaluar $\int_W dV\,x^2\cos z$ donde W es la región acotada por los planos $z = 0, z = \pi, y = 0, y = \pi, x = 0$ y $x+y = 1$.

52. Calcule el volumen de un elipsoide de semiejes a, b y c.

53. Calcular $\int_D dV\;\exp\,(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$, donde D es la esfera unidad en $\mathbf{R}^3$. *Solución*: $\frac{4}{3}\pi(e-1)$

54. Calcular $\int_W dxdydz\,(2x+3y+z)$ donde $W = [1,2] \times [-1,1] \times [0,1]$.

55. [M&T, pg 410] Integrales sobre dominios no acotados. Usando el cambio a coordenadas polares en

$$\left(\int_0^\infty dx\,e^{-x^2}\right)^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty dxdy\,e^{-x^2-y^2},$$

   demostrar que $\int_0^\infty dx\,e^{-x^2} = \sqrt{\pi}/2$.

56. Integrales impropias. Calcular $\int_M dxdy\,(x^2+y^2)^{-1/2}$ donde $M=[-1,1]\times[-1,1]$.

INTEGRALES DE LÍNEA

57. Hallar la longitud de las curvasx
    (a) $x=t^2$, $y=t^3, t\in[0,1]$
    (b) $x=|t|$, $y=|t-\frac{1}{2}|, t\in[-1,1]$
    (c) $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t), t\in[0,2\pi], a>0$ (cardioide)
    (d) $y=x^{2/3}, x\in[1,8]$
    (e) $r=a\,\theta, a>0, \theta\in[0,2\pi]$ (espiral de Arquímedes)

58. [M&T, pg 417] La base de una valla en el primer cuadrante is el camino $\boldsymbol{\sigma}: t\to(30\cos^3 t, 30\sin^3 t), t\in[0,\pi/2]$ y la altura en el punto (x,y) es $f(x,y)=1+y/3$. Comprobar que el área de la valla es 225. (Recuérdese que el área viene dada por $\int_{\boldsymbol{\sigma}} f(x,y)\,ds$, donde s es la longitud del arco)

59. [M&T, pg 418] Evaluar las siguientes *path integrals* $\int_{\boldsymbol{\sigma}} f(x,y,z)\,ds$ donde
    (a) $f(x,y,z)=\exp\sqrt{z}$ y $\boldsymbol{\sigma}: t\to(1,2,t^2), t\in[0,1]$
    (b) $f(x,y,z)=yz$ y $\boldsymbol{\sigma}: t\to(t,3t,2t), t\in[1,3]$
    (c) $f(x,y,z)=(x+y)/(y+z)$ y $\boldsymbol{\sigma}: t\to(t,\frac{2}{3}t^{3/2},t), t\in[1,2]$

60. Hallar la integral de línea $\int_{C_i}(x^2+y^2)\,dx+dy$ donde cada C_i es la curva orientada dada por $C_1: y=x^2, 0\leq x\leq 1$, $C_2: y=1/2, 1\leq x\leq 2$ y $C_3: x=2, 0\leq y\leq 1/2$.

61. [M&T, pg 436] Sea la fuerza $\mathbf{F}(x,y,z)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. Calcular el trabajo realizado para mover una partícula a lo largo de la parábola $y=x^2, z=0$ de $x=-1$ a $x=2$.

62. [M&T, pg 438] Evaluar $\int_C 2xyz\,dx+x^2z\,dy+x^2y\,dz$, donde C es una curva simple orientada que conecta el punto $(1,1,1)$ con el $(1,2,4)$.

63. Calcular la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y)=(xy,0)$ entre $(-1,0)$ y $(1,0)$ a lo largo de (a) el eje x, (b) la parábola $y=1-x^2$, (c) la línea quebrada $y=|x|-1$ y (d) la parte inferior de la circunferencia $x^2+y^2=1$. ¿Es $\mathbf{F}$ gradiente de algún campo escalar?

64. [M&T, pg 419] Encontrar la masa de un alambre que sigue la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ con el plano $x+y+z=0$ si la densidad en cada punto (x,y,z) del alambre está dada por $\rho(x,y,z)=x^2$ gramos por unidad de longitud.

    Ayuda: Determinar primero geométricamente (i.e., visualmente) la forma del alambre: es una ... centrada en ... y contenida en el plano $x+y+z=0$. Después parametrizar esta curva. En el libro M&T viene muy bien parametrizada, quiero decir, que de todas las posibles parametrizaciones que se le ocurren a uno, la del libro es simple y atinada.

INTEGRALES DE SUPERFICIE

65. [M&T, pg 447, 448] Encontrar la ecuación del plano tangente a cada superficie en el punto indicado

(a) $x = u^2$, $y = u \sin e^v$, $z = \frac{1}{3} u \cos e^v$ en $(13, -2, 1)$

(b) $z = 3x^2 + 8xy, x = 1, y = 0$

(c) $x^3 + 3xy + z^2 = 2, x = 1, y = 1/3, z = 0$

66. [M&T, pg 446, 448] Encontrar una parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$. Encontrar una expresión del vector unitario normal a esta superficie en cada punto.

67. Calcule el área de la región de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ limitada por su intersección con $x^2 + y^2 - x = 0$.

68. [M&T, pg 461] Un toro (i.e., un *donuts*) se puede representar paramétricamente por la función $\mathbf{\Phi} : D \to \mathbf{R}^3$, donde $\mathbf{\Phi}$ está dada por las coordenadas $x = (R + \cos\phi)\cos\theta, y = (R + \cos\phi)\sin\theta, z = \sin\phi$; D es el rectángulo $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, es decir $0 \leq \theta, \phi \leq 2\pi$, y $R > 1$ es una constante (ver el dibujo en el libro *Vector Calculus* de Marsden&Tromba si se desea). Demostrar que el área del toro es $4\pi^2 R$.

69. Sea S la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$ comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = 3$, y sea $\mathbf{f}(x, y, z) = (xz, yz, 2)$. Calcular la integral de superficie de $\mathbf{f}$ sobre S.

TEOREMAS DE GREEN, GAUSS Y STOKES

70. Calcular directamente y mediante el teorema de Stokes la integral de superficie de $\operatorname{rot}\mathbf{f}$ sobre S donde:

(a) $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, z, x)$ y S es la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$

(b) $\mathbf{f}(x, y, z) = (yz, e^y, 1)$ y S es el triángulo determinado por los puntos $(0, 0, 0), (0, 1, 0)$ y $(-1, 1, 1)$

71. Sea R la superficie limitada por la curva

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, -2 - t) & \text{si } t \in [-2, 0] \\ (2\sin t, -2\cos t) & \text{si } t \in [0, 3\pi/2] \end{cases}$$

y sean $P(x, y) = x + y^3, Q(x, y) = x - x^3$. Comprobar que se cumple el teorema de Green para $\mathbf{f} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$.

72. [M&T, pg 496] El teorema de Green es muy útil porque relaciona una integral de línea a lo largo del contorno de una región con una integral de superficie sobre el interior de la región, y en muchos casos es más fácil evaluar la integral de línea que la de superficie. Un ejemplo es el siguiente: Calcule el área de la región encerrada por la hipocicloide definida por $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ usando la parametrización

$$x = a\cos^3\theta, \quad y = a\sin^3\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

73. Sea S la superficie del cubo unidad $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, y sea $\mathbf{f} = (x^2, y^2, z^2)$. Comprobar el teorema de la divergencia calculando

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{f}\, dxdydz \quad \text{y} \quad \iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

74. [M&T, pg 485, 542] Calcule el flujo de $\mathbf{G}(x, y, z) = (3xy^2, 3x^2y, z^3)$ hacia el exterior de la esfera unidad.

EXAMEN de JUNIO de 2005

75. Sea la superficie S de ecuación $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$. Obtenga: (a) la ecuación del plano tangente en el punto $(1/2, 1/2, 1/2)$, (b) la ecuación de la recta que pasa por dicho punto y es normal al plano tangente. *Solución*: Plano tangente: $x + 2y + z - 2 = 0$. Recta pedida: $x = 1/2 + t, y = 1/2 + 2t, z = 1/2 + t$

76. Considérese la función $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida del siguiente modo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{x^2+y^2}, & \text{if } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

donde $n = 1, 2, 3, \ldots$. Estúdiese en $\mathbf{R}^2$: (a) la continuidad de la función, (b) la existencia de las primeras derivadas parciales y (c) la diferenciabilidad de dicha función.

77. Sea Ω la región sólida limitada superiormente por el cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ e inferiormente por el paraboloide elíptico $z = x^2 + 3y^2$. Calcule el volumen de Ω. *Solución*: 4π

78. Considere el triángulo rectángulo que tiene por catetos los ejes coordenados cartesianos y por hipotenusa la tangente a la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en un punto genérico (x, y) del primer cuadrante de la misma. Se pide que: (a) demuestre que los puntos de corte de la hipotenusa con los ejes cartesianos son de la forma $x_c = M/x^\alpha$ e $y_c = N/y^\beta$, donde M, N, α, β son constantes que usted tiene que determinar, y (b) determine mediante el método de los *multiplicadores de Lagrange*, el área del triángulo que posee área mínima.

79. Dado el campo vectorial $\mathbf{A} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, se pide que:

(a) Calcule la integral de flujo del rotacional de $\mathbf{A}$ a través de la zona esférica dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1/2$.

(b) Calcule las integrales de línea del campo vectorial $\mathbf{A}$ a lo largo de las circunferencias que limitan la zona esférica del apartado (a).

(c) ¿Cómo se relacionan los resultados obtenidos en los apartados (a) y (b)?

Soluciones

Si encuentra errores en estas soluciones comuníquelo, por favor, a la dirección mjrplaza@fis.ucm.es. Muchas gracias.

13. (a) Hay infinidad de ejemplos: $f(x,y) = (x-y)/(x+y)$ con $x \neq -y$, $(x-y)/(x+y)$ para $x \neq y$, $(x-7y)/(x+y)$ (omito decir para qué puntos, lo añade el lector si es tan amable), $(3x^2+11y)/(x^2+y)$, etc. (b) Hay infinitos ejmplos también. Unos pocos: $f(x,y) = x^2y^2/(x^2y^2+(x-y)^2)$, $x^2y^2/(x^4+y^4)$, $x^2y^2/(x^2y^2+y^4)$, etc.

14. Todas son armónicas.

18. $f_x = \dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y = \dfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$, cuando $(x,y) \neq (0,0)$. Para evaluar $f_x(0,0), f_y(0,0), f_{xy}(0,0)$ y $f_{yx}(0,0)$ usar la definición de derivadas parciales. La función $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$, lo que puede verse usando polares, así que ésta no es la razón por la que las derivadas cruzadas no son iguales. Otro resultado: $f_{xy} = (x^8+16x^6y^2-10x^2y^6-y^8)/(x^2+y^2)^4 = f_{yx}$ fuera de $(0,0)$. La razón es que f_{xy}, f_{yx} *no* son continuas en $(0,0)$ (tomar las rectas $y = mx$ para verlo, por ejemplo) y como no son continuas no tienen por qué coincidir.

17. Hay muchas maneras de comprobar que la función dada es una solución de KdV: como lo hacen en M&T, que está muy bien, o a fuerza bruta. Para el que no se le ocurra más que a fuerza bruta (siempre rupestre, claro que también siempre segura), le tiene que salir lo siguiente: llamando $\alpha = \frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)$, se tiene que $u_t = 3\,c^{5/2}\sinh\alpha/\cosh^3\alpha$, $u_x = -3\,c^{3/2}\sinh\alpha/\cosh^3\alpha$ y $u_{xxx} = 3c^{5/2}\left[-\dfrac{\sinh\alpha}{\cosh^3\alpha} + 3\dfrac{\sinh\alpha}{\cosh^5\alpha}\right]$.

19. La función puede presentar problemas sólo en $(0,0)$ porque en todos los otros puntos del plano existen derivadas parciales de f con respecto a x e y. En $(0,0)$ es fácil ver que también existen y tienen el valor $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Sin embargo la función *no* es diferenciable en $(0,0)$ porque no es continua en el punto (verlo usando las parábolas $x = my^2$. Aquí no son convenientes las rectas $x = my$ porque por ellas la función tiende a cero y no vemos la discontinuidad. Vamos, que aunque lo primero que se le ocurre a uno son las rectas que pasan por el punto, no siempre son útiles para probar que la función es discontinua en ese punto).

20. $6x+3y-z-11 = 0$

21. $x+\sqrt{6}z-3 = 0$

22. $u_{st} - \dfrac{u_t}{2s} = 0$

23. Basta ver que $u_x = yf'(xy) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\,g\left(\frac{x}{y}\right) + \sqrt{\frac{x}{y}}\,g'\left(\frac{x}{y}\right)$, donde f' y g' indican derivada con respecto al argumento, y que $u_y = xf'(xy) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\,g\left(\frac{x}{y}\right) - \sqrt{\frac{x^3}{y^3}}\,g'\left(\frac{x}{y}\right)$, y calcular con este resultado u_{xx} y u_{yy} para luego sustituir en la ecuación diferencial. Para que comprobéis si lo hacéis bien os doy las derivadas segundas: $u_{xx} = y^2f''(xy) - \frac{1}{4x}\sqrt{\frac{y}{x}}\,g\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{\sqrt{xy}}\,g'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}\,g''\left(\frac{x}{y}\right)$, y $u_{yy} = x^2f''(xy) - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}}\,g\left(\frac{x}{y}\right) + \sqrt{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y^2}\right)g'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y^2}\sqrt{\frac{x^3}{y^3}}\,g''\left(\frac{x}{y}\right)$. Creo que no me he equivocado.

24. (a) $\boldsymbol{\nabla} f = \cos^3\theta\,\mathbf{e}_r - 3\cos^2\theta\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta$, que en el punto $(r,\theta) = (\sqrt{2},\pi/4)$ resulta ser igual al vector $\sqrt{2}/4(\mathbf{e}_r - 3\,\mathbf{e}_\theta)$, es decir, al vector $(1,-1/2)$ en coordenadas cartesianas. A su vez $\Delta f \equiv \nabla^2 f = 1$ en el punto considerado (como Δf es un número, un escalar, da igual que se mire en unas coordenadas o en otras: vale lo mismo). Por supuesto que el problema se puede hacer directamente en cartesianas teniendo en cuenta que $f(x,y) = x^3/(x^2+y^2)$. Sale exactamente lo mismo, pero el cálculo en cartesianas de ∇f y Δf para esta f es más largo que en polares (es buen ejercicio comprobarlo). Pero está igual de bien hecho.

35. Si los vértices del triángulo son $(0,0),(c,0)$ y (a,b), con a,b,c dados, el punto pedido tiene *abscisa* $(a+c)/3$ y *ordenada* $b/3$. Es el baricentro.

36. El problema está resuelto en el libro, así que no escribo la solución.

37. Nótese que este ejercicio viene en el libro de M&T en el capítulo de diferenciación, o sea, que no hace falta saber el teorema de la función implícita para resolverlo. Sin embargo se entiende mucho mejor cuando uno conoce este teorema.

38. Resolubilidad en el punto $(1,1,1)$ está garantizada por el teorema de la función implícita. $v_y = 1$, $v_{yy} = 4$ en dicho punto. Como se ve en este ejercicio, la regla de la cadena y el teorema de la funcíon implícita hacen milagros: sin despejar u y v en términos de x,y,z, se pueden evaluar todas las derivadas parciales de ambas en el punto en cuestión. En este caso no es demasiado complicado despejar u,v y lo he hecho. Escribo lo que resulta sólo para que se vea lo largas que son las expresiones. Si uno tuviera que calcular con estas expresiones v_{yy} lo haría, por supuesto, pero sería de dolor de cabeza. Despejando en torno a $(1,1,1)$ queda

$$\begin{aligned} u &= (-xz+r)/2y \\ v &= (xy^2+\sqrt{t})/(x^2z^2-2xy^3+6y-xzr), \end{aligned}$$

donde r y t vienen dadas por

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2z^2-4xy^3+12y} \\ t &= -x^5z^6+5x^4y^3z^4-5x^3y^6z^2-15x^3yz^4 \\ &\quad +30x^2y^4z^2+x^2y^4-x^2y^2z^2+2xy^5-45xy^2z^2-6y^3 \\ &\quad +(x^4z^4-3x^3y^3z^2+x^2y^6+9x^2yz^2-6xy^4+xy^2+9y^2)zr \end{aligned}$$

39. En el punto $(\pi/4,\pi/4)$ la resolubilidad de u,v como funciones de x,y está garantizada por el teorema de la función implícita. $\alpha=0, \beta=-4, \gamma=4$

42. La función es máxima en $(0,\sqrt{2},1)$ y mínima en $(0,-\sqrt{2},1)$

43. Si no me he equivocado el volumen sale $V = \frac{8}{27}h^3\tan^2\alpha$. La base del paralepípedo es cuadrada, y cada lado mide $\frac{2\sqrt{2}}{3}h\tan\alpha$. La altura es $h/3$.

44. (a) $\dfrac{3}{16}\arctan(1/2)+\dfrac{1}{8}$, (b) $2\left(1-1/e+1/e^2\right)$, (c) 0, (d) 1, (e) $\sqrt{5}-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left[(13\sqrt{5}-29)(\sqrt{2}+1)^5/2\right]\approx 0.63$ (consultar el libro de Marsden&Tromba *Vector Calculus*, pg 338 si no se sabe hacer), (f) $-\dfrac{29}{6}$

45. $1/3$

46. 3

47. πab

48. (a) $\bar{x}=\pi a$ por simetría, $\bar{y}=\dfrac{4}{3}a$ por cálculo; (b) en la primera figura $\bar{x}=\pi/2$ por simetría, $\bar{y}=3/8$, por cálculo; la simetría de la segunda lámina indica que $\bar{x}=\bar{y}$, obteniéndose $\bar{x}=1/5$

49. $I_x = 24/35$, $I_y = 148/45$

50. $8/15$

51. 0

52. $\dfrac{4}{3}\pi abc$

53. $\dfrac{4}{3}\pi(e-1)$

54. 7

55. El enunciado dice cómo se hace el problema, pero también alguien podría pensar que la manera de calcular la integral pedida es hallando la primitiva de e^{-x^2} y substituyendo los límites de la integral. No se hace así por una razón: ¿quién ha visto alguna vez la primitiva de e^{-x^2} expresada como composición de funciones elementales (es decir, de polinomios, senos, cosenos, exponenciales, logaritmos... en una palabra, de las famosas)? Nadie. Aunque dicha primitiva sabemos que existe porque lo asegura el teorema fundamental del cálculo infinitesimal (por ser e^{-t^2} continua en $t \in [0,x]$ existe $\int_0^x dt\, e^{-t^2}$, o sea, la primitiva que nos ocupa). Gracias al paso a polares podemos calcular la integral pedida sin conocer su antiderivada.

56. Pasando a polares la integral no es impropia y vale $8\ln(1+\sqrt{2})$. Esta integral representa el volumen que encierra la superficie $z = 1/\sqrt{x^2+y^2}$ sobre el cuadrado M, y aunque la función integrada es infinita en $(x,y)=(0,0)$ el volumen que resulta es finito. Este problema es curioso (me lo muestra Pepe Aranda): si tuviéramos que llenar de pintura el volumen bastarían unos botes porque el volumen es finito. Sin embargo, si tuviéramos que pintar la superficie sobre el dominio M no habría pintura suficiente en el mundo para hacerlo porque la superficie lateral es infinita. Superficie infinita que encierra un volumen finito: chocante pero cierto.

57. (a) $(13^{3/2}-8)/27 \approx 1.44$, (b) $2\sqrt{2}$, (c) $16a$, (d) cuando se llegue a $s = \int_1^8 dx\,\sqrt{1+\frac{4}{9}\,x^{-2/3}}$ resolver este integral con el cambio $x = y^{3/2}$, resultando $s = (40^{3/2}-13^{3/2})/27 \approx 7.63$, (e) $s = a\int_0^{2\pi} d\theta\,\sqrt{1+\theta^2}$. El cambio 'profesional' para hallar esta integral es $x = \theta + \sqrt{1+\theta^2}$ (ver apuntes de *Cálculo I* de Pepe Aranda en la página web del departamento de Física Teórica II de la UCM). La longitud del arco pedida es $s/a = \pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)$, o sea $s \approx 21.3a$

58. Problema acerca de Tom Sawyer y su tía Polly propuesto en el libro de Marsden&Tromba *Vector Calculus*, pg 417. "Tom could realize as much as \$1.80 for the job"–adds the book, which is not bad for a boy who hates work more than he hates anything else.

59. (a) 2, (b) $52\sqrt{14}$, (c) $\dfrac{16}{3} - 2\sqrt{3}$

60. $23/15, 31/12, 1/2$, respectivamente.

61. 9. Otra forma de hacer el problema: nótese que $\mathbf{F} = \mathbf{r}$ y como sabemos $\operatorname{rot}\mathbf{r} = 0$, condición necesaria para que $\mathbf{F}$ sea un gradiente. Como $\mathbf{F}$ no tiene singularidades va a ser un gradiente de todas todas. Lo es de $f(x,y,z) \equiv (x^2+y^2+z^2)/2 + \text{const}$, así que el trabajo realizado por la fuerza no depende del camino y es igual a $f(2,4,0) - f(-1,1,0)$, o sea 9.

62. El enunciado no especifica por qué camino vamos de $(1,1,1)$ a $(1,2,4)$, lo que hace sospechar que el campo $\mathbf{F} = (2xyz, x^2z, x^2y)$ es el gradiente de una función f. Comprobamos que su rotacional sale cero (condición necesaria) y como $\mathbf{F}$ no tiene singularidades no hay razón para que no exista f. La integral pedida es entonces $f(1,2,4) - f(1,1,1) = 7$, donde $f = x^2yz$ salvo una constante aditiva que omito.

63. (a) 0, (b) 0, (c) 0, (d) 0. A pesar de todo $\mathbf{F} = (xy, 0)$ *no* es un gradiente porque $(xy)_y = x \neq (0)_x$. Las integrales pedidas salen todas cero por simetría; sobre caminos no simétricos no saldrían cero.

65. (a) Es importante sacar bien este plano tangente: $x+4y-18z+13=0$, (b) $6x+8y-z-3=0$, (c) $4x+3y-5=0$

66. Una parametrización natural es

$$x = 5\cosh u \cos v, \quad y = 5\cosh u \sin v, \quad z = 5\sinh u, \quad 0 \leq v < 2\pi,\ -\infty < u < \infty.$$

Esta parametrización pone de manifiesto, mediante $\cos v$ y $\sin v$, que la superficie es de revolución alrededor del eje z (ya que z depende de x e y sólo a través de la combinación x^2+y^2). Un vector unitario normal a la superficie en cada punto y apuntando hacia el exterior de la misma es $\mathbf{n} = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, -\sinh u)/\sqrt{1+2\sinh^2 u}$, o en general $\mathbf{n} = (x, y, -z)/\sqrt{25+2z^2}$

67. La superficie $x^2+y^2-x=0$ es el cilindro $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ que intersecciona con la esfera dada en dos regiones, una por arriba y otra por abajo. Las áreas de estas regiones son las mismas, así que calculamos sólo la de arriba. Hay muchas maneras de hacerlo. Una de ellas es parametrizar el medio cascote superior de la esfera con x e y, i.e., $x=x, y=y, z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, calcular el vector normal a este cascote en cada punto con el producto vectorial fundamental y calcular el módulo de este vector (sale $|\mathbf{n}| = 1/\sqrt{1-x^2-y^2}$). Ya no resta más que evaluar $\iint_D dxdy/\sqrt{1-x^2-y^2}$, donde D es el círculo de centro $(1/2, 0)$ y radio $1/2$. Esta integral –en polares es fácil– vale $\pi-2$. La superficie pedida es entonces $2\pi-4$

68. Curiosamente el área del toro es la misma que el área lateral del cilindro que resulta de cortar y enderezar el toro poniéndolo recto.

69. 36π

70. (a) $-\pi$, (b) $-1/6$

71. $-6-15\pi$

72. $3\pi a^2/8$

73. 3

74. $12\pi/5$