UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA
MJRPlaza

Cálculo para IEC

Página web de la asignatura: teorica/ft8/CalculoIEC.html

"Short, simple, straight and logical... some art forms like to get baroque, but in math the point is simplicity." –Walter A. Strauss.

Los libros de donde se toman los ejercicios están indicados entre corchetes, así [MBoas] es Mary L. Boas, [Spi] es Michael Spivack, [PAr] son los apuntes de J.I. Aranda Iriarte, [MT] es Marsden&Tromba, etc. Todos se pueden descargar de la red en pdf. El de MBoas, *Mathematical Methods in The Physical Sciences* tiene la portada roja y azul y un dibujo de un campo vectorial.

Los problemas con punto **rojo** se proponen como ejercicios al alumno. Los problemas en negro los hago yo en clase. La solución de algunos de estos problemas se encuentra en la página web de la asignatura. Pero la de todos las tengo en mis apuntes. Me las piden y se las digo en clase.

Tema I: SERIES NUMÉRICAS

Introducción. Series que sabemos sumar **sistemáticamente**: las series geométricas y las telescópicas. Las primeras son muy frecuentes, las segundas menos, pero usted debe darse cuenta de si es telescópica en cuanto la vea (esto es un decir, se tarda un rato). Si le piden *calcular* la suma de la serie tal, si no es geométrica, será telescópica. Ojo con éstas. Está usted, obligado, alumno de primero, a considerar las sumas parciales si no quiere equivocarse. Cuando usted se haga mayor, matemáticamente hablando, hace de su capa un sayo, pero ahora no. Ahora considera sumas parciales.
Qué se entiende por convergencia de una serie: que exista el límite de las sumas parciales. Si no existe por la razón que sea, la serie se llamará divergente.
Primer test para saber si una serie es divergente: el *test de la divergencia*, tb llamado *preliminary test*, también llamado *the nth-term test for divergence*. Prueba divergencia de la serie $\sum^{\infty} a_n$ si el límite del término enésimo a_n es diferente de zero cuando n tiende a infinito. Pero si es cero, el test no sabe no contesta y hay que seguir aplicando otros tests para adivinar convergencia o divergencia. Otros test, cuáles?
Si la serie es de **términos positivos** se aplicará: el test de la integral, el test de comparación o/y el test del cociente. El de la integral da mucho juego: con él se prueba que la serie $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{1}{n^2}$, conocida como el problema de Basilea por la ciudad Suiza, es convergente. De hecho la sumó Euler en 1735. Las fechas me bailan pero más o menos. Tb vale, the integral test, para probar que la serie armónica $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. Algo que a mí me gusta probar con el criterio de comparación, porque entretiene a los alumnos habladores. Y sabiendo que Basilea converge y armónica diverge se abre un mundo de posibilidades. Recuerde que en el criterio de la integral sólo debe usted considerar el límite superior ∞ de la integral para determinar si la serie converge o no. Claro, que si le dicen *estimar* la suma de la serie (no calcular, sino estimar, ojo con la diferencia) necesitará usted echar mano además del límite inferior. Insisto en esto: el criterio de la integral no calcula series pero las estima: la suma de la serie está acotada inferiormente por esto y superiormente por esto otro. El por esto y por esto otro lo ví en clase con un ejemplo. El test del cociente o *ratio test* viene muy bien cuando en a_n aparecen exponenciales, 10^n for instance, o factoriales. El criterio del cociente se conoce tb con el nombre de *D'Alembert test*.
Paso a las **series alternadas** y enuncio el *test de las series alternadas* o AST, siglas de Alternating Series Test, para escribir menos o *criterio de Leibniz*: sólo prueba convergencia y no es capaz de

probar divergencia. Y que es capaz de estimar la suma de la serie. Viene de fábrica con un error de estimación que se ve visualmente, y que se agradece. He definido *convergencia absoluta* y que una serie que converge absolutamente es convergente.
Acabo el tema con un apéndice de límites de sucesiones. Y calculo algunos límites.
Cada punto que he dicho del tema lo he ilustrado con ejercicios y ejemplos, así que me lo he trabajado. Sin hacer ejercicios no se va a ningún sitio. Acabaré recordándoles algo que he dicho de palabra: que si a una serie se le suprimen un numero **finito** de términos, el carácter de la serie no cambia: si era convergente antes de la supresión seguirá siendo convergente después, la suma cambia, eso está claro, pero el carácter no; y si era divergente seguirá siendo divergente cuando se le quiten (o añadan) un número finito de términos.

1. • Haga todos los ejercicios del [MBoas, pg 19-20]. Enunciados en el campus. Las soluciones las pongo a mano en un pdf.

2. • Haga todos los ejercicios del [Spi, pg 482-483]. Enunciados en el campus. Las soluciones a mano en un pdf.