Recuerde que esto es sólo una parte del curso.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

25 de Enero de 2018

IET: Examen Final de Cálculo, Parte 2
Curso 2017/18

No se darán puntos por respuestas sin la debida justificación. El examen son $12+16+16+50=94$ puntos normalizables a 10.

1. [12 pt] Sea la curva $x\,e^y + y\,e^x = 0$. Se pide calcular:

   a) $\dfrac{dx}{dy}$,

   b) la ecuación de la recta tangente a la curva en (0.0),

   c) mostrar si la relación $\dfrac{dx}{dy}\dfrac{dy}{dx} = -1$ es cierta o falsa.

2. [16 pt] a) Encontrar un vector normal a la superficie

$$x^2 y + y^2 z + z^2 x + 1 = 0$$

   en el punto (1,2,-1). b) Escribir la ecuación del plano tangente y la ecuación de la recta normal en ese punto.

3. [16 pt] Calcular, utilizando componentes si fuera necesario, la divergencia y el rotacional de

   a) $r\mathbf{r}$,

   b) $\mathbf{a}\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{b})$,

   siendo $\mathbf{a},\mathbf{b}$ vectores constantes. Aquí $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Nota: Al final de todo expresar el resultado de forma compacta, sin componentes, por ejemplo $3\mathbf{a}$ y no $(3a_1, 3a_2, 3a_3)$.

4. [50 pt] Comprobar el *teorema de la divergencia* en el plano, es decir,

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dl = \iint_A \operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdy,$$

   siendo $\mathbf{F} = (x^2 - y, x + y^3)$ y C el paralelogramo de vértices $(0,0),(2,0),(1,1),(3,1)$. Comprobar quiere decir calcular **ambas** integrales del teorema, la de la izda y la de la dcha. Recuerde que $\mathbf{n}\,dl = (dy, -dx)$. Se pide además: 1) dibujar el área A y orientar bien la curva C, 2) decir qué vector es $\mathbf{n}$ y dibujarlo en cada lado del paralelogramo, 3) Explicar brevemente el significado físico del teorema. 4) Cúal de las cuatro caras del paralelogramo es atravesada por más lineas de campo?

(1) Empiezo por c) antes de seguir escribiendo. Por supuesto que

$$\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=1 \quad , \quad \cancel{\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=-1}$$

nunca!

y no puede ser otra cosa. Así que lo del -1 del enunciado es tontería. Lo dije en clase, es como si

$$\frac{\cancel{dx}}{\cancel{dy}}\cdot\frac{\cancel{dy}}{\cancel{dx}}$$

se cancelaran, luego es 1. Cójase un ejemplo que usted controle: la curva

$y=e^x$ que es tb $x=\log y$

$\frac{dy}{dx}=e^x$ $\qquad$ $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}$.

Ahora haga

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{e^x}{y}=\frac{e^x}{e^x}=1.$$

Nota: Tenga en cuenta que escribo esto antes de corregir y ya estoy disgustada. Colocando los exámenes he visto que hay alumnos que intentan despejar x ó y en la curva

$$xe^y+ye^x=0,$$

para calcular $\frac{dx}{dy}$ ó $\frac{dy}{dx}$. No he dicho 20,000,000,000 veces en clase que para calcular derivadas no hace falta despejar!!! NO HACE FALTA DESPEJAR, SÓLO ESCUCHAR. Despejar sólo nos está concedido a los mortales en casos simples y ridículos, excepcionales,

... me sereno ... y sigo:

a) $xe^y + ye^x = 0$,

diferenciando ambos lados tenemos ($d0 = 0$)

$$e^y dx + xe^y dy + e^x dy + ye^x dx = 0,$$

agrupando factores

$$dx\,(e^y + ye^x) + dy\,(xe^y + e^x) = 0,$$

ó

$$dx\,(e^y + ye^x) = -dy\,(xe^y + e^x).$$

De aquí usted puede obtener $\frac{dx}{dy}$ ó $\frac{dy}{dx}$, <u>usted elige</u>:

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = -\frac{(xe^y + e^x)}{e^y + ye^x}} \qquad (*)$$

ó

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}. \qquad (**)$$

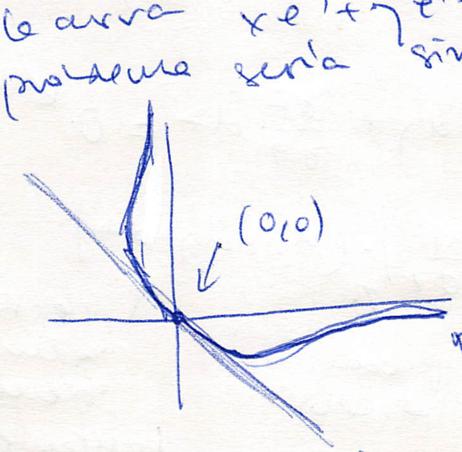
As you see

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 1,$$

<u>as expected</u>, no -1 or any other value. <u>Never</u>.

b) En $(0,0)$ (obviamente $(0,0)$ es un punto de la curva $xe^y + ye^x = 0$ porque de otro manera el problema sería sin sentido) uno tiene

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{(0,0)} \overset{(*)}{=} \frac{-(0+1)}{1+0} = -1$$



↖ curva $xe^y + ye^x = 0$ (no hace falta dibujo...)

↖ recta tangente en $(0,0)$

La recta tangente a la curva en (0,0) tiene pendiente $\left.\frac{dx}{dy}\right|_{(0,0)} = -1$, luego es la recta

$$x - 0 = -1\,(y-0).$$

este -1 es $\frac{dx}{dy}$ en (0,0).

Es la recta,

$$\boxed{y=-x}$$

sólo

c) No comento esto más. $\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = (*)\cdot(**) = 1.$

---

② (1,2,−1) es un punto de la superficie

$$x^2y + y^2z + z^2x + 1 = 0$$

pues

$$2 - 4 + 1 + 1 = 0$$

a) La superficie está dada de forma implícita (sin despejar ni x, ni y, ni z... pero a quién le importa? nos da igual...). La forma implícita es

$$F(x,y,z)=0$$

con

$$F(x,y,z) \equiv x^2y + y^2z + z^2x + 1,$$

tiene

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0 \quad d0 = 0$$

claro

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)\cdot(dx, dy, dz)$$

luego este ha de ser normal a la superficie porque el producto escalar es 0 (vector)

producto escalar

vector siempre siempre tangente a la superficie en cada pto

$\vec{N} \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$: vector normal a la superficie en cada punto (cero, claro está si no es el vector cero, por supuesto. (0,0,0)

$= (2xy + z^2, x^2 + 2yz, y^2 + 2zx)$

En el pto $(1,2,-1)$, $\vec{N}$ is (o paralelo a) the vector $(4+1, 1-4, 4-2)$ o sea

$$\boxed{\vec{N} = (5,-3,2)}$$

b) Tangent plane at that point

$$5(x-1) - 3(y-2) + 2(z+1) = 0$$

or

$$\boxed{5x - 3y + 2z + 3 = 0}$$

c) $\boxed{\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{2}} := t$

or in parametric form, introduce t

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1+5t \\ y &= 2-3t \\ z &= -1+2t \end{aligned}}$$

Recta normal a la sup en $(1,2,-1)$.

---

(3) The solution to this problem is

a) $\text{div}(r\vec{r}) = 4r$, $\vec{r} \equiv x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$\text{rot}(r\vec{r}) = 0$

b) $\text{div}(\vec{a}(\vec{r}\cdot\vec{b})) = \vec{a}\cdot\vec{b}$

$\text{rot}(\vec{a}(\vec{r}\cdot\vec{b})) = -\vec{a}\times\vec{b}$

Why? Easy...

a) $r\vec{r} = (xr, yr, zr)$ with $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\operatorname{div}(r\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(xr) + \frac{\partial}{\partial y}(yr) + \frac{\partial}{\partial z}(zr)$$

= sigue abajo ...

[se hace uno, $\frac{\partial}{\partial x}(xr)$ y los demás se copian cambiando x por y ó x por z.

$$\frac{\partial}{\partial x}(xr) = r + x\frac{\partial r}{\partial x} = r + \frac{x^2}{r}$$
]

$$= r + \frac{x^2}{r} + r + \frac{y^2}{r} + r + \frac{z^2}{r}$$

$$= 3r + \frac{x^2+y^2+z^2}{r}$$

$$= 3r + r$$

$$= 4r.$$

Sale un escalar = función, número. No un vector.

$$\operatorname{rot}(r\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xr & yr & zr \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}.$$

for instance

$$\vec{i}\,\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial y}(zr) - \frac{\partial}{\partial z}(yr)\right]}_{= z\frac{y}{r} - y\frac{z}{r} \equiv 0} + \text{similarly the other ~~two~~}$$

b) $\vec{a}.(\vec{r}.\vec{b}) = \vec{a}\,(xb_1 + yb_2 + zb_3)$

$$= \big(a_1(xb_1 + yb_2 + zb_3),\ a_2(b_1x + b_2y + zb_3),\ a_3(b_1x + b_2y + b_3z)\big)$$

Esto es así porque

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

en <u>componentes</u>.

$$\operatorname{div}(\vec{a}(\vec{r}\cdot\vec{b})) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$
$$= \vec{a}\cdot\vec{b}$$

producto escalar!

$$\operatorname{rot}(\vec{a}(\vec{r}\cdot\vec{b})) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial k} \\ a_1(b_1 x + b_2 y + b_3 z) & a_2(b_1 x + b_2 y + b_3 z) & a_3(b_1 x + b_2 y + b_3 z) \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(a_3 b_2 - a_2 b_3) + \vec{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \vec{k}(a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

$$= - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

porque suena a cero.

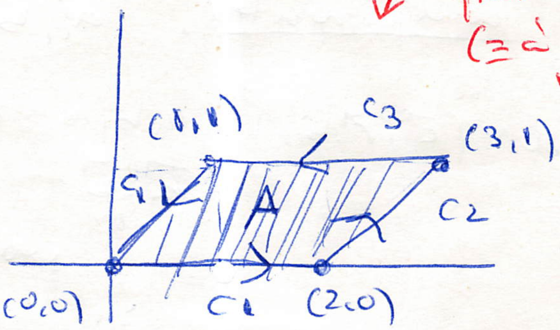
$$= -\vec{a}\times\vec{b}$$

(4) $\oint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dl = \iint_A \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy$

curva orientada positivamente (≡ área a la izda siempre) ≡ regla mano dcha.

$\vec{n}\,dl = (dy, -dx)$

clave



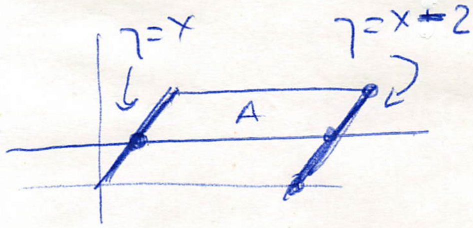
Solución: $\underbrace{\oint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dl}_{8} = \underbrace{\iint_A \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy}_{8}$

lhs

rhs ≡ right hand side

rhs: $\vec{F} = (x^2 - y,\ x + y^3)$

$\operatorname{div}\vec{F} = 2x + 3y^2$



$\iint_A (2x+3y^2)\,dx\,dy =$ dibujo $=$

$= \int_0^1 dy \int_y^{y+2} dx\,(2x+3y^2)$

$= \int_0^1 dy \left[x^2 + 3y^2 x\right]_{x=y}^{x=y+2}$

$= \int_0^1 dy \left[\underbrace{(y+2)^2 + 3y^2(y+2) - (y^2+3y^3)}_{6y^2+4+4y}\right]$

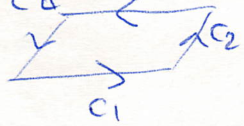
$$\begin{array}{l} y^2+4+4y \\ \cancel{3y^3}+6y^2 \\ \cancel{-3y^3}-y^2 \\ \hline 6y^2+4+4y \end{array}$$

$= \int_0^1 dy\,[6y^2+4+4y] = \left[2y^3+4y+2y^2\right]_0^1$

$= 2+4+2 = 8$ el de arriba.

---

lhs

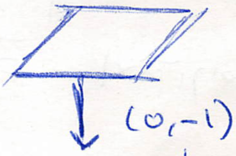


$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$

+ve

C_1 is $y=0$

$(dy, -dx) = (0, -dx) = (0,-1)\,dx$



este es la dirección de $\vec{n}$: apuntando hacia afuera y normal a la curva en cada punto.

$\vec{F}\cdot\vec{n}\,dl = (x^2-y, x+y^3)\cdot(0,-1)\,dx$ — producto escalar

$= -(x+y^3)\,dx$

$= -x\,dx$

$y=0$ sobre C_1

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dl = -\int_0^2 x\,dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -2$$

flujo a través de la curva C_1 [entran las líneas de campo netamente]

+ve

C_2 is $y = x-2$ or $dy = dx$

$(dy, -dx) = (dy, -dy) = (1,-1)\,dy$

vector normal a la curva apuntando hacia afuera. (sí).

$\vec{F}\cdot\vec{n}\,dl = (x^2-y, x+y^3)\cdot(1,-1)\,dy$

$= [x^2-y-(x+y^3)]\,dy$

$= [(y+2)^2 - y - (y+2) - y^3]\,dy$

$y = x-2$ on C_2

$$\int_{C_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dl = \int_0^1 [(y+2)^2 - y - (y+2) - y^3]\,dy$$

$$= \left[\frac{1}{3}(y+2)^3 - \frac{y^2}{2} - \frac{(y+2)^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 9 - \frac{1}{2} - \frac{9}{2} - \frac{1}{4} - \left(\frac{8}{3} - 2\right)$$

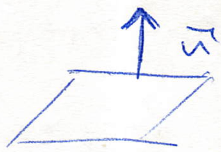
$$= 9 - 5 + 2 - \frac{8}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= 6 - \frac{8}{3} - \frac{1}{4} = \text{vamos a dejarlo así. ó } = 4 - \frac{11}{12}$$

salen ~~entran~~ estas líneas de campo por C_2 netamente

C_3: $\longleftarrow$ es $y=1$, $dy=0$ ↙ como dx es negativo

$\vec F\cdot(dy,-dx) = \vec F\cdot(0,-1)\,dx$



$\vec n\,dl$: $\propto$ $\|(0,1)$

$= -(x+y^3)\,dx$

$= -(x+1)\,dx$

$$\int_{C_3}\vec F\cdot(dy,-dx) = -\int_3^1 (x+1)\,dx = \int_1^3 dx\,(x+1)$$

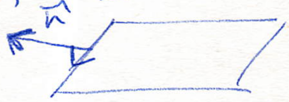
$$= \frac12\left[(x+1)^2\right]_1^3$$

$$= \frac12(16-4) = 6$$

↙ netamente salen de C_3 6 líneas de campo

C_4 es $y=x$
$dy=dx$

$\|(-1,1)$ $(1,1)$



$(0,0)$

$\vec F\cdot(dy,-dx) = \vec F\cdot(1,-1)\,dx$

dx es negativo

$= (x^2-y-x-y^3)\,dx$

$= (x^2-2x-x^3)\,dx$

$y=x$ sobre C_4

$$\int_{C_4}\vec F\cdot(dy,-dx) = \int_1^0 dx\,(x^2-2x-x^3)$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}-x^2-\frac{x^4}{4}\right]_1^0$$

$$= -\left[\frac13-1-\frac14\right] = 1-\frac{1}{12}$$

salen ↙ (es +vo) estas líneas de campo por C_4

Juntando términos:

$$\oint = \underbrace{-2}_{\text{de } C_1} + \underbrace{4+\frac{11}{12}}_{\text{de } C_2} + \underbrace{6}_{C_3} + \underbrace{1-\frac{1}{12}}_{C_4}$$

$$= -2 + 4 + 6 + \cancel{1} - \cancel{1} = 8 \text{ luego!!!}$$

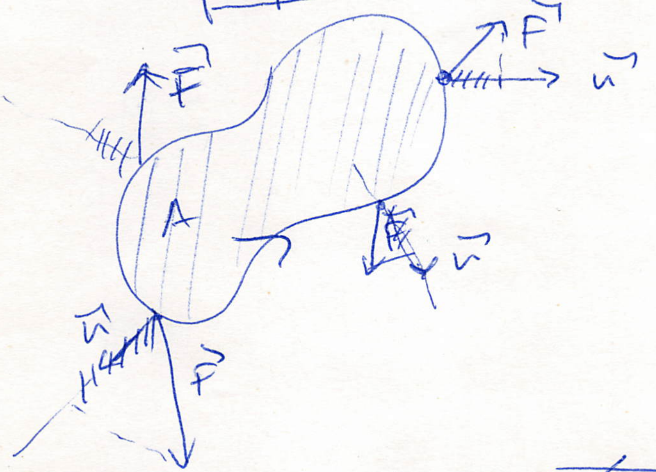
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Conclusión: lhs = rhs = 8}}$

y este resultado para obtener no hay que preocuparse de que $(d\gamma_1 - dx)$ apunte hacia fuera de la superficie que ya lo tiene $(d\gamma_1 - dx)$ en los genes y lo sabe.

Importantísimo.

Por la cara que salen más líneas de campo es la curva C_3, que salen 6 ≡ Hay más flujo al exterior por esa cara.

El fin de la divergencia mide cuánto es el flujo de líneas de campo (cuántas entran, cuántas salen) siempre contadas en la dirección perpendicular C; o sea no circulantes, sino de entrada o salida



Dentro de nuestro  paralelogramo hay una "fuente" de líneas de campo porque resultado 8 (que es positivo y no cero).

Alarma!!! Es obligatorio abrir y leer para el curso el Mary L. Boas o el Marsden Tromba. No se puede estudiar por apuntes, ni aunque estos sean del mismísimo Newton, Euler, Gauss, Einstein, Feynmann, Galileo... por citar unos poquitos.

Negrita en un libro significa vector.

Y que yo tenga que decir esto !!!!