Soluciones, Examen Final Jan 2019

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

14 de Enero de 2019

IEC: Examen Final de Cálculo
Curso 2018/19

Nombre y Apellidos:

Firma y DNI:

No se darán puntos por respuestas sin la debida justificación. Los alumnos que hayan suspendido el examen parcial harán todo el examen (180pt normalizables a 10). Los alumnos que hayan aprobado el parcial harán exclusivamente los ejercicios 4,5,6,7,8 (120pt normalizables a 10).

1. [20pt] Calcular las constantes a, b, c, d, f en el desarrollo en serie de potencias en torno a $x = 0$ que sigue,
$$a \sin x^2 + 3\cos x = b + cx + \frac{x^2}{2} + dx^4 + fx^6 + \cdots .$$

2. [10pt] a) Resolver para todos los posibles valores reales de x e y la ecuación $(x + iy)^2 = 2iy$.
   b) Encontrar **tres** posibles valores de $(-i)^i$. Nota: hay infinitos, pero basta con tres.

3. [15+15 pt] Determinar si las series numéricas que siguen son convergentes o divergentes. Si aplica un criterio o teorema para responder (y algo tendrá que usar porque de lo contrario no se puntuará el ejercicio) diga **claramente** de qué criterio/teorema se trata.
   a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 - 1}}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n^2}$.

4. [15pt]Sabiendo que $r = e^{-p^2+q^2}$, $p = e^s$, $q = e^{-s}$, encontrar $\dfrac{dr}{ds}$.

5. [30pt] a) Encontrar el gradiente de $f(x, y, z) = z \sin y - xz$ en el punto $(2/\pi/2, -1)$. b) Situados en este punto, en qué dirección **decrece** f más rapidamente? c) Encontrar la derivada direccional de f en la dirección del vector $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

6. [20pt] a) Encontrar un vector normal a la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ en el punto (3,4,-5). b) Escribir la ecuación del plano tangente y la ecuación de la recta normal en ese punto.

7. [25pt] Calcular el área encerrada en **un** pétalo de la curva dada en coordenadas polares, $r = 2\cos 3\theta$. Se pintará en la pizarrá esta curva, conocida en español como *rosa de tres pétalos.*

8. [5+25pt] a) Calcular el rotacional del campo $\mathbf{F} = (xy, x^2)$.
   b) Calcular la integral de línea
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l},$$
   siendo C la curva cerrada dibujada en la pizarra. Nota: Puede usted hacer la integral de línea directamente o bien empleando el *teorema de Green* en el plano. Si utiliza éste enuncie el teorema.

1) $a \sin x^2 + 3\cos x = b + cx + \frac{x^2}{2} + dx^4 + fx^6 + \dots$

Sol:

substituting $x=0$, $\boxed{b=3}$

lhs $\equiv a \sin x^2 + 3\cos x$ es par en x, so $\boxed{c=0}$

Besides, the lhs is

$$a\sin x^2 + 3\cos x = \overbrace{a\left[x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots\right]}^{\text{power series of } \sin x^2}$$

$$+ \underbrace{3\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right]}_{\cos x}$$

$$= 3 + \left(a - \frac{3}{2!}\right)x^2 + \frac{3}{4!}x^4 + \left(-\frac{a}{3!} - \frac{3}{6!}\right)x^6 + \dots$$

$$= b + cx + \frac{x^2}{2} + dx^4 + fx^6 + \dots$$

$a - \frac{3}{2!} = \frac{1}{2}$, so $\boxed{a=2}$

$$f = -\frac{a}{3!} - \frac{3}{6!} = -\frac{2}{3!} - \frac{3}{6!} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6\cdot5\cdot4\cdot2}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{2\cdot5\cdot4\cdot2}\right] = -\frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{80}\right]$$

$$= -\frac{81}{80}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{27}{80} \quad \text{"} \quad f = \boxed{-\frac{27}{80}}$$

Siempre fracciones irreducibles

$\cancel{d = \frac{3}{4!}}$ (impresentable)

$d = 1/8$

$$d = \frac{3}{4!} = \frac{1}{4\cdot2} = \frac{1}{8} \quad \text{"} \quad \boxed{d = \frac{1}{8}}$$

Then, $\boxed{a=2}$, $\boxed{b=3}$, $\boxed{c=0}$, $\boxed{d=\frac{1}{8}}$ $\boxed{f=-\frac{27}{80}}$

nota: sólo hay que saber las series de potencias de $\sin x$, $\cos x$ en $x=0$

---

2) a) $(x+iy)^2 = 2iy$

parte real = parte real, parte imaginaria = parte imaginaria

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 2iy \implies \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ xy = y \end{cases} \quad x, y \text{ reales}$$

Solutions: $xy = y$ has solutions $y=0$ or $x=1$

If $y=0$ then $x=0$ $(x^2-y^2=0)$

If $x=1$ then $y <^{1}_{-1}$

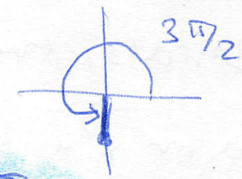
There are three solutions: $(x,y) = (0,0), (1,1), (1,-1)$.

b) $(-i)^i$ is a multivalued function.

Example: $-i = e^{-i\pi/2}$

$$(-i)^i = \left(e^{-i\pi/2}\right)^i = e^{\pi/2}.$$

but also, for instance,



$$-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$(-i)^i = \left(e^{3i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{-3\pi/2}$$

and obviously

$$4.81 \simeq e^{\pi/2} \neq e^{-3\pi/2} \simeq 0.00898$$

But there are more values: in fact,

$$-i = e^{-i\pi/2 + 2\pi i k} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$(-i)^i = \left(e^{-i\pi/2 + 2\pi i k}\right)^i$$

$$= e^{\pi/2 - 2\pi k};$$

$k=0$ is $e^{\pi/2}$

$k=-1$ is $e^{5\pi/2}$

$k=-2$ is $e^{7\pi/2}$

$k=1$ is $e^{-3\pi/2}$

... there are infinite values. Just choose three as requested

---

(3) a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$: serie de términos positivos

$$a_n \equiv \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$$

28040 MADRID - ESPAÑA

(METODOS MATEMATICOS DE LA FISICA)
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA II
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

TELEX: 47273 FFUC - E
FAX: (34) (1) 394 51 97
TELEF.: (34) (1) 394 51 98

- When $n \to \infty$, $a_n \sim \frac{1}{n^{2/3}}$. But the series $\sum_2^\infty \frac{1}{n^{2/3}}$ is divergent (is a p series $\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$ with $p=2/3$).

- By a comparison test with the harmonic series:

$$0 < n^2-1 < n^3+n^3 = 2n^3 \quad \text{if } n=2,3,4,\dots$$

Then

$$\frac{1}{(n^2-1)^{1/3}} > \frac{1}{(2n^3)^{1/3}} = \frac{1}{2^{1/3}}\frac{1}{n}$$

Hence,

$$\sum_2^\infty a_n > \frac{1}{2^{1/3}} \times \underbrace{\text{serie armónica}}_{\sum_2^\infty \frac{1}{n}} = \text{divergent}$$

[lo he probado de dos maneras. Hay más]

---

b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin 2n}{n^2}$; $a_n = \frac{\sin 2n}{n^2}$

Theorem of absolutely convergent series: $\sum_1^\infty |a_n|$ conv $\Rightarrow$ $\sum_1^\infty a_n$ convergent.

$$0 \le \left|\frac{\sin 2n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \quad \text{for all } n=1,2,3,\dots$$

Then,

$$0 \le \sum_1^\infty \left|\frac{\sin 2n}{n^2}\right| \le \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \text{convergent}$$

It is absolutely convergent (by comparison with the series $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$), so it is convergent.

---

④ $r = e^{-p^2+q^2}$, $p = e^s$, $q = e^{-s}$

Si hay varias formas de hacerlo, son casi todas la misma, supongo: no $\frac{\partial p}{\partial s}$. Por qué?

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{dp}{ds} + \frac{\partial r}{\partial q}\cdot\frac{dq}{ds}$$

r is a function of p, q

$\frac{dq}{ds}$ y no $\frac{\partial q}{\partial s}$ porque q sólo dep de s.

$$\frac{\partial r}{\partial p} = \underbrace{e^{-p^2+q^2}}_{=r}(-2p) = -2pr$$

$$\frac{\partial r}{\partial q} = e^{-p^2+q^2}(2q) = 2qr$$

$$\frac{dp}{ds} = e^{s} = p$$

$$\frac{dq}{ds} = -e^{-s} = -q$$

then,
$$\frac{dr}{ds} = -2p^2 r - 2q^2 r = -2r(p^2+q^2)$$

$$\boxed{\frac{dr}{ds} = -2r(p^2+q^2)}$$

---

(5) $f(x,y,z) = z \sin y - xz$

punto $(2, \pi/2, -1)$

a) $\vec{\text{grad}}\, f = \vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z}$ es un vector

$= (-z, z\cos y, \sin y - x)$,

que en el punto $(2, \pi/2, -1)$ es el vector

$$\vec{\text{grad}}\, f\Big|_{\substack{\text{punto}\\(2,\pi/2,-1)}} = \vec{i} + 0\vec{j} - \vec{k}.$$

Es el vector $(1,0,-1)$.

b) f Decrece más rápidamente en la direcció de $-\vec{\text{grad}}\, f$, o sea, si estamos en el pto $(2, \pi/2, -1)$ en la dirección $(-1,0,1)$.

c) $\vec{v} = (2,3,0)$; $|\vec{v}| = \sqrt{13}$

$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2,3,0)$: vector unitario en la direcció de $\vec{v}$.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA II
(METODOS MATEMATICOS DE LA FISICA)
28040 MADRID - ESPAÑA
TELEF.: (34) (1) 394 51 98
FAX.: (34) (1) 394 51 97
TELEX: 47273 FFUC - E

La derivada direccional pedida es

$$\vec{u}\cdot \vec{\text{grad}} f = \frac{1}{\sqrt{13}}(2,3,0)(-z,\ z\cos y,\ \sin y - x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}\left[-2z + 3z\cos y\right],$$

que en el punto $(z, \frac{\pi}{2}, -1)$ es $\frac{2}{\sqrt{13}}$.

---

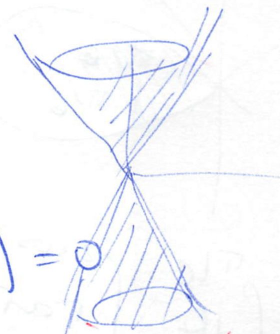
(6) Superficie $x^2+y^2-z^2=0$.
Un punto de ella es el $(3,4,-5)$ porque $3^2+4^2-5^2=0$ de esta superficie

a) vector normal a la superficie en cualquier punto:
$F \equiv x^2+y^2-z^2=0$, es $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (2x, 2y, -2z)$.
O sea, el vector

$$\vec{N} \equiv (x, y, -z)$$

es normal a la superficie en cualquier punto. En el punto $(3,4,-5)$ este vector es

$$\vec{N} = (3,4,5)$$



b) Ecuación del plano tangente en ese punto:

$$3(x-3)+4(y-4)+5(z+5)=0$$

o sea, $\boxed{3x+4y+5z=0}$

tb irreducible: no escriba $6x+8y+10z=0$ es de mal gusto (e impresentable matemáticamente hablando)

c) $\boxed{\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z+5}{5}}$

or in parametric expression:

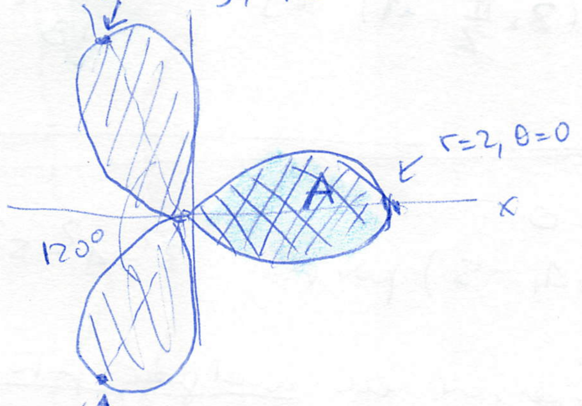
$$\begin{cases} x = 3+3\lambda \\ y = 4+4\lambda \\ z = -5+5\lambda \end{cases}$$

λ real

7

$\cos 3\theta = \cos(3\theta + 2\pi) = \cos 3(\theta + \frac{2\pi}{3})$

Basta con coger $\theta \in [0, \frac{2\pi}{3}]$ para pintar la figura porque es periódica $\frac{2\pi}{3}$. Pero como ya se la dan pintada esto no le hace falta.



$$\iint_A dx\,dy = \iint_{A \text{ pétalo}} r\,dr\,d\theta$$

mejor en polares

Necesitamos poner límites no integrar en r, θ, así que los buscamos

[el punto] $r = 0 \Leftrightarrow \cos 3\theta = 0$, $3\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi/6$ (*)

(pero $r=0$ tb si $\theta = -\pi/6$ porque $\cos 3\theta$ no ve el signo de θ, así que)

$$A = 2\int_0^{\pi/6} d\theta \int_0^{2\cos 3\theta} r\,dr = 2\int_0^{\pi/6} d\theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2\cos 3\theta} = 4\int_0^{\pi/6} d\theta \cos^2 3\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/6} d\theta \left[1 + \cancel{\cos 6\theta}\right] = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$\cos^2 3\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 6\theta)$

0 la integral

(*) Como $r = 2\cos 3\theta$ no ve si θ es positivo o negativo el área A pedida es 2 veces el área donde θ va de 0 a $\pi/6$.

Tb puedes hacer $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\theta [\ldots]$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA II
(METODOS MATEMATICOS DE LA FISICA)
28040 MADRID - ESPAÑA
TELEF.: (34) (1) 394 51 98
FAX.: (34) (1) 394 51 97
TELEX: 47273 FFUC - E

$$\boxed{A=\frac{\pi}{3}}$$

porque $\int_0^{\pi/6} \cos 6\theta = 0$.

El área del pétalo pedido (los tres son iguales) es $A=\pi/3$. O sea, que en un círculo de radio 1 caben 3 pétalos de estos.

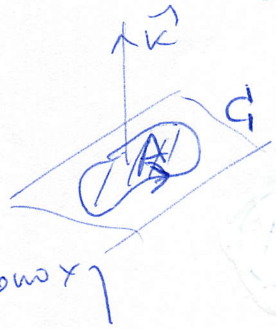
Es obligatorio integrar primero r y luego θ.

---

(8) a)
$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + (2x-x)\vec{k} = 0\vec{i}+0\vec{j}+x\vec{k}$$

$\text{rot}\,\vec{F} = (0,0,x)$: perpendicular al plano xy.
$= 0\vec{i}+0\vec{j}+x\vec{k}$.

b) El teorema de Green en el plano dice que si $\vec{F}=(P,Q)$ la integral de línea

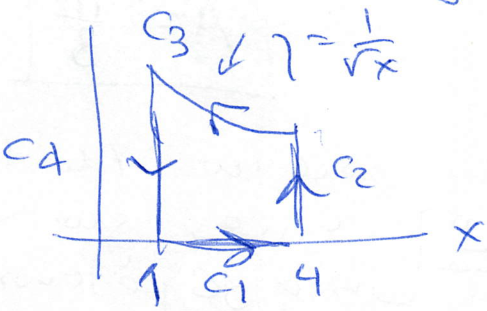


$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = \iint_A dx\,dy\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

o sea: iguala una integral de línea a una integral doble. C es una curva cerrada, que encierra un área plana A y C está orientada del modo que el área queda a la izquierda siempre.

Yo calcularé ambas partes y comprobaré que resultan lo mismo (por lo demás, el teorema de Green es una identidad). Ustedes sólo tienen que calcular una de ellas.

Calculation of $\oint \vec{F}\cdot d\vec{l}$



$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$$

- C_1 is $y=0$ from $x=1$ to $x=4$

$$d\vec{l} = (dx, dy) = (dx, 0) = (1,0)\,dx$$

$y=0$ is $dy=0$

$$\vec{F}\cdot d\vec{l} = \underbrace{(xy, x^2)\cdot(1,0)}_{\text{producto escalar}}\,dx = xy\,dx = 0$$

$y=0$ porque estamos en C_1

Then $\boxed{\int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{l} = 0}$

- $\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{l}$

C_2 is $x=4$ and y goes from 0 to $\frac{1}{2}$.

$$d\vec{l} = (dx, dy) = (0, dy) = (0,1)\,dy$$

$x=4$ is $dx=0$

$$\vec{F}\cdot d\vec{l} = (xy, x^2)\cdot(0,1)\,dy = x^2\,dy = 16\,dy$$

$x=4$

$$\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{l} = 16\int_0^{1/2} dy = 8$$

$$\boxed{\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{l} = 8}$$

- $\int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{l}$

C_3 is $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$d\vec{l} = (dx, dy) = \left(dx, -\frac{1}{2}\frac{dx}{x^{3/2}}\right) = \left(1, -\frac{1}{2}\frac{1}{x^{3/2}}\right)dx$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{l} = (xy, x^2)\cdot\left(1, -\frac{1}{2}\frac{1}{x^{3/2}}\right)dx$$

$$= \left(xy - \frac{1}{2}\frac{x^2}{x^{3/2}}\right)dx = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)dx$$

$y = 1/\sqrt{x}$

FACULTAD DE FÍSICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA II
(MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA FÍSICA)
Ciudad Universitaria s/n. 28040 Madrid
Teléfono y fax 913944557

$$= \frac{\sqrt{x}}{2}\,dx$$

(cont)

$$\int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{2}\int_4^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{3}\left[x^{3/2}\right]_4^1$$

$$= \frac{1}{3}(1-8) = -\frac{7}{3}$$

$$\boxed{\int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\frac{7}{3}}$$

- C4 is very much alike C1: $x=1$ and y goes from 1 to 0.

$$d\vec{l} = (0, dy) = (0,1)\,dy$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{l} = x^2\,dy \underset{x=1}{=} dy$$

$$\int_{C_4} \vec{F}\,d\vec{l} = \int_1^0 dy = -1 \quad \boxed{\int_{C_4} \vec{F}\cdot d\vec{l} = -1}$$

Therefore

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0 + 8 - \frac{7}{3} - 1 = 7 - \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\boxed{\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = \frac{14}{3}}$$

Now we need to obtain the same result with the double integral.

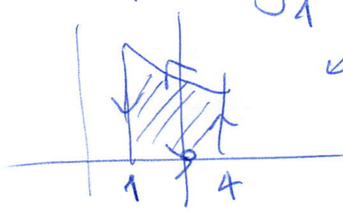
$$P = xy, \quad Q = x^2, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x$$

the 3rd component of rot $\vec{F}$ (en inglés curl $\vec{F}$)

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= \iint_A x\,dx\,dy = \int_1^4 dx\, x \int_0^{1/\sqrt{x}} dy = \int_1^4 dx\,\frac{x}{\sqrt{x}}$$

see this picture



$$\underset{\text{cont}}{=} \int_1^4 dx\sqrt{x} = \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\cdot[8-1]$$

$$= \frac{14}{3}$$

$$\boxed{\iint dx\,dy \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{14}{3}}$$

Which one is easier? To me the area integral, the double integral. It is faster to calculate.