UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

10 de Enero de 2020

IEC: Examen Final de Cálculo
Curso 2019/20

Nombre y Apellidos:

Firma y DNI:

No se darán puntos por respuestas sin la debida justificación. El examen son 100 puntos. Cada punto vale 0.04, asi que la nota máxima que se puede obtener es 4.

1. [12pt] Calcular las constantes a, b en el desarrollo en serie de potencias en torno a $x = 0$ que sigue,
$$\frac{1}{4+4x+x^2} = \frac{1}{4} - \frac{x}{4} + ax^2 + bx^3 + \frac{5x^4}{64} + \cdots .$$
Hágalo como quiera pero lo más corto y rápido es dividiendo *a la rusa* como nos enseñaron en el Bachillerato.

2. [12pt] Calcular la integral triple
$$\iiint (x+y+z)\, dx\, dy\, dz$$
extendida a la region $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 2$ del primer octante. Nota: Esta integral, o muy parecida, se la mandé como deberes antes de Navidad.

3. [55pt] Sea A la región del primer cuadrante acotada por $x = 0$ y $x = -y^2 + y$, y sea el campo vectorial $\mathbf{F} = (x + y, xy)$. Demostrar el *teorema de la divergencia* en el plano, es decir,
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dl = \iint_A \operatorname{div} \mathbf{F}\, dxdy.$$
En otras palabras, calcule las integrales del lado de la izquierda y del lado de la derecha del teorema y compruebe que son iguales como Gauss afirma. Recuerde que $\mathbf{n}\, dl = (dy, -dx)$.

   Se pide además: 1) orientar bien la curva C, 2) pintar algún vector $\mathbf{n}$, que es un vector unitario perpendicular a cada punto de la curva C y apuntando hacia afuera, 3) ¿qué curva, la recta o la parábola, es atravesada por más líneas de campo? (les explico en la pizarra lo que pido, que tardo menos)

   Ayuda: El valor que resulta de las integrales es un número racional. El numerador es un primo menor que 15 y el denominador es divisible ente 6.

4. [6pt] Sea $r = uvw - u^2 - v^2 - w^2$ donde $u = y + z$, $v = x + z$, $w = x + y$. a) Encontrar $\dfrac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}$ y r_{ww}. b) Usar la regla de la cadena para encontrar $\partial r/\partial x$ y $\partial r/\partial y$. Deje el resultado en terminos de u, v, w que es más sencillo que en x, y, z.

5. [15pt] Sean los campos vectoriales $\mathbf{A} = (x, -y)$, $\mathbf{B} = (x^2 - y, x + y^3)$, $\mathbf{C} = (x^2 - y^2, -2xy)$. a) Calcular la divergencia y el rotacional de cada uno de ellos. b) Decir qué campo de los tres (puede que la respuesta no sea única) es conservativo hallando la función potencial de la que procede. c) Para el campo del apartado anterior, calcular la integral de línea a lo largo de la curva pintada en la pizarra.

(1) $$\frac{1}{4+4x+x^2} = \frac{1}{4} - \frac{x}{4} + ax^2 + bx^3 + \frac{5}{64}x^4 - \dots$$

Dividing ('long division'):

$$\frac{1}{4+4x+x^2} = \frac{1}{4\left(1+x+\frac{x^2}{4}\right)}$$

más fácil que dividir entre $4+4x+x^2$

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1+x+x^2/4 \\ \cline{2-2} -1-x-\frac{x^2}{4} & 1-x+\frac{3}{4}x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5}{16}x^4-\dots \\ \hline \cancel{-x}-\frac{x^2}{4} & \\ x+x^2+\frac{x^3}{4} & \\ \hline x^2\frac{3}{4}+\frac{x^3}{4} & \\ -\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{16}x^4 & \\ \hline \cancel{-\frac{x^3}{2}}-\frac{3}{16}x^4 & \\ \cancel{\frac{x^3}{2}}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{8} & \\ \hline x^4\frac{5}{16}+\frac{x^5}{8} & \end{array}$$

$\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}-\frac{3}{16}=\frac{8-3}{16}=\frac{5}{16}$

Suficiente: ya conozco a y b y saco el coef de x^4 para comprobar con el enunciado.

Thus:

$$\frac{1}{4+4x+x^2} = \frac{1}{4}\left[1-x+\frac{3}{4}x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5}{16}x^4-\dots\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{a=\frac{3}{16} \quad b=-\frac{1}{8}}$$

Y además compruebo que el coef de $x4$ esté bien en mis cálculos porque coincide con lo que dice el enunciado.

⌈Hay otras posibilidades para hacer este ejercicio: por ejemplo

$$\frac{1}{4+4x+x^2} = \frac{1}{(x+2)^2}.$$

Como

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x/2} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots\right],$$

"serie geométrica"

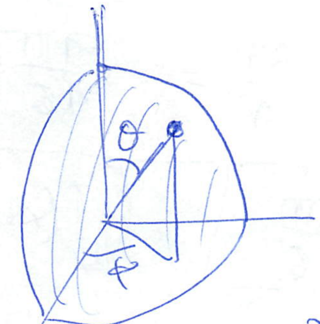
we deduce that

$$\frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{4}\left[1 - x + x^2\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}_{3/4} + \dots\right]$$

⌊

---

② La integral está extendida a un volumen comprendido entre la ~~esfera~~ esfera de radio 1 $(x^2+y^2+z^2=1)$ y la esfera de radio $\sqrt{2}$ $(x^2+y^2+z^2=2)$. De cualquier manera, y sea cual sea el integrando, haremos la integral en esféricas precisamente por "forma de la esfera",



En esféricas

$x = r\sin\theta\cos\phi$
$y = r\sin\theta\sin\phi$
$z = r\cos\theta$

integrand: $x+y+z = r\left[\cos\theta + \sin\theta(\cos\phi+\sin\phi)\right]$

$$I = \iiint (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint r^3\left[\cos\theta + \sin\theta(\cos\phi+\sin\phi)\right]\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi.$$

$|J| = r^2\sin\theta$, es decir

$dx\,dy\,dz = \boxed{r^2\sin\theta}\,dr\,d\theta\,d\phi$

Jacobiano en valor absoluto.

Se ponen los límites a los integrales

$$= \underbrace{\int_1^{\sqrt{2}} r^3\, dr}_{=\frac{3}{4}} \underbrace{\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi}_{} \left[\cos\theta \sin\theta + \sin^2\theta(\cos\phi + \sin\phi)\right]$$

primer octante es $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Calculating integrals:

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \cos\theta \sin\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{4}\left[-1-1\right] = 1/2.$$

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta\,(1-\cancel{\cos 2\theta}) = \pi/4$$

0 the integral

$$\int_0^{\pi/2} d\phi\,(\cos\phi + \sin\phi) = \left[\sin\phi - \cos\phi\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 1 - [-1] = 2$$

All together now ("The Beatles")

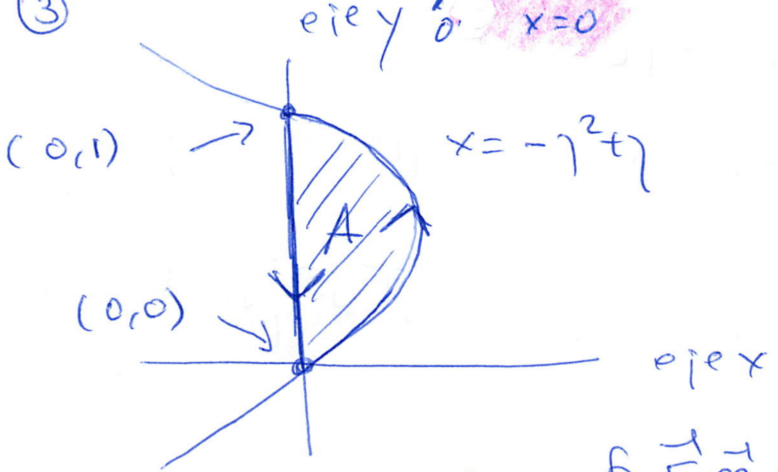
$$I = \frac{3}{4}\left[\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\pi}{4}\right] = \frac{3}{4}\cdot\frac{3\pi}{4} = \frac{9\pi}{16}$$

La integral pedida es $\boxed{I = \frac{9\pi}{16} = \iiint (x+y+z)\,dx\,dy\,dz}$

vista desde Y
z=0
el volumen al ser

se extiende la integral

(3)



$\vec{F} = (x+y, xy)$

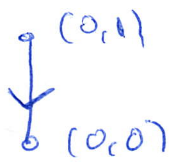
LHS is $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\, dl$

RHS is $\iint_A \operatorname{div} \vec{F} \cdot dx\,dy$

Estos puntos hay que calcularlos. Es donde se corta el eje de las y es ($x=0$) con la parábola $x=-y^2+y$. Se corta en (0,1) (0,0).

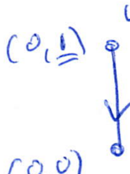
(LHS) $C = C_1 + C_2$

C_1 is the curve



C_2 is the curve

Integral de línea sobre C_1



$x=0$, $dx=0$

$\vec{n}\, dl = (dy, -dx) = (dy, 0) = (1,0)\, dy$

$\vec{F}\cdot(1,0)\, dy = (x+y, xy)\cdot(1,0)\, dy$

$= (x+y)\, dy$

$= y\, dy$

$x=0$

$\int_{C_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dl = \int_1^0 y\, dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^0 = -1/2$

Integral de línea sobre C_2

$x = -y^2+y$

$dx = (-2y+1)\, dy$

$\vec{n}\cdot dl = (dy, -dx) = (dy, (2y-1)\, dy) = (1, 2y-1)\, dy$

$$\vec F\cdot(dy,-dx) = [(x+y)+xy(2y-1)]\,dy$$

$x=-y^2+y$

$$= [(-y^2+2y)+(y-y^2)y(2y-1)]\,dy$$

operando

$$= [2y-2y^2+3y^3-2y^4]\,dy$$

(0,1)

(0,0)

$$\int_{C_2}\vec F\cdot\vec n\,dl = \int_0^1 (2y-2y^2+3y^3-2y^4)\,dy$$

$$= 1-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{2}{5}$$

$$= \frac{3}{5}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$$

$$= \frac{36-40+45}{60} = \frac{41}{60}$$

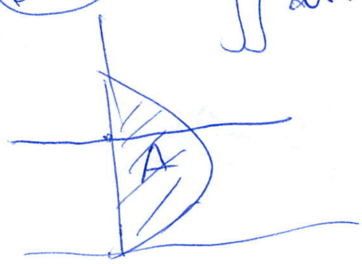
Juntando ambas integrales:

$$\oint \vec F\cdot\vec n\,dl = -\frac{1}{2}+\frac{41}{60} = \frac{-30+41}{60} = \frac{11}{60}$$

Resultado LHS: $\boxed{\oint \vec F\cdot\vec n\,dl = \frac{11}{60}}$

— o — o — o — o — o — o — o — o — o — o —

RHS:



$$\iint \mathrm{div}\,\vec F\,dx\,dy = \iint_A (1+x)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 dy\int_0^{-y^2+y}(1+x)\,dx = \frac{11}{60}$$

Por qué? $\int_0^{-y^2+y}(1+x)\,dx = \left[x+\frac{x^2}{2}\right]_0^{-y^2+y}$

$$= y-y^2+\frac{1}{2}(y-y^2)^2$$

$$= y-y^2+\frac{1}{2}[y^2-2y^3+y^4]$$

$$= y-\frac{y^2}{2}-y^3+\frac{1}{2}y^4$$

L

$$\int_0^1 d\eta \left[\eta - \frac{\eta^2}{2} - \eta^3 + \frac{\eta^4}{2}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10}$$

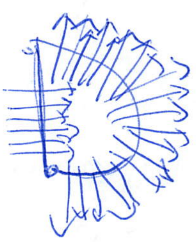
$$= \frac{30-10-15+6}{60} = \frac{11}{60}$$

Resultado RHS: $\boxed{\iint_A \operatorname{div}\vec{F}\, dx\, d\eta = 11/60}$.

Como ven, Gauss tenía razón, el teorema es una identidad: $\frac{11}{60} = \frac{11}{60}$ y

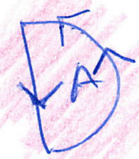
"$\frac{11}{60}$" líneas de campo atraviesan netamente la curva  . De ellas

"$\frac{41}{60}$" son salientes y salen por la parábola



y "$-\frac{1}{2}$" son entrantes por la recta. Como salen más que entran ($\frac{41}{60} \simeq 0.683$, $\frac{1}{2} = 0.5$, no muchas más), o sea dicho, en el área A, en el interior de C hay más puntos fuente de campo $\vec{F}$ que sumideros, o dicho de otro modo, el interior de C se comporta como fuente de líneas de corriente.

La curva se orienta así:



: dejando a la izda al área A

Si se orientara así:  , el teorema de una identidad, aun la divergencia no sería que

LHS $-\frac{11}{60}$. RHS $\frac{11}{60}$,

por eso se orienta como he dicho, para que salgan ambos lados iguales.

4) $r = uvw - u^2 - v^2 - w^2$

$u = y + z$

$v = x + z$

$w = x + y$

a) $\frac{\partial r}{\partial u} = vw - 2u$, $r_w = uv - 2w$

$\boxed{\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 r}{\partial v \partial u} = w}$, $\boxed{r_{ww} = -2}$

r es polinómica en u, v, w, de clase $C^2(\Omega)$ por lo tanto: las derivadas cruzadas son iguales.

b) Regla de la cadena:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial r}{\partial w} \cdot \underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}}_{=1}$$

$$= \frac{\partial r}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial w} = uw - 2v + uv - 2w$$

$$\boxed{\frac{\partial r}{\partial x} = u(w+v) - 2(v+w) = (v+w)(u-2)}$$

Igualmente,

$$\boxed{\frac{\partial r}{\partial y} = (u+w)(v-2)}$$

5) $\vec{A}, \vec{C}$ tienen div y rotacional nulos. $\vec{B}$ no tiene nula ni la divergencia ni el rotacional. Veámoslo.

a) $\operatorname{div} \vec{A} = 1 - 1 = 0$

escalar = una cantidad numérica, con sólo magnitud.

$\vec{A} = (x, -y)$, $\vec{B} = (x^2 - y, x + y^3)$, $\vec{C_1} = (x^2 - y^2, -2xy)$

$$\vec{rot}\,\vec{A} = \vec{curl}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ & & \end{vmatrix} = \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \underline{\underline{0}}$$

vector (el $\vec{0}$)

$P = x, \quad Q = -y$

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 2x + 3y^2$ escalar

$\vec{rot}\,\vec{B} = \vec{k}\,[1+1] = 2\vec{k}$ vector

$P = x^2 - y, \quad Q = x + y^3$

$\vec{div}\,\vec{C} = 2x - 2y = 0$ escalar ≡ magnitud

$\vec{rot}\,\vec{C} = 0$ vector

$P = x^2 - y^2, \quad Q = -2xy$

Contestando a las preguntas

b) Como $\vec{rot}\,\vec{B} \neq 0$, $\vec{B}$ no ~~puede ser~~ es conservativo. Los únicos candidatos son $\vec{A}$ y $\vec{C}$. Si encontramos la función (si existe) f y g tal que

escalar, no vector

$$\vec{A} = \vec{grad}\,f$$

$$\vec{C} = \vec{grad}\,g$$

entonces $\vec{A}$ será conservativo con potencial f y $\vec{C}$ será conservativo con potencial g. En este caso tanto f como g son muy fáciles de sacar (con uno basta: f ó g)

$$f = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C$$

const arbitraria

$$g = \frac{x^3}{3} - xy^2 + K$$

Hemos encontrado f, luego $\vec{A}$ es conservativo.
Hemos encontrado g, luego $\vec{C}$ es conservativo.

Conservativo es lo mismo que path-independent
o sea, que $\int_C \vec{A}\,d\vec{l}$ sólo depende del punto inicial y final de la curva C

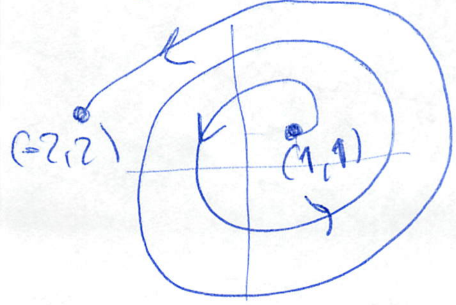
¿why?

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_C \operatorname{grad} f \cdot d\vec{l}$$

producto escalar

$$= \int_C \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{\operatorname{grad} f} \cdot \underbrace{(dx, dy)}_{d\vec{l}}$$

C es la curva



$$= \int_C \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}_{\substack{\parallel \text{ por definición} \\ df}}$$

no confundas la curva C con el campo $\vec{C}$. Nada tienen que ver, sólo que los hemos denotado (mi error) con la misma letra.

$$= \int_C df$$

punto final de C

$$= [f]_{(1,1)}^{(-2,2)}$$

punto inicial de C

$$= \left[\frac{1}{2}(x^2 - y^2)\right]_{(1,1)}^{(-2,2)} = \underline{\underline{0}}$$

Si coge usted $\vec{C}$: $\int_C \vec{C}\cdot d\vec{l} = \int_C dg = [g]_{(1,1)}^{(-2,2)}$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - xy^2\right]_{(1,1)}^{(-2,2)}$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 - \left(\frac{1}{3} - 1\right)$$

$$= -3 + 9$$

$$= \underline{\underline{6}}$$

Por este razón en el examen no les di la ecuación de la espiral, sólo el punto inicial y el final.