Examen de Julio 2019

1

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

27 de Junio de 2019

IET: Examen Final de Julio de Cálculo
Curso 2018/19

Nombre y Apellidos:

Firma y DNI:

El examen son 300 puntos normalizables a 10.

1. [30+10+20+20pt] Escribir el resultado y **nada más que el resultado**, no hace falta justificación alguna, de los aparttados a, b, c, d que siguen. Use los recuadros correspondientes.

30 a) El valor de la derivada $\dfrac{d^{20}}{dx^{20}}\Big(\dfrac{x^2}{1+3x^2}\Big)$ en $x = 0$.

$= -19683 \times 20! \; \boxed{= -3^9 \cdot 20! \quad (\text{número de 23}} \text{ dígitos!!)}$ que no escribo.

absolutamente
b) Dos ejemplos de series numéricas (sencillas) que sean convergentes pero no convergentes. (dentro)

10

serie 1 = , serie 2 =

20 c) Encontrar tres valores de $\log(i + \sqrt{3})$ escritos en la forma $x + iy$ con x, y reales.

$\boxed{\log 2 + i\frac{\pi}{6} \; ; \; \log 2 + i\, 13\frac{\pi}{6} \; ; \; \log 2 - i\, 11\frac{\pi}{6}.}$

20 d) El módulo de $\dfrac{3\,e^{i\theta} - i}{i\,e^{i\theta} + 3}$ es

$\boxed{1}$

P1 [90pt] Sean los campos vectoriales $\mathbf{F}_1 = -2y\mathbf{i} + (z - 2x)\mathbf{j} + (y + z)\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_2 = y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$.

10 ✗ a) Calcular la divergencia de $\mathbf{F}_1$.

20 2✗ b) ¿Es $\mathbf{F}_1$ conservativo? ¿Es $\mathbf{F}_2$ conservativo?

50 5✗ c) Encontrar el trabajo hecho por $\mathbf{F}_2$ sobre una partícula que se mueve sobre la cicloide $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$ (a es una longitud constante).

10 ✗ d) Utilice el *Teorema de Green* para calcular el área del primer arco de la cicloide (ver pizarra)

P2 [40pt] Calcular la integral doble

20 2✗
20 2✗

$$\int\!\!\int_A (1 - 2xy)\, dx\, dy$$

donde A es la región pintada en la pizarra.

(sigue a la vuelta)

2 2

P3 [90pt] Sea la serie numérica $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\log n}{n}$.

50= 5x
40= 4x

a) Determinar si es convergente o divergente y explicar por qué (el criterio que usa).

b) Si para estimar el valor s de la suma de la serie, caso de que fuera convergente, se utiliza S_6, es decir, la suma de los seis primeros términos, ¿cuál sería el error de la aproximación que el teorema de estimación del error de las series alternadas establece? Demuestre este teorema (lo hicimos en clase) aplicándolo al caso propuesto.

---

1 a) Solut: $-3^9 \cdot 20!$

Cómo se hace...

serie de Taylor de una función analítica en un entorno de $x=0$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(20)}(0)}{20!}x^{20} + \dots$$

esto es lo que pide el problema: $f^{(20)}(0)$.

Pasos:

1) Escribir la serie de Taylor de $\frac{x^2}{1+3x^2}$ en $x=0$

2) Buscar el coeficiente de x^{20}.

3) y listo!!

Sea la serie (la saben ustedes de memoria, o la tienen que saber, es obligatorio)

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \dots \qquad |u|<1$$

cambio u por $3x^2$

$$\frac{1}{1+3x^2} = 1 - 3x^2 + (3x^2)^2 - (3x^2)^3 + (3x^2)^4 - \dots$$
$$= 1 - 3x^2 + 3^2x^4 - 3^3x^6 + 3^4x^8 - \dots,$$

multiplico por x^2 y busco el coeficiente de la serie en la potencia x^{20}:

$$\frac{x^2}{1+3x^2} = x^2 - 3x^4 + 3^2x^6 - 3^3x^8 + 3^4x^{10} + \dots$$
$$\dots - 3^9x^{20} + 3^{10}x^{22} - \dots, \qquad |x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$$

no se pide

entonces

$$\frac{f^{(20)}(0)}{20!} = \frac{1}{20!}\frac{d^{20}}{dx^{20}}f(x)\bigg|_{x=0} = -3^9$$

luego

$$\boxed{f^{(20)}(0) = -3^9 \cdot 20!}$$

b) 200.000 ejemplos. Convergentes pero no absolutamente convergentes:

1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$

2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \dots = \log 2$

3) Lo del problema P3.

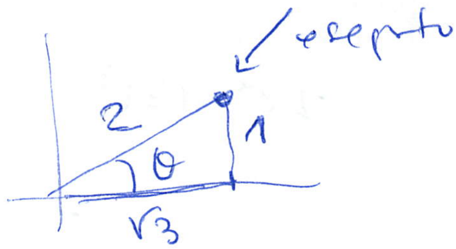
$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n} = \frac{\log 2}{2} - \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 4}{4} - \frac{\log 5}{5} + \dots$

4) .... en fin...

---

c) $\log(i+\sqrt{3})$

Representación de $i+\sqrt{3}$ en el plano complejo



$\sin\theta = 1/2$, $\cos\theta = \sqrt{3}/2$, then $\theta = \frac{\pi}{6} = 30°$

Esto significa que $i+\sqrt{3} = 2e^{i\pi/6}$ or that

$$i+\sqrt{3} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)} = 2e^{i\,13\pi/6}$$

or that

$$i+\sqrt{3} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}-2\pi\right)} = 2e^{-i\,11\pi/6},$$

por lo que

$$\log(i+\sqrt{3}) = \log 2 + i\pi/6$$

or $$\log(i+\sqrt{3}) = \log 2 + i\frac{13\pi}{6}$$

or $$\log(i+\sqrt{3}) = \log 2 - i\frac{11\pi}{6}$$

or $$\log 2 + i\pi\left(\frac{1}{6} + 2k\right)$$

with $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

↑ los escritos arriba.

---

a) El módulo de $z = \frac{3e^{i\theta} - i}{ie^{i\theta} + 3}$ es 1

Lo que siempre funciona:

1) A la vista de z escribir su complejo conjugado z^*
2) multiplicar $z \cdot z^*$
3) El módulo de z es la $\sqrt{zz^*} = |z|$

En nuestro caso:

$$z = \frac{3e^{i\theta} - i}{ie^{i\theta} + 3} \quad , \quad z^* = \frac{3e^{-i\theta} + i}{-ie^{-i\theta} + 3},$$

$$zz^* = |z|^2 = \left(\frac{3e^{i\theta} - i}{ie^{i\theta} + 3}\right) \cdot \left(\frac{3e^{-i\theta} + i}{-ie^{-i\theta} + 3}\right)$$

$$= \frac{9 + 3ie^{i\theta} - 3ie^{-i\theta} + 1}{1 + 3ie^{i\theta} - 3ie^{-i\theta} + 9}$$

$$= 1$$

numerator and denominator are equal:

$|z|^2 = 1$ is $\boxed{|z| = 1}$ only (never nunca jamais $\cancel{|z| = -1}$) un número negativo.

(P1) $\vec{F_1} = (-2y, z - 2x, y + z)$, $\vec{F_2} = y\vec{i} + 2x\vec{j}$

$= -2y\vec{i} + (z - 2x)\vec{j} + (y + z)\vec{k}$ → 1ª comp, 2ª, 3ª

a) $\text{div}\, \vec{F_1} \underset{\text{por definición}}{=} \frac{\partial}{\partial x}(-2y) + \frac{\partial}{\partial y}(z - 2x) + \frac{\partial}{\partial z}(y + z)$.

$\boxed{\text{div}\, \vec{F_1} = 1}$

$= 0 + 0 + 1$

$= 1$: es un número, nunca un vector.

b) Les contaré aquí el cálculo de

$\vec{\text{rot}}\, \vec{F_1}$, $\vec{\text{rot}}\, \vec{F_2}$

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2y & z-2x & y+z \end{vmatrix} = \vec{i}\Big(\overbrace{\tfrac{\partial}{\partial y}(y+z)}^{=1} - \overbrace{\tfrac{\partial}{\partial z}(z-2x)}^{=1}\Big)$$

$$-\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(y+z) - \frac{\partial}{\partial z}(-2y)\right)$$

$$+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(z-2x) - \frac{\partial}{\partial y}(-2y)\right)$$

$$= \vec{i}\,(1-1) + \vec{j}\,(0-0) + \vec{k}\,(-2+2)$$

$$= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$= \vec{0}.$$

(por esto)

$\vec{F_1}$ es conservativo. De hecho se puede escribir como $\vec{F_1} = -\text{grad}\, f$ con $f = -2xy + zy + \frac{z^2}{2} + C$ ← const arbitraria.

a usted no se le pide f.

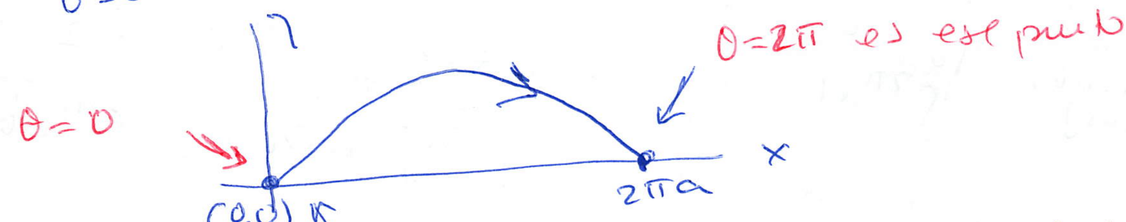
$$\vec{\text{rot}}\,\vec{F_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 2x & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\,0 + \vec{j}\,0 + \vec{k}\,(2-1)$$

$$= \vec{k}$$

como $\vec{\text{rot}}\,\vec{F_2} \neq 0$, $\vec{F_2}$ no es conservativo, es decir, $\vec{F_2}$ no puede escribirse como el gradiente de nada.

c) La cicloide
$$x = a(\theta - \sin\theta)$$
$$y = a(1-\cos\theta)$$

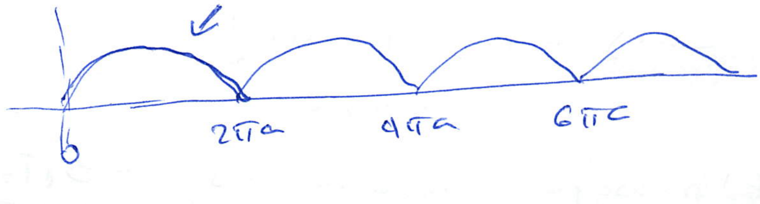
de $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$ es



$\theta = 0$ is $x = 0, y = 0$, el origen de coordenadas

$\theta = 2\pi$ is $x = 2\pi a$, $y = 0$, es el pto final.

(De hecho la cicloide es 1er arco de la cicloide)



Cálculo del trabajo $\int_{\text{desde el } (0,0)}^{\text{hasta el } (2\pi a, 0)} \vec{F_2}\cdot d\vec{l}$

$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$ « a es una longitud constante

$d\vec{l} = (dx, dy) = a\overbrace{(1-\cos\theta, \sin\theta)}^{\text{vector}}\, d\theta$

$dx = a(1-\cos\theta)\,d\theta$
$dy = a\sin\theta\, d\theta$

producto escalar

$\vec{F_2}\cdot d\vec{l} = a(y, 2x)\cdot(1-\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$ ← Ya lo he hecho el producto escalar [y ahora es un vector]

$= a\left(y(1-\cos\theta) + 2x\sin\theta\right)d\theta$

$= a^2\left((1-\cos\theta)^2 + 2(\theta-\sin\theta)\sin\theta\right)d\theta$

en el ordenador

La integral $\int_{\text{desde } \theta=0}^{\text{Hasta } \theta = 2\pi} \vec{F_2}\cdot d\vec{l}$ es igual al trabajo pedido

$\text{trabajo} = a^2\int_0^{2\pi} d\theta\left[(1-\cos\theta)^2 + 2(\theta-\sin\theta)\sin\theta\right]$

$= a^2\int_0^{2\pi}\left[1 + \cos^2\theta - 2\cos\theta + 2\theta\sin\theta - 2\sin^2\theta\right]$

$\int_0^{2\pi} d\theta \cdot 1 = 2\pi$; $\int_0^{2\pi} d\theta \cos^2\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\,(1+\cancel{\cos 2\theta}) = \frac{2\pi}{2} = \pi$
o la integral

las integrales elementales [todas]

$\int_0^{2\pi} d\theta \cos\theta = 0$

$\int_0^{2\pi} d\theta\cdot \theta\sin\theta = \left[-\theta\cos\theta + \sin\theta\right]_0^{2\pi} = -2\pi$

$\int_0^{2\pi} d\theta \sin^2\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\,(1-\cancel{\cos 2\theta}) = \pi$
0 la integral

$\text{trabajo} = a^2\left[\underbrace{2\pi + \pi + 0 - 4\pi - 2\pi}_{= -3\pi}\right]$

$= -3\pi a^2$

$\boxed{\text{El trabajo pedido es } -3\pi a^2}$ Es negativo (pues vale!)

7

d) El Teorema de Green, aplicado al primer arco de la cicloide y al campo $\vec{F_2}$ es

$$\oint \vec{F_2}\, d\vec{l} = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$Q = 2x$, $P = y$ pues $\vec{F_2} = (P, Q)$.

Aquí A es el área del primer arco de la cicloide, precisamente el área pedida. Como

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1,$$

tenemos que

$$\iint_A 1\, dx\,dy = \oint \vec{F_2} \cdot d\vec{l}.$$

[o trabajo]

Conclusión

$$\iint_A dx\,dy = \text{Área de}$$ 

$$= \underset{\text{de C}}{3\pi a^2} + \underset{\text{de ahora.}}{0}$$

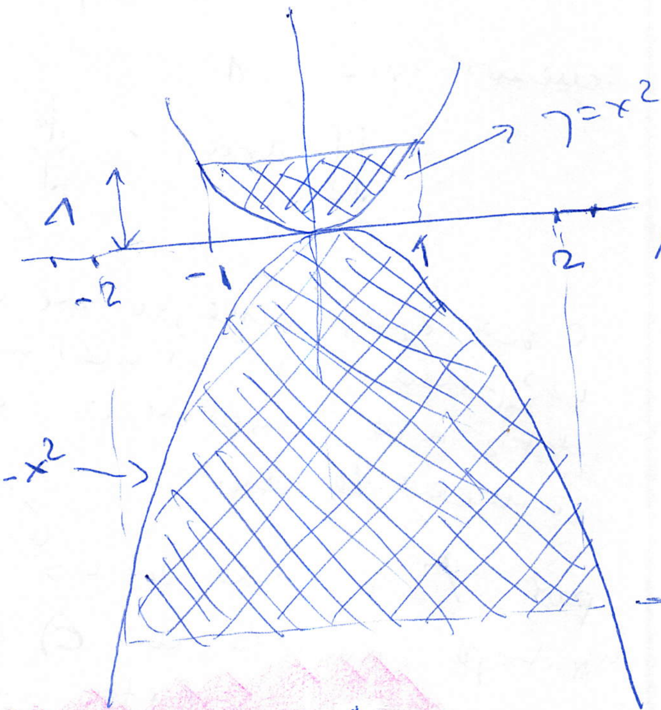
El área pedida es $\boxed{3\pi a^2}$ [cuenta que tb sale, el área, por $\int y\,dx$ en paramétricas] [Bachillerato]

---

12 $\iint_A (1-2xy)\,dx\,dy$

with A the area:

La integral pedida no es el área de nada. No es un área



Solución: $\iint_A (1-2xy)\,dx\,dy = 12$

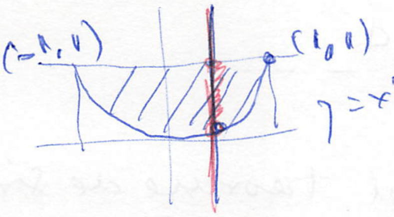
Cómo: lo más sencillo es dividir la integral en dos integrales, una sobre A_1 y la otra sobre A_2 con

FACULTAD DE FÍSICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA II
(MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA FÍSICA)
Ciudad Universitaria s/n. 28040 Madrid
Teléfono y fax 913944557

$$\iint_A = \iint_{A_1} + \iint_{A_2}$$

- $$\iint_{A_1} (1-2xy)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy\,(1-2xy) \underset{\uparrow}{=} 4/3$$

see below



Calculate,

$$\int_{x^2}^{1} dy\,(1-2xy) = 1-x^2 - x\left[y^2\right]_{y=x^2}^{y=1}$$
$$= 1-x^2 - x(1-x^4)$$
$$= 1-x^2-x+x^5$$

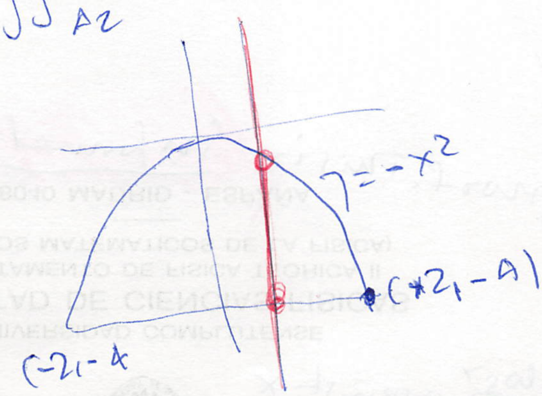
$$\int_{-1}^{1} dx\,(1-x^2\underbrace{-x+x^5}) = \int_{-1}^{1} dx\,(1-x^2)$$

la integral es 0 por simetría

$$= 2\int_0^1 dx\,(1-x^2)$$
$$= 2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$= 2\left(1-\frac{1}{3}\right)$$
$$= 4/3$$

- $$\iint_{A_2} (1-2xy)\,dx\,dy = \int_{-2}^{2} dx \int_{-4}^{-x^2} dy\,(1-2xy) \underset{\downarrow}{=} \frac{32}{3}$$

see next lines



$$\int_{-4}^{-x^2} dy\,(1-2xy) = -x^2+4 - x\left[y^2\right]_{y=-4}^{-x^2}$$
$$= -x^2+4-x(x^4-16)$$
$$= -x^2+4-x^5+16x$$

$$\int_{-2}^{2} dx\,(-x^2+4\underbrace{-x^5+16x}_{\text{0 la integral}}) = 2\int_0^2 dx\,(-x^2+4) = 2\left[-\frac{8}{3}+8\right]$$
$$= \frac{32}{3}$$

now $\iint_A = \iint_{A_1} + \iint_{A_2} = \frac{4}{3} + \frac{32}{3} = \frac{36}{3} = 12$,

as indicated

(P3) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n} = \frac{\log 2}{2} - \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 4}{4} - \dots$

Es una serie alternada.
Si cumple las tres condiciones del teorema de series alternadas es convergente. Vamos a ver que sí se cumplen las tres condiciones: llamando

$$a_n = \frac{\log n}{n}$$

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$ OK

(n crece más deprisa que el logaritmo). Si este límite no lo ve, use L'Hôpital:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = 0.$$

2) $a_n > 0$ for each n. Obviously. OK

3) $a_{n+1} > a_n$, at least for all $n \geq 3$

n	$\log n/n$
2	0.3466
3	0.3662
4	0.3466
5	0.3219
6	0.2986
⋮	⋮

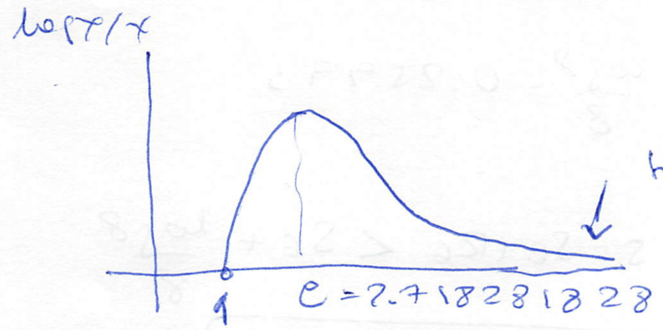
same number: $\frac{\log 4}{4} = \frac{2\log 2}{4} = \frac{\log 2}{2}$ (curious.)

But this is not a proof. This is informal

This is a proof

The picture of $y = \frac{\log x}{x}$ against x

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA II
(METODOS MATEMATICOS DE LA FISICA)
28040 MADRID - ESPAÑA
TELEF.: (34) (1) 394 51 98
FAX.: (34) (1) 394 51 97
TELEX: 47273 FFUC - E



the function $\frac{\log x}{x}$ has a maximum at $x = e$ and descends afterwards for $x > e$.

$$\left(\frac{\log x}{x}\right)' = \frac{1-\log x}{x^2}, \quad 1-\log x = 0 \text{ if } x = e$$

For $x > e$, $\frac{1-\log x}{x^2}$ is negative.

Then, 1,2,3 conditions $\Rightarrow$ $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$ is convergent. But not absolutely convergent since (another example for exercise 1b) (integral test):

$\sum^{\infty} \frac{\log n}{n}$ is divergent

$$0 < R_6 < \frac{\log 8}{8} = 0.25993$$

Then,

$$S_6 + 0 < S = S_6 + R_6 < S_6 + \frac{\log 8}{8}$$

or $\boxed{0.02569 < S < 0.28562}$

$$\begin{array}{r} 0.02569 \\ 0.25993 \\ \hline 0.28562 \end{array}$$

Maple says that $S \simeq 0.159869$. [Informativo sólo]

Lo mismo

$$0 < |S - S_6| < \frac{\log 8}{8} = 0.25993$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA II
(METODOS MATEMATICOS DE LA FISICA)
28040 MADRID - ESPAÑA
TELEF.: (34) (1) 394 51 98
FAX.: (34) (1) 394 51 97
TELEX: 47273 FFUC - E