①

Nov de 2018

Examen parcial

IEC Cálculo

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

30 de Noviembre de 2018

IEC: Examen Parcial de Cálculo
Curso 2018/19

Nombre y Apellidos: Evidentemente usted no tiene que

Firma y DNI: escribir 12 páginas de examen. Es la explicación pormenorizada del mismo, con pelos y señales.

No se darán puntos por respuestas sin la debida justificación. El examen son 120 puntos normalizables a 10.

cgthing
10+5+10+5
a b c

1. [30pt] De la ecuación polinomica

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

se sabe que: 1) todos los coeficientes a, b, c, d son reales, 2) ninguna de sus cuatro raíces es real, 3) el producto de dos de esas raíces es $13 + i$ y la suma de las otras dos es $3 + 4i$, donde $i = \sqrt{-1}$. Se pide calcular las constantes a, b y d. La constante c no se pide.

2. [4pt] Sin hacer **ningún cálculo** contestar a:

2 $\pi/2$ 1) ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de potencias de $\log(\cos x)$ alrededor de $x = 0$?

2 $\sqrt{5}$ 2) ¿Y de la serie de potencias de $\dfrac{1}{x^2+4}$ centrada en $x = 1$?

3. [16pt] Los ejercicios que siguen son muy cortos y se pueden hacer muy rápidos. Escribiendo dos o tres pasos, lo suficiente para justificar sus respuestas, calcular:

2 — $2^{1/4}$ 1) el módulo de $\sqrt{1-i}$,

4 — $32xy$ 2) la parte imaginaria de $(i + 1)^8 z^2$, siendo $z = x + iy$, con x, y reales,

4 — 3) escribir en la forma $x + iy$ con x, y reales el complejo $\cot(i \log 3)$;

6 — 4) la derivada $\dfrac{d^9}{dx^9} \log(1 + x^3)$ en $x = 0$.

10+10+10

4. [30pt] Escribir los tres primeros términos **no nulos** de la serie de potencias de $\log(\cos x)$ en un entorno de $x = 0$ (hay varias de hacerlo).

5+10
div reason

5. [15pt] Determinar si la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n^3)}$ es convergente o divergente.

6. [25pt] Encuentre el intervalo de convergencia, discutiendo también los puntos del borde, de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(n+1)}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{5^n(n^2+1)}$

	a)	b)	
2.5	$R=1$	$R=5$	2.5
5	$x=-1$ conv	$x=-5$ div	5
5	$x=1$ div	$x=5$ div	5

	a b c
1 –	10+5+10+5
2 –	2+2
3 –	2+4+4+6
4 –	10+10+10
5 –	5+10
6 –	5+10+10
	R borde borde

1 **nota previa**: Antes de hacer este problema el alumno tiene que saber que el polinomio $2z^2+5z-3$, que tiene las raíces $z=1/2$, $z=-3$, soluciones de

$$2z^2+5z-3=0,$$

se reescribe una vez conocidas las raíces como

$$2z^2+5z-3 = 2\left(z-\frac{1}{2}\right)(z+3).$$

En nuestro ejercicio sucede igual.

El enunciado dice que el polinomio

$$z^4+az^3+bz^2+cz+d$$

tiene coeficientes reales, por lo tanto las raíces del polinomio, es decir, las soluciones de

$$z^4+az^3+bz^2+cz+d=0$$

que sean complejas aparecen a pares: es decir, aparece una y aparece su compleja conjugada. Esto es un hecho esencial de los polinomios, en los que llevamos trabajando más de 500 años. Como no tiene soluciones

enunciado

reales (raíces reales, se entiende), todas son complejas. Todas son 4 porque el polinomio es de orden 4 (véase $z^4+\ldots$). Es decir, las raíces del polinomio son necesariamente

$$z_1 = A+iB,$$

$$z_1^* = A-iB, \qquad A, B, C, D: \text{ números reales}$$

$$z_2 = C+iD,$$

$$z_2^* = C-iD,$$

donde ni B ni D son cero. Más aún, al igual que en nuestra nota previa, el polinomio

---

*: indica el complejo conjugado, ej: $(3+4i)^* = 3-4i$

se reescribe como

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_1^*)(z-z_2^*).$$

Haciendo el producto de la dcha, e identificando coeficientes ~~vemos~~ que

$$a = -(z_1 + z_2 + z_1^* + z_2^*),$$

$$b = z_1 z_2 + z_1 z_1^* + z_1 z_2^* + z_1^* z_2 + z_1^* z_2^* + z_2 z_2^*$$

$$d = z_1 z_2 z_1^* z_2^*$$

$c =$ no lo escribo...

O sea, que a es la suma de las raíces cambiadas de signo, d es el producto, b la suma de los dobles productos....

El enunciado dice que

$$z_1 z_2 = 13 + i$$

luego si "complejo conjugo" también tendremos

$$z_1^* z_2^* = 13 - i$$

por lo que

$$z_1 z_2 z_1^* z_2^* = (13+i)(13-i) = 169 + 1 = 170,$$

que es d. $\boxed{d = 170}$. Tb dice el enunciado que

$$z_1^* + z_2^* = 3 + 4i$$

y por lo tanto

$$z_1 + z_2 = 3 - 4i,$$

así que

$$z_1 + z_2 + z_1^* + z_2^* = 6. \qquad \boxed{a = -6}$$

En cuanto a b,

$$b = \underbrace{z_1 z_2}_{13+i} + \underline{\underline{z_1 z_1^*}} + \underline{\underline{z_1 z_2^*}} + \underline{\underline{z_1^* z_2}} + \underbrace{z_1^* z_2^*}_{13-i} + \underline{\underline{z_2 z_2^*}},$$

pero los términos subrayados son

$$(z_1+z_2)(z_1^*+z_2^*) = (3-4i)(3+4i) = 25,$$

así que

$$b = 13+\cancel{i}+13-\cancel{i}+25 = 26+25 = 51,$$

$$\boxed{b=51}$$

→ c+b

Comentario: De hecho sé todo el polinomio, fíjense:

$$(z-z_1)(z-z_2) = z^2-(z_1+z_2)z+z_1z_2$$
$$= z^2-(3-4i)z+13+i$$

$$(z-z_1^*)(z-z_2^*) = z^2-(3+4i)z+13-i,$$

por lo que

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_1^*)(z-z_2^*) =$$
$$= \left(z^2-(3-4i)z+13+i\right)\left(z^2-(3+4i)z+13-i\right)$$
$$= z^4-6x^3+51x^2-70x+170$$

$$\boxed{a=-6,\ b=51,\ c=-70,\ d=170},\ \text{Bingo!!}$$

y sin esfuerzo casi... $\underbrace{z^4-6z^3+51z^2-70z+170=0}_{\text{el polinomio}}$

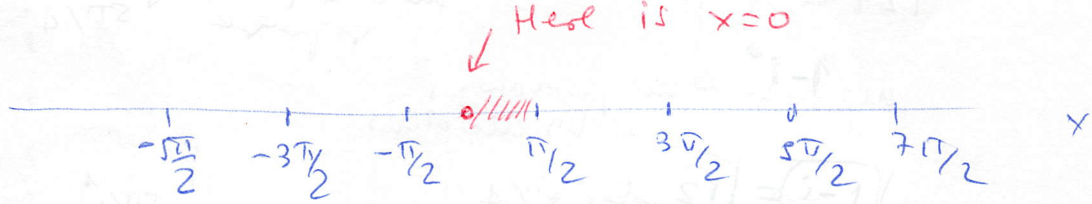
---

la más cercana

② 1) "Alrededor de x=0" ← ¿Qué distancia hay desde $x=0$ hasta la primera singularidad de $\log(\cos x)$? Esa distancia es el radio de convergencia. Como $\log u$ es singular en $u=0$ ($\nexists \log 0$), buscamos

28040 MADRID - ESPAÑA
(METODOS MATEMATICOS DE LA FISICA)
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA II
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
TELEX: 47273 FFUC - E
FAX.: (34) (1) 394 51 97
TELEF.: (34) (1) 394 51 98

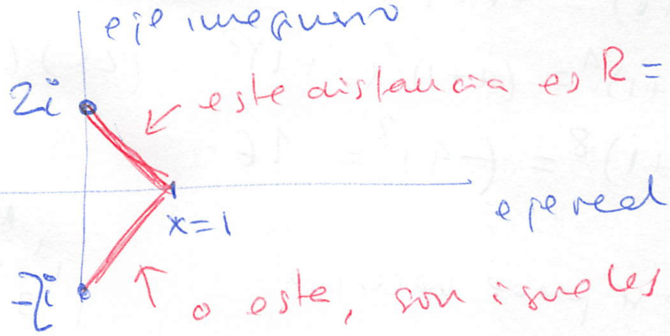
esos puntos, que corresponden a $\cos x = 0$ ó a
$x = \pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \dots$



The distance is $\pi/2$, so $\boxed{R=\pi/2}$ (es tb $\pi/2$ si se va a la izda)

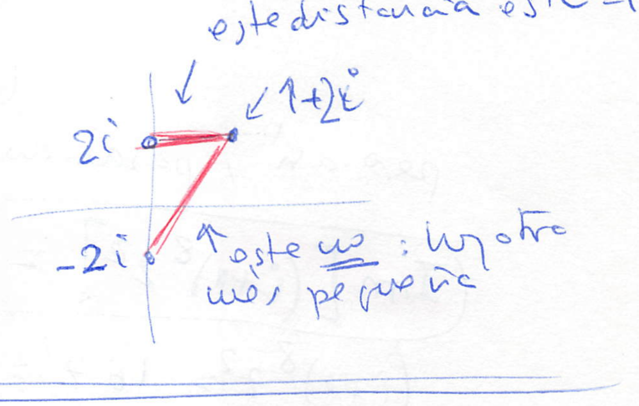
2) "centrada en $x=1$"
¿Qué distancia hay desde $x=1$ hasta la primera (la más cercana) singularidad de $\frac{1}{x^2+4}$? Las singularidades de $\frac{1}{x^2+4}$ están en los puntos donde se anula el denominador, que son $x \begin{cases} 2i \\ -2i \end{cases}$, $i=\sqrt{-1}$.

Pintemos



$\boxed{R=\sqrt{5}}$

Note: si fuera desde $x = 1+2i$,
$\boxed{R=1}$



---

3) 1) $z=\sqrt{1-i}$

Hay varias maneras; una: $|z|^2 = z \cdot z^*$. Como
$z=\sqrt{1-i}$, $z^*=\sqrt{1+i}$,
$z \cdot z^* = \sqrt{(1-i)(1+i)} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Por lo que $\boxed{|z| = 2^{1/4}}$

$2^{1/2} = \sqrt{2}$

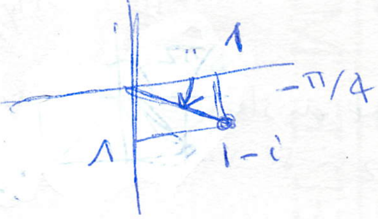
Otra: $z=\sqrt{1-i}$

$z^2 = 1-i$,, $|z^2| = |1-i| = \sqrt{2}$

$|z^2| = |z|^2 = \sqrt{2}$ or $|z| = \sqrt{\sqrt{2}} = 2^{1/4}$

módulo del producto es
el producto de los módulos

otra: $1-i = \sqrt{2}e$



$\sqrt{1-i} \to 2^{1/4} e$

$\hookrightarrow -2^{1/4} e$

In any case, $|z| = 2^{1/4}$

---

2) $(i+1)^8$ ... we first calculate $(i+1)^2$

$(i+1)^2 = -1+1+2i = 2i$: muy simple

$(i+1)^4 = (i+1)^2(i+1)^2 = (2i)(2i) = -4$

$(i+1)^8 = (-4)^2 = 16$

Tb se puede hacer con

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

→ 1 8 28 ......

pero así, pasando antes por $(i+1)^2$ es más fácil.

$$\boxed{\mathrm{Im}\left[(i+1)^8 z^2\right] = 32xy}$$ (sin la i) porque:

$$(i+1)^8 z^2 = 16 z^2 = 16(x+iy) = 16(x^2-y^2+2ixy)$$

otra manera: $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

$$(1+i)^8 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^8 = 16\underbrace{e^{i2\pi}}_{\overset{\shortparallel}{1}} = 16.$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA II
(METODOS MATEMATICOS DE LA FISICA)
28040 MADRID - ESPAÑA
TELEF.: (34) (1) 394 51 98
FAX.: (34) (1) 394 51 97
TELEX: 47273 FFUC - E

3) $\boxed{\cot(i\log 3) = -\frac{5}{4}i}$

cot es cotangente, o sea $\frac{\text{coseno}}{\text{seno}}$.

$$\cos(i\log 3) = \frac{1}{2}\left[e^{i(i\log 3)} + e^{-i(i\log 3)}\right]$$

$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$ por definición

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-\log 3} + e^{\log 3}\right]$$

$e^{-\log 3} = 1/3$, $e^{\log 3} = 3$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}+3\right].$$

$$\sin(i\log 3) = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{3}-3\right]$$

$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$

Then,

$$\cot(i\log 3) = \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}+3\right]}{\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{3}-3\right]} = \frac{i[1+9]}{[1-9]} = -i\frac{10}{8} =$$

$$= -i5/4,$$

as stated.

4) Tiene truco, claro está, ¿quién va a derivar 9 veces $\log(1+x^3)$?

Como

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad \text{si } |x|<1$$

Tiene que saberlo y saberlo sacar: es de los básicos

$$\log(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \frac{x^{12}}{4} + \dots$$

El coeficiente de x^9 es $\frac{f^{(9)}(0)}{9!}$ donde $f(x) = \log(1+x^3)$, así que

$$f^{(9)}(0) = \frac{d^9}{dx^9}\log(1+x^3)\Big|_{\text{en } x=0} = \frac{9!}{3} = 120960$$

Resultado

$$\boxed{\frac{9!}{3} = 120960 = \frac{d^9}{dx^9}\log(1+x^3) \text{ en } x=0}$$

---

(4) Como

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

(esto es en torno a $x=0$),

$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots\right)$$

$$= \log(1-u)$$

$$\text{con } u = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots$$

Expandimos

$$\log(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \cdots \quad \text{(esperamos dentro)}$$

Y ya no puede sino operar con cuidado:

ponemos bastantes

$$\log(\cos x) = \log(1-u)$$

$$= -\left[\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \cdots\right] \quad \leftarrow \text{esto es } -u$$

$$- \frac{x^4}{2}\left[\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \frac{x^6}{8!} + \cdots\right]^2 \quad \leftarrow \text{esto es } -\frac{u^2}{2}$$

$$- \frac{x^6}{3}\left[\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \frac{x^6}{8!} + \cdots\right]^3 \quad \leftarrow \text{esto es } -\frac{u^3}{3}$$

$$- \frac{x^8}{4}\left[\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \frac{x^6}{8!} + \cdots\right]^4 \quad \leftarrow \text{esto es } -\frac{u^4}{4}$$

$$+ \cdots$$

pero ya no lo piden aunque lo he puesto...

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA II
(METODOS MATEMATICOS DE LA FISICA)
28040 MADRID - ESPAÑA
TELEF.: (34) (1) 394 51 98
FAX.: (34) (1) 394 51 97
TELEX: 47273 FFUC - E

un punto $\dot{}$ con un punto $\dot{}$, $\ddot{}$ con $\ddot{}$, y así.

$$= -\frac{\dot{x}^2}{2} + x^4\left[\frac{\ddot{1}}{4!} - \frac{\ddot{1}}{2(2!)^2}\right]$$

$$+ x^6\left[-\frac{1}{6!} + \frac{1}{2!\,4!} - \frac{1}{3(2!)^3}\right]$$

$+ x^8$[... ya no lo piden] + ...

$$= \underbrace{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45}}_{\text{tres términos no nulos, no piden más.}} - \cdots$$

Result $\boxed{\log(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \cdots}$, $R = \frac{\pi}{2}$

prob 2

Otra manera de hacerlo: $(\log(\cos x))' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.

Conociendo la serie de potencias de $-\tan x$ entorno a $x=0$ e integrando término a término, $C_i = 0$ en este caso si se substituye $\log(\cos 0) = \log 1 = 0$ para encontrar la constante de integración, tb sale. Hágalo así ?

pruebe

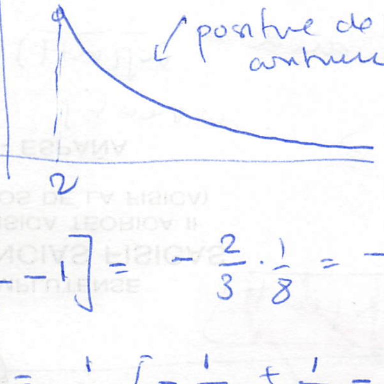
Hágalo así en casa y le saldrá. Quizás al alumno le guste más así.

---

(5) $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n^3} = \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots\right]$$

Use the integral test with $f(x) = \frac{1}{x\log x}$

$\frac{1}{x\log x} = f(x)$



positive decreasing factor. continuous, tends to zero at $x\to\infty$

$$\frac{1}{4!} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{3} - 1\right] = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} = -\frac{1}{12}$$

$$-\frac{1}{6!} + \frac{1}{2!\,4!} - \frac{1}{3\cdot 8} = \frac{1}{4!}\left[-\frac{1}{30} + \frac{1}{2} - 1\right] = \frac{1}{4!}\left[-\frac{1}{30} - \frac{1}{2}\right] = \frac{-16}{30\cdot 4!} = \frac{-16}{30\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$= -\frac{2}{30\cdot 3} = -\frac{1}{15\cdot 3} = -\frac{1}{45}$$

Yo la hago directamente. Ustedes quizás hagan el cambio $t = \log x$

10

$$\int^{\infty} \frac{1}{x\log x} = \int^{\infty} \frac{d(\log x)}{\log x} = \log(\log x)\Big]^{\infty} = \infty$$

The series is divergent.

---

(6) a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(n+1)} = \frac{x}{\log 2} + \frac{x^2}{\log 3} + \frac{x^4}{\log 5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

es una serie de potencias

$$a_n = \frac{1}{\log(n+1)}$$

clase: R no lleva x.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\log(n+1)}{\log(n+2)}\right| = 1$$

radio de convergencia

porque $\simeq \left|\frac{\log n}{\log n}\right|$

The series is convergent when $|x|<1$, or $\boxed{x\in(-1,1)}$.

$\boxed{x=1}$
$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} + \dots$$
$$> \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \boxed{\text{divergent}}$$

por comparación con la serie armónica $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$\log 2 < 2$
$\log 3 < 3$
$\vdots$
$\log n < n \;\; , \;\; \frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$

$\boxed{x=-1}$
$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+1)} = -\left[\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} - \dots\right]$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0$ and $\frac{1}{\log(n+1)} > 0$ for any $n \geq 1$

and $\frac{1}{\log 2} > \frac{1}{\log 3} > \frac{1}{\log 4} > \dots$ decreasing

By the alternating series test: $\boxed{\text{convergent}}$

$\boxed{\text{The series converges for } x\in[-1,1) \text{ only}}$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA II
(METODOS MATEMATICOS DE LA FISICA)
28040 MADRID - ESPAÑA
TELEF.: (34) (1) 394 51 98
FAX.: (34) (1) 394 51 97
TELEX: 47273 FFUC - E

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{5^n(n^2+1)}$ = una serie de potencias fts. $= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$"

$$a_n = \frac{n^2}{5^n(n^2+1)}$$

siempre en valor absoluto

Es una distancia

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n^2}{5^n(n^2+1)}}{\frac{(n+1)^2}{5^{n+1}((n+1)^2+1)}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| 5 \frac{((n+1)^2+1)\, n^2}{(n^2+1)\quad (n+1)^2} \right| = 5$$

La serie converge en $x \in (-5,5)$

$\boxed{x=5}$ $\sum_1^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$ = divergent (preliminary test)

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$ is not zero.

$\boxed{x=-5}$ $\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$ divergent too (preliminary test)

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$ is not zero

La serie converge en $x \in (-5,5)$

Note: siempre digo por qué es convergente o divergente. Digo el test, que lo pruebe. No me limito a decir "convergente" "divergente".

Comentarios que se me ocurren tras corregir el examen:

1) Sea la serie de potencias $\sum_1^{\infty} a_n x^n$. El radio de convergencia R, definido por

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

no lleva x's. Repito: no lleva x's

2) La parte imaginaria de un complejo ~~no~~ llevará, repito, sin la i, es un convenio matemático.

Ex: $3+i$, su parte imaginaria es 1

$\frac{11\mp 7i}{4}$, su parte imaginaria es $-\frac{7}{4}$.

3) Veo a menudo esta sandez.

$$\log(n+1) \simeq n, \quad \text{si } n\to\infty$$

Pues erran lo menos en millones de euros

n	$\log(n+1)$
999	$\log(1000) = 6.91$
999999	$\log(1000000) = 13.82$

Con 6.91€ pago un café (lo llevo en el  bolso)

Con 13.82 € una madeja de lana ,

incomparable con 999999€, ¡un piso en la Castellana!!!

...comparen...

Conclusión:

$\log(n+1)$ no es equivalente a n si n es grande nunca nunca nunca,

$\log(n+1)$ ó $\log n$ son ridículos, canijos, comparados con n si n es grande.

Lo que es cierto es $\log(1+x)\simeq x$ si $x\to 0$

Resumen

Cierto	Falso
$\log(1+x)\simeq x$ si $x\to 0$	$\log(1+x)\simeq x$ si $x\to\infty$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA II
(METODOS MATEMATICOS DE LA FISICA)
28040 MADRID - ESPAÑA
TELEF.: (34) (1) 394 51 98
FAX.: (34) (1) 394 51 97
TELEX: 47273 FFUC - E