ÁLGEBRA

Luis Martínez Alonso
http://jacobi.fis.ucm.es/luism

TEMA 1: NÚMEROS

1. LA ESTRUCTURA DE CUERPO

Sumar, restar, multiplicar y dividir

Los números reales $\mathbb{R}$ con las operaciones de **suma, resta, producto y división** proporcionan el ejemplo más usado de una estructura del álgebra denominada CUERPO.

Definición 1.

$$CUERPO = \left\{ \begin{array}{c} \textit{Conjunto cuyos elementos pueden sumarse, restarse, multiplicarse} \\ \textit{y dividirse (salvo entre cero) con las propiedades habituales} \end{array} \right\}$$

Un conjunto $\mathbb{K}$ se dice que es un cuerpo si sus elementos (que denotaremos $a, b, c. \ldots$) pueden sumarse y multiplicarse dos a dos:

$$\textit{Suma: } a + b \in \mathbb{K} \textit{ para todo par } a, b \in \mathbb{K}.$$

$$\textit{Producto: } a\, b \in \mathbb{K} \textit{ para todo par } a, b \in \mathbb{K}$$

con las propiedades siguientes:

1. **Suma y producto conmutativos**: $\forall a, b \in \mathbb{K}$

$$a + b = b + a, \quad a\, b = b\, a; \,.$$

2. **Elementos cero y unidad**: *Existen elementos $0 \in \mathbb{K}$ y $1 \in \mathbb{K}$ tal que $\forall a \in K$*

$$a + 0 = a, \quad 1\, a = a$$

3. **Elementos opuesto e inverso** : *Para todo $a \in \mathbb{K}$ existe su elemento opuesto $-a$ tal que*

$$a + (-a) = 0.$$

Para todo $a \in \mathbb{K}$ tal que $a \neq 0$ existe su elemento inverso $\frac{1}{a}$ (también denotado a^{-1}) tal que

$$a\, \frac{1}{a} = 1.$$

4. **Suma y producto asociativos**: $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ *se verifica*

$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad (a\,b)\,c = a\,(b\,c).$$

5. **Propiedad distributiva**: $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ *se verifica*

$$(a+b)\,c = a\,c + b\,c.$$

La **resta** *y la* **división** *se definen entonces como*

Resta: $a - b = a + (-b)$ *para todo par* $a, b \in \mathbb{K}$.

División: $\frac{a}{b} = a\,\frac{1}{b}$ *para todo par* $a, b \in \mathbb{K}$ *con* $b \neq 0$

Ejercicio 1. *Comentar en palabras:*

1. *¿Qué papel juega la propiedad conmutativa?*
2. *¿Qué papel juega la propiedad asociativa?*
3. *¿Qué papel juega la propiedad distributiva ?*

Ejercicio 2. *Probar que en un cuerpo solo hay un elemento cero y solo hay un elemento unidad.*

Ejercicio 3. *Probar que en un cuerpo solo hay un elemento opuesto para cada elemento.*

Ejercicio 4. *Probar que en un cuerpo solo hay un elemento inverso para cada elemento distinto de cero.*

Ejercicio 5. *Analizar si son un cuerpo los conjuntos* $\mathbb{N}$ *(naturales),* $\mathbb{Z}$ *(enteros) ó* Q *(racionales).*

2. NÚMEROS COMPLEJOS

El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos

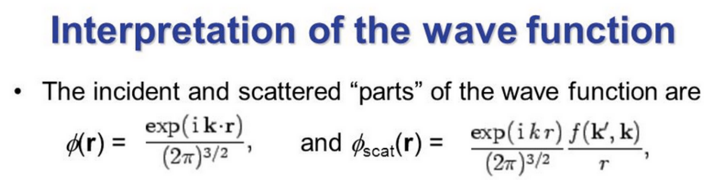

Figura 1: Párrafo de física cuántica.

La física cuántica se escribe con números complejos, así que hay que usarlos y dominarlos cuanto antes.

Definición 2.

$$\textit{NÚMEROS COMPLEJOS} = \left\{ \textit{Conjunto de puntos } z = x + i\,y \textit{ del plano con dos operaciones:} \right\}$$

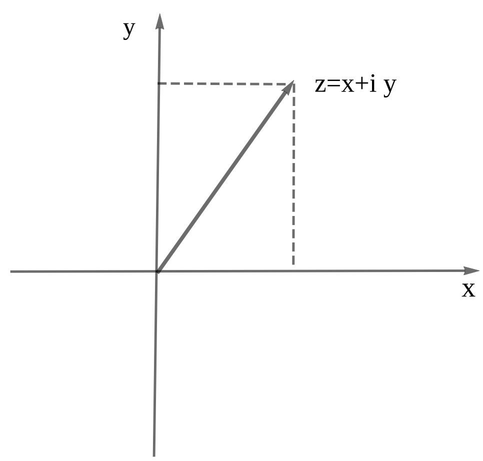

Figura 2: Números complejos.

Si $z = x + i\,y$, $z' = x' + i\,y'$ definimos:

- **Suma**: $z + z' = (x + x') + i\,(y + y')$.

- **Producto**: $zz' = (xx' - yy') + i\,(xy' + yx')$.
- Es como manejar símbolos de números reales, agrupando los términos proporcionales a i, y sustituyendo
$$i^2 = -1.$$
Todas las propiedades habituales: conmutativa, asociativa, distributiva se verifican.
- Dado $z = x + i\,y$, se denomina parte real de z a $\operatorname{Re} z = x$ y parte imaginaria de z a $\operatorname{Im} z = y$.
- El conjunto de los números complejos se denota $\mathbb{C}$. Las operaciones anteriores lo dotan de la estructura de CUERPO. Así el opuesto de $z = z + i\,y$ es
$$-z = -x - i\,y.$$
Los elementos 0 y 1 son los mismos que en $\mathbb{R}$. El inverso de $z = x + i\,y \neq 0$ es
$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2}.$$
Esta expresión, algo complicada, se entenderá mejor enseguida.

Definición 3. Conjugado de un número complejo $\overline{z}$ *de* $z = x + i\,y$
$$\overline{z} = x - i\,y.$$
Es simplemente cambiar de signo la parte imaginaria de z

Propiedades

1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
3. $\overline{z_1\,z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

Definición 4. Módulo *de de* $z = x + i\,y$
$$|z| = +\sqrt{x^2 + y^2}.$$
Es simplemente la longitud de z *como vector del plano.*

Propiedades

1. $|z|^2 = z\overline{z}$
2. $|\overline{z}| = |z|$.

Ejercicio 6. *Demostrar las propiedades anteriores.*

División de números complejos

Doados dos números complejos z_1 y $z_2 \neq 0$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{z_2\,\overline{z_2}} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Es decir, **Se multiplican numerador y denominador por el conjugado del denominador**. De esta forma el último denominador es un número real por el cual se dividen las partes real e imaginaria del numerador. Podemos ver ahora como surge la fórmula anterior para $1/z = \overline{z}/|z|^2$.

Operaciones en coordenadas polares

Definición 5. **Argumento** *de* $z \neq 0$*, es el conjunto* $\operatorname{Arg} z$ *de todos los ángulos orientados (con signo) que forma* z *con el semieje real positivo.*

Propiedades

1. Conocido uno de los argumentos θ de $z \neq 0$, construimos todos mediante el conjunto

$$\operatorname{Arg} z = \{\theta,\, \theta \pm 2\pi,\, \theta \pm 4\pi,\, \theta \pm 6\pi, \ldots\}.$$

2. Dado un número real θ_0, se define la **Determinación** del argumento entre θ_0 y $\theta_0 + 2\pi$ como la función que asigna a cada z no nulo su único argumento $\theta(z)$ que verifica

$$\theta_0 \leq \theta(z) < \theta_0 + 2\pi.$$

Es decir, el argumento que está en el intervalo $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$. Se denomina **Determinación principal** $\theta_p(z)$ la que varía en el intervalo $[-\pi, \pi)$

Definición 6. *Se denomina* **sistema de coordenadas polares** *del plano complejo* $\mathbb{C}$ *al par* (r, θ) *siendo* $r = |z|$ *y* $\theta = \theta(z)$ *cualquier función determinación del argumento. Por tanto*

$$z = x + i\,y, \begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Definición 7. *Dado* $\theta \in \mathbb{R}$ *se define*

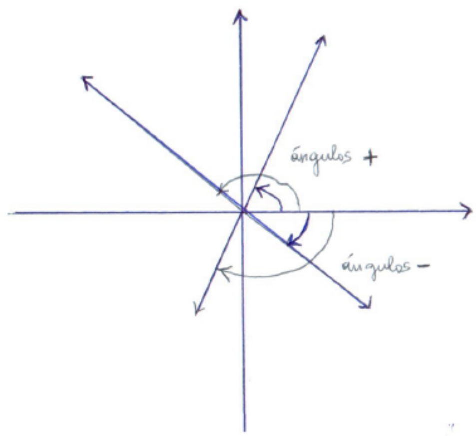

Figura 3: La determinación principal del argumento.

$$\boxed{e^{i\,\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta.}$$

Como consecuencia un número complejo $z \neq 0$ se puede escribir en la **forma polar**

$$\boxed{z = r\,e^{i\,\theta}}$$

siendo θ cualquiera de sus argumentos.

ESTAS DOS FÓRMULAS SON EXTRAORDINARIAMENTE IMPORTANTES

La definición de $e^{i\,\theta}$ no es un capricho ya que si sustituimos $\cos\theta$ y $\mathrm{sen}\,\theta$ por sus series de Taylor, el segundo miembro toma la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}.$$

Propiedades

1. $\left|e^{i\,\theta}\right| = 1.$
2. $e^{i\,\theta_1} e^{i\,\theta_2} = e^{i\,(\theta_1+\theta_2)}.$
3. $\frac{1}{e^{i\,\theta}} = e^{-i\,\theta} = \overline{e^{i\,\theta}}$
4. $e^{i\,\theta} = 1 \iff \theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \ldots.$

5. El significado del producto $z\,e^{i\alpha}$ es el de girar z un ángulo α.

Usando coordenadas polares ciertas operaciones son muy simples:

1. Producto en coordenadas polares :
$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\,\theta_1} r_2 e^{i\,\theta_2} = r_1 r_2 e^{i\,(\theta_1+\theta_2)}.$$
2. División en coordenadas polares $z_2 \neq 0$:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\,\theta_1}}{r_2 e^{i\,\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\,(\theta_1-\theta_2)}.$$
3. Potencias en coordenadas polares (Fórmula de De Moivre):
$$z^n = r^n\, e^{i\,n\,\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}\,(n\,\theta)).$$

Ejercicio 7. *Hacer las demostraciones de las propiedades anteriores.*

Otras operaciones con números complejos

Hemos visto las operaciones de suma y producto de números complejos. Veamos otras operaciones importantes, que se simplifican usando coordenadas polares.
Raíces de un número complejo. Todo número complejo $z \neq 0$ posee n raíces n-ésimas distintas. Sea $w = \rho e^{i\,\alpha}$ una raíz n-ésima de $z = r\,e^{i\,\theta}$
$$w^n = z = r\,e^{i\,\theta} \Longleftrightarrow \rho^n e^{i\,n\,\alpha} = r\,e^{i\,\theta}.$$
Tomando módulos queda
$$\rho^n = r \Longleftarrow \rho = \sqrt[n]{r}$$
Volviendo a la ecuación anterior obtenemos
$$e^{i\,n\,\alpha} = e^{i\,\theta} \Longrightarrow e^{i\,(\theta-n\,\alpha)} = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

- Es obvio que solo hay n raices distintas correspondientes a $k = 0, 1, \ldots, n-1$, ya que la correspondiente a un valor $k+1$ se obtiene de la correspondiente al valor k girando esta última un ángulo $2\pi/n$. Al incrementar k en n unidades volvemos al mismo sitio.
- Las raíces tienen el mismo módulo y tales que dos raíces consecutivas están espaciadas un ángulo $2\pi/n$. Por tanto forman un polígono regular de n lados.

3. POLINOMIOS

Operaciones con polinomios

Definición 8. *Un polinomio $P(z)$ en la variable compleja z es toda función $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forma*

$$P(z) = a_n z^n + \cdots a_1 z + a_0, \quad n \geq 0,$$

donde los coeficientes $a_n, \ldots, a_0$ son números complejos dados. Si el coeficiente a_n de la potencia de mayor exponente es distinta de cero se dice que $P(z)$ es un polinomio de **grado** *n ($degP = n$).*

Comentarios

- El conjunto de todos los polinomios con coeficientes complejos se denota $\mathbb{C}[z]$

$$\mathbb{C}[z] = \left\{ \text{ Conjunto de todos los polinomios } P(z) \right\}$$

- Los polinomios pueden sumarse, restarse y multiplicarse en la forma habitual. Por ejemplo

$$(iz^2 - z + 1 + i) + (z^3 - 1) = z^3 + iz^2 - z + i, \quad (z^2 - i)(iz - 1) = iz^3 - z^2 + z + i.$$

- La división de dos polinomios $P(z)/Q(z)$ con $degP > deqQ$ y $Q \not\equiv 0$ no es en general un polinomio y posee en general un resto

La división de la Fig.4 nos dice que

$$\frac{z^6 + z^5 + 7z^4 + 8z^3 + 9z^2 + 6z + 3}{z^2 + z + 1} = z^4 + 6z^2 + 2z + 1 + \frac{3z + 2}{z^2 + z + 1}.$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^6 + x^5 + 7x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 6x + 3 & \boxed{x^2} + x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^6 - x^5 - x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad & x^4 + 6x^2 + 2x + 1 \\
\boxed{6x^4} + 8x^3 + 9x^2 + 6x + 3 & \\
\underline{-6x^4 - 6x^3 - 6x^2 \qquad\quad} & \\
\boxed{2x^3} + 3x^2 + 6x + 3 & \\
\underline{-2x^3 - 2x^2 - 2x \quad} & \\
\boxed{x^2} + 4x + 3 & \\
\underline{-x^2 - x - 1} & \\
\boxed{\boxed{3x + 2}} &
\end{array}
$$

Figura 4: Una división de polinomios con resto

Raices y factorización de polinomios

Definición 9. *Un número complejo $z_0 \in \mathbb{C}$ se denomina* **raíz** *(o cero) del polinomio $P(z)$ si $P(z_0) = 0$.*

El teorema siguiente se demuestra en el curso de Análisis Complejo.

Teorema 1. (Teorema fundamental del álgebra).
Todo polinomio $P(z) = a_n z^n + \cdots a_1 z + a_0$ (con $a_n \neq 0$) puede escribirse en términos de sus raíces $z_1, z_2, \ldots, z_m$ en la forma factorizada

$$P_(z) = a_n (z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \cdots (z - z_m)^{n_m}.$$

1. *Los exponentes $n_1, n_2, \ldots, n_m$ son únicos y se denominan multiplicidades algebraicas de las raices*

2. *La suma de multiplicidades es igual al grado del polinomio*

$$n_1 + n_2 + \cdots n_m = n.$$

De esta forma el cáculo de las raíces y sus multiplicidades nos permite factorizar un polinomio.

Comentarios

- El cáculo de las raices de un polinomio es uno de los problemas clásidos de las matemáticas. La cuestión es si es posible determinar expresiones de las races en función de los coeficientes del polinomio empleando las operaciones elementales (suma, resta, producto, división) y potencias fraccionarias. Es elemental para grado uno

$$P(z) = az + b \Longrightarrow z_0 = -\frac{b}{a},$$

  y para grado dos

$$P(z) = az^2 + bz + c \Longrightarrow z_{1,2} = -\frac{1}{2a}\Big(-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}\Big).$$

  Aunque más complicadas, existen también expresiones de este tipo para las races de los polinomios de grados 3 y 4 (obtenidas en el siglo XVI). Sin embargo Abel en 1826 demostr que no existe una fórmula general de ese tipo para grados mayor o iguales a 5.

- Cuando los coeficientes del polinomio $P(z)$ son números enteros, a veces pueden encontrarse raices enteras $(\pm 1, \pm 2, \ldots)$ de $P(z)$ probando los divisores del término independiente a_0. Si encontramos una, llamémosla k , entonces dividimos $P(z)$ entre $z - k$ $(P(z) = (z - k)Q(z))$ y se sigue con el polinomio reducido $Q(z)$ (que tiene un grado menos que $P(z)$.

- Si $z_0 = a + ib$ es una raíz compleja de un polinomio $P(z)$ con coeficientes reales, entonces el complejo conjugado $\overline{z_0} = a - ib$ es también raíz y con la misma multiplicidad.

4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (SEL’s)

Ecuaciones lineales

Definición 10. *Una ecuación lineal con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una ecuación de la forma*

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = b$$

Los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b (que pueden ser reales o complejos) se denominan coeficientes y término independiente, respectivamente, de la ecuación.

Si imponemos m ecuaciones lineales a las n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_{2n} = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n = b_m. \end{array} \right.$$

obtenemos un SEL: un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Comentarios

- Si el término independiente b de una ecuación lineal es cero se dice que la ecuación lineal es homogénea.
- Un SEL se dice **compatible** cuando tiene alguna solución, en caso contrario se dice que es **incompatible**.
- Un SEL se dice **compatible determinado** cuando tiene una única solución. Si tiene más de una solución (en cuyo caso veremos que tiene infinitas soluciones) se dice que es **compatible indeterminado**.

TEMA 2: VECTORES

1. LA ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL

Sumar vectores y multiplicar por escalares

Los espacios vectoriales forman una de las más importantes estructuras del álgebra . En adelante $\mathbb{K}$ denota cualquiera de los dos conjuntos $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ de los números reales o complejos.

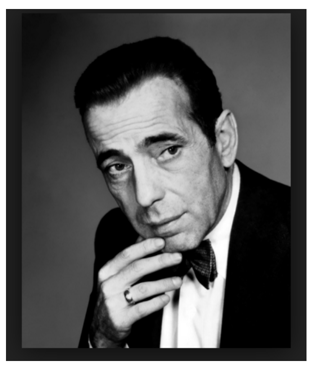

Figura 1: Siempre nos quedarán los espacios vectoriales.

Definición 1.

$$\textit{ESPACIO VECTORIAL SOBRE } \mathbb{K} = \left\{ \begin{array}{l} \textit{Conjunto cuyos elementos pueden sumarse, restarse dos a dos} \\ \textit{y multiplicarse por elementos de } \mathbb{K}\textit{, con las propiedades habituales} \end{array} \right\}$$

Un conjunto V se dice que es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ si sus elementos (que denotaremos $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \ldots$ y llamaremos **vectores***) pueden sumarse dos a dos y multiplicarse por elementos de $\mathbb{K}$ (que denotaremos $a, b, c \ldots$ y llamaremos* **escalares***):*

Suma de vectores: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$ para todo par $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$.

$$\textit{Producto por escalares: } c\boldsymbol{u} \in V \textit{ para todo par } c \in \mathbb{K} \textit{ y } \boldsymbol{u} \in V$$

con las propiedades siguientes:

1. **Suma conmutativa***:* $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$
$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}.$$

2. **Elemento cero de la suma y unidad del producto** *: Existen elementos* $\boldsymbol{o} \in V$ *y* $1 \in \mathbb{K}$ *tal que* $\forall \boldsymbol{u} \in V$
$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{u}, \quad 1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}.$$

3. **Elemento opuesto** *: Para todo* $\boldsymbol{u} \in V$ *existe su elemento opuesto* $-\boldsymbol{u}$ *tal que*
$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}.$$

4. **Suma y productos asociativos***:* $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ *se verifica*
$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}).$$
$\forall a, b \in \mathbb{K}$ *y* $\boldsymbol{u} \in V$ *se verifica*
$$(ab)\boldsymbol{u} = a(b\boldsymbol{u}).$$

5. **Propiedades distributivas***:* $\forall a, b \in \mathbb{K}$ *y* $\boldsymbol{u} \in V$ *se verifica*
$$(a + b)\,\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u}.$$
$\forall c \in \mathbb{K}$ *y* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ *se verifica*
$$c\,(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v}.$$

La **resta** *se define entonces como*

$$\textit{Resta: } \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}) \textit{ para todo par } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V.$$

Ejercicio 1. *Probar que en un espacio vectorial*

1. *Solo hay un elemento cero* $\mathbf{o}$*.*
2. *Solo hay un elemento opuesto* $-\mathbf{u}$ *para cada elemento* $\mathbf{u}$*.*
3. $\forall c \in \mathbb{K}$, $c\,\mathbf{o} = \mathbf{o}$
4. $\forall \boldsymbol{u} \in V$ *se verifica que* $0\mathbf{u} = \mathbf{o}$
5. *Si* $c\,\mathbf{u} = \mathbf{o}$ *con* $c \neq 0$ *entonces* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Los espacios $\mathbb{K}^n$ de vectores con n componentes

Definición 2. *El espacio $\mathbb{K}^n$ está formado por las* **listas** *(conjuntos ordenados) de n elementos de $\mathbb{K}$*

$$\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^n = (u_1, u_2, \cdots u_n), \quad u_i \in \mathbb{K}.$$

Es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones (siendo $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^n =$ y $\boldsymbol{v} = (v_i)_{i=1}^n$

$$\textit{Suma}: \ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_i + v_i)_{i=1}^n; \quad \textit{Producto por escalares}: \ c\boldsymbol{u} = (cu_i)_{i=1}^n$$

Frecuentemente usaremos los vectores de $\mathbb{K}^n$ en forma de **vectores fila***:*

$$\boldsymbol{u} = (u_1 \, u_2 \, \cdots u_n).$$

Aunque en física cuántica se prefiere usar **vectores columna***.*

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}.$$

En términos de vectores columna

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n + v_n \end{pmatrix}, \quad c \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ cu_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -u_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1. *Sean los vectors columna de $\mathbb{C}^3$*

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Vemos que

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1-i)\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1-i \\ -2i \\ 1+i \end{pmatrix}.$$

Espacios vectoriales de funciones

Existen muchos espacios vectoriales de funciones de gran importancia que provienen del hecho de que funciones con valores nuéricos definidas sobre un mixmo intervalo se pueden sumar y multiplicar por números de manera natural. Dado un intervalo abierto $I = (a, b)$ si denotamos

$$\mathcal{F}(I; \mathbb{K}) = \text{ conjunto de funciones } u : I \to \mathbb{K} \text{ definidas sobre } I \text{ y con valores en } \mathbb{K}\ ,$$

entonces es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones siguientes

$$\text{Suma}: \ (u+v)(x) = u(x) + v(x); \quad \text{Producto por escalares } c \in \mathbb{K}: \ (cu)(x) = cu(x).$$

Ejemplo 2. *Sean las funciones de* $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$

$$u(x) = e^{ix}, \quad v(x) = \cos x.$$

Vemos que

$$(u+v)(x) = e^{ix} + \cos x = 2\cos x + i \operatorname{sen} x, \quad (i\,u)(x) = -\operatorname{sen} x + i \cos x.$$

Ejercicio 2. *En* $\mathcal{F}(I; \mathbb{K})$

1. *Determinar la función que representa el elemento cero.*
2. *Determinar la función elemento opuesto* $-u$ *para cada función* u.

Otros espacios vectoriales básidos de funciones son:

Espacios de polinomios

El espacio $\mathbb{K}[x]$ (**el espacio de polinomios**) está formado por los polinomios en la variable x con coeficientes en K

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0.$$

Es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones anteriores para funciones

$$\text{Suma}: \ (P+Q)(x) = P(x) + Q(x); \quad \text{Producto por escalares } c \in \mathbb{K} \ : \ (cP)(x) = cP(x).$$

Adviertase que el resultado de estas operaciones es siempre un elemento de $\mathbb{K}[x]$.

Ejemplo 3. *Sean los polinomios de* $\mathbb{R}[x]$

$$P(x) = -x^2 + 2x - 1, \quad Q(x) = x^3 - x + 2.$$

Vemos que

$$(P+Q)(x) = x^3 - x^2 + x + 1, \quad (-2P)(x) = 2x^2 - 4x + 2.$$

Espacios de funciones derivables

Dado un intervalo abierto $I = (a, b)$ se denota por $C^{(N)}(I; \mathbb{K})$ al conjunto de funciones $u : I \to \mathbb{K}$ que son derivables hasta el orden k con derivadas continuas. Es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones anteriores para funciones

$$\text{Suma}: \ (u+v)(x) = u(x) + v(x); \quad \text{Producto por escalares } c \in \mathbb{K}: \ (cu)(x) = cu(x).$$

Adviertase que el resultado de estas operaciones es siempre un elemento de $C^{(N)}(I; \mathbb{K})$.

2. COMBINACIONES LINEALES Y BASES VECTORIALES

Combinaciones lineales

Definición 3. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y S un subconjunto no vacío de V, se denomina* **combinación lineal de vectores de** S *a cualquier vector de la forma*

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots c_k\boldsymbol{u}_k, \quad \text{con } c_i \in \mathbb{K} \text{ y } \boldsymbol{u}_i \in S.$$

$\boxed{\text{SOLO UN NÚMERO FINITO DE TÉRMINOS}}$

El conjunto de todas las combinaciones lineales de S se denota

$$\operatorname{Lin} S,$$

y se denomina **envolvente lineal de** S.

Ejemplo 4. *En $\mathbb{C}^3$ el vector*

$$(3+i)\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1+2i \end{pmatrix},$$

es una combinación lineal de los vectores de

$$S = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$$

donde

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ i \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 5. *En $\mathbb{R}[x]$ todos los polinomios son combinaciones lineales del conjunto de todos los monomios*

$$S = \{1, x, x^2, \ldots\},$$

dado que todo polinomio $P(x)$ se descompone en una suma de un número finito de monomios

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Es decir

$$\mathbb{R}[x] = \operatorname{Lin} S.$$

Ejercicio 3. *En el espacio $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ la función exponencial puede escribirse como la suma de una serie convergente en toda la recta*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots .$$

¿Podemos decir que es una combinación lineal del conjunto de monomios $S = \{1, x, x^2, \ldots\}$?

La superposiciones de ondas se describen mediante combinaciones lineales de funciones

Figura 2: Superposición de ondas en dos dimensiones.

Bases vectoriales

Definición 4. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $B = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ un subconjunto finito de V, se dice que B es una* **base vectorial** *de V si para todo vector $\boldsymbol{v} \in V$ existe una* **ÚNICA** *combinación lineal de B tal que*

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n, \quad \text{con } x_i \in \mathbb{K}, \tag{1}$$

Los números $(x_i)_{i=1}^n$ se denominan entonces **coordenadas** *de $\boldsymbol{v}$ en la base B:*

En esta definición hemos supuesto que B es un conjunto finito. Podemos extender la definición a conjuntos infinitos de la forma siguiente: Un conjunto $B = \{\boldsymbol{u}_\alpha : \alpha \in A\}$ de V (donde el conjunto A de índices es infinito) es base vectorial de V si para todo vector $\boldsymbol{v} \in V$ existe un único desarrollo de la forma

$$\boldsymbol{v} = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha, \quad \text{con } x_\alpha \in \mathbb{K} \text{ y solo un número finito de ellos son distintos de cero}, \tag{2}$$

Los números $(x_\alpha)_{\alpha \in A}^n$ se denominan entonces **coordenadas** *de $\boldsymbol{v}$ en la base B.*

Problema: ¿Como construir bases vectoriales y calcular coordenadas de vectores?

Ejemplo 6. *En $\mathbb{K}^n$ el conjunto B de los n vectores*

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix},$$

forman una base vectorial ya que todo vector de $\mathbb{K}^n$

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix},$$

admite una única expresión como combinación lineal de los vectores de B , que viene dada por

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots c_n\boldsymbol{e}_n.$$

El conjunto $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ se denomina **base canónica** *de $\mathbb{K}^n$.*

Ejemplo 7. *En $\mathbb{R}[x]$ el conjunto de todos los monomios*

$$B = \{p_0(x) = 1,\, p_1(x) = x,\, p_2(x) = x^2, \dots\},$$

es una base vectorial de $\mathbb{R}[x]$ (con un número infinito de elementos) dado que todo polinomio $P(x)$ se descompone de manera única en una combinación lineal de los monomios.

$$P(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0 = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + \cdots + a_k p_k(x).$$

Se verifica el siguiente resultado fundamental:

Teorema 1. *Para todo espacio vectorial*

1. *Existen bases vectoriales.*
2. *Todas ellas tienen el mismo número de elementos.*

Definición 5. *Se denomina* **dimensión** *de un espacio vectorial V y se denota $\dim V$ al número de elementos de las bases vectoriales de V.*

EN ADELANTE SOLO ESPACIOS VECTORIALES DE DIMENSIÓN FINITA

Ejercicio 4. *Sea V al conjunto de funciones $u \in C^{(2)}(I; \mathbb{R})$ tales que satisfacen la ecuación diferencial*

$$u''(x) + u(x) = 0,\, \forall x \in I.$$

Probar que

1. *V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.*
2. *Determinar una base vectorial de V.*
3. *Calcular $\dim V$.*

3. DEPENDENCIA é INDEPENDENCIA LINEAL

Definición 6. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $S = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ un subconjunto de V, se dice que los vectores de S son* **linealmente independientes** *si la única combinación lineal de S que dá el vector cero*

$$x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{o}, \tag{3}$$

es la trivial

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Si un subconjunto S de V no es linealmente independiente, entonces se dice que es **linealmente dependiente**. *Ello ocurre si y solo si alguno de sus elementos puede expresarse como combinación lineal de los demas, ya que*

$$x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{o}, \quad \text{con algún } x_k \neq 0 \Longrightarrow \boldsymbol{u}_k = -\sum_{j\neq k} \frac{x_j}{x_k}\boldsymbol{u}_j$$

Problema: ¿Como saber si un conjunto de vectores es ó no es linealmente independiente?

Teorema 2. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $B = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ un subconjunto de V, entonces B es una* **base vectorial** *de V si y solo si*

1. *B es un conjunto linealmente independiente.*
2. *$LinB = V$.*

Demostración: Supongamos primero que B es una **base vectorial** de V, entonces para todo vector $\boldsymbol{v} \in V$ existe una única combinación lineal de B tal que

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n, \quad \text{con } x_i \in \mathbb{K}.$$

Luego es claro que $LinB = V$. En particular el vector cero se puede expresar como

$$\boldsymbol{o} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n, \quad \text{con todos los } x_i = 0,$$

y como esa descomposición debe ser única (por ser B una base), deducimos que solo la combinación lineal trivial de vectores de B nos dá el $\boldsymbol{o}$, luego B es un conjunto linealmente independiente.

En segundo lugar si suponemos que B satisface las condiciones 1) y 2), entonces debido a 2) para todo vector $\boldsymbol{v} \in V$ existe una combinación lineal de B tal que

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n. \tag{4}$$

Tal descomposición ha de ser única, pues si existiera otra

$$\boldsymbol{v} = x'_1\boldsymbol{u}_1 + x'_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x'_n\boldsymbol{u}_n,$$

tendríamos que

$$(x'_1 - x_1)\boldsymbol{u}_1 + (x'_2 - x_2)\boldsymbol{u}_2 + \cdots + (x'_n - x_n)\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{o},$$

y por la condición 1) eso solo es posible si

$$x'_1 = x_1, \ldots, x'_n = x_n.$$

Luego la descomposición (4) es única, lo que prueba que B es una base vectorial $\square$

Comentarios

Pueden demostrarse las propiedades siguientes:

- Para todo subconjunto linealmente independiente B_0 de un espacio vectorial siempre existe una base vectorial B de V tal que $B_0 \subset B$.
- Un subconjunto linealmente independiente B_0 de un espacio vectorial es una base si y solo si cualquier otro subconjunto B linealmente independiente tal que $B_0 \subset B$ es igual él ($B = B_0$). Es decir las bases vectoriales son los conjuntos linealmente independientes maximales.

Formulación vectorial de un sistema de ecuaciones lineales

Sea un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas en $\mathbb{K}$.:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_{2n} = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n = b_m. \end{array}\right. \tag{5}$$

Si introducimos los vectores columna de $\mathbb{K}^m$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix},$$

entonces el SEL (5) se escribe como la ecuación vectorial

$$\boxed{x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}}$$

que se denomina **formulación vectorial del sistema de ecuaciones lineales**

Formulación de problemas vectoriales mediante SEL's

Podemos ahora reducir varios de los problemas enunciados anteriormente a problemas con SEL's.

Problema: ¿Como saber si un conjunto de vectores es ó no es linealmente independiente?

El conjunto $S = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ es linealmente independiente si y solo si los únicos números $x_1, \ldots, x_n$ solución de

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o},$$

son

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0. \tag{6}$$

Usando vectores columna, esto es equivalente a decir que la única solución del SEL homogéneo

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = 0, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_{2n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n = 0. \end{array}\right. \tag{7}$$

es la trivial (6).

Problema: ¿Como construir bases vectoriales y calcular coordenadas de vectores?

Un conjunto $S = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ de n vectores en $\mathbb{K}^n$ es base vectorial de $\mathbb{K}^n$ si y solo si es linealmente independiente. Para calcular las coordenadas de un vector $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$ en esa base, debemos encontrar $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n.$$

Usando vectores columnas, tendremos que resolver el SEL

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = u_1, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_{2n} = u_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n = u_n. \end{array}\right. \tag{8}$$

4. SUBESPACIOS VECTORIALES

Definición 7. *Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, un subconjunto no vacío M de V se denomina* **subespacio vectorial** *de V cuando*

$$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in M \Longrightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in M; \quad c \in \mathbb{K}, \boldsymbol{u} \in M \Longrightarrow c\boldsymbol{u} \in M.$$

Es decir las operaciones, al efectuarlas en M, dán elementos de M

Los subespacios vectoriales típicos de la geometría elemental son las rectas y los planos que pasan por el origen en $\mathbb{R}^3$.

Propiedades

1. $M \subset V$ es subespacio vectorial de V si y solo si es un espacio vectorial respecto de las operaciones definidas en V.
2. Si M_1 y M_2 son subespacios vectoriales de V entonces su intersección $M_1 \bigcap M_2$ también es un subespacio vectorial de V.
3. Si $M \subset V$ es subespacio vectorial de V entonces $\boldsymbol{o} \in M$.
4. Tanto $M = \{\boldsymbol{o}\}$ como $M = V$ son subespacios vectoriales de V.

Ejercicio 5. *Probar las propiedades anteriores*

A pesar de que la intersección de dos subespacios vectoriales es siempre un subespacio vectorial, es muy facil construir ejemplos de subespacios vectoriales cuya unión no es un subespacio vectorial (pensar por ejemplo en dos rectas distintas que pasan por el origen).

Sistema de generadores de un subespacio

Teorema 3. *La envolvente lineal $M = LinS$ de un subconjunto $S = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ de V es un subespacio vectorial de V (se denomina* **subespacio generado** *por los vectores $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$).*

Demostración: Es claro que dados elementos de $LinS$

$$\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n, \quad \boldsymbol{v} = y_1\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{u}_n,$$

su suma y productos por escalares

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (x_1 + y_1)\boldsymbol{u}_1 + (x_2 + y_2)\boldsymbol{u}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\boldsymbol{u}_n, \quad c\boldsymbol{u} = cx_1\boldsymbol{u}_1 + cx_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + cx_n\boldsymbol{u}_n,$$

son también combinaciones lineales de S y por tanto pertenecen a $LinS$ $\square$

Definición 8. *Dado un subespacio vectorial M de V, se denomina* **sistema de generadores** *de M a cualquier conjunto (linealmente independiente o no) $S = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ tal que $M = LinS$.*

Suma de subespacios vectoriales

Definición 9. *Sean M_1 y M_2 subespacios vectoriales de V se denomina* **suma de los subespacios** *al conjunto*

$$M_1 + M_2 = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \, : \, \boldsymbol{u} \in M_1, \, \boldsymbol{v} \in M_2\}.$$

Ejercicio 6. *Probar que si M_1 y M_2 son subespacios vectoriales de V , entonces $M_1 + M_2$ es un subespacio vectorial de V.*

Teorema 4. *Sean M_1 y M_2 subespacios vectoriales de V generados por los conjuntos S_1 y S_2*

$$M_1 = LinS_1, \quad M_2 = LinS_2,$$

respectivamente. Entonces

$$M_1 + M_2 = Lin(S_1 \cup S_2). \tag{9}$$

Demostración: En primer lugar

$$S_i \subset LinS_i = M_i \subset M_1 + M_2 \Longrightarrow S_1 \cup S_2 \subset M_1 + M_2 \Longrightarrow Lin(S_1 \cup S_2) \subset M_1 + M_2.$$

Por otra parte si $\boldsymbol{u} \in M_1 + M_2$ entonces existen $\boldsymbol{v}_i \in M_i$ $(i = 1, 2)$ tal que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$. Pero

$$\boldsymbol{v}_i \in M_i = LinS_i \subset Lin(S_1 \cup S_2), \, i = 1, 2,$$

luego al ser $Lin(S_1 \cup S_2)$, subespacio vectorial

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in Lin(S_1 \cup S_2) \Longrightarrow M_1 + M_2 \subset Lin(S_1 \cup S_2).$$

□

Teorema 5. Fórmula de Grassmann: *Sean M_1 y M_2 subespacios vectoriales de V , entonces*

$$\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2).$$

Demostración: Sea $B_0 = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_l\}$ una base vectorial de $M_1 \cap M_2$. Como $M_1 \cup M_2 \subset M_i$ $(i = 1, 2)$ existirán bases de M_1 y M_2 que contienen a B_0

$$B_1 = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_l, \boldsymbol{v}_{l+1}, \ldots \boldsymbol{v}_{n_1}\} \quad \text{base de } M_1,$$

$$B_2 = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_l, \boldsymbol{w}_{l+1}, \ldots \boldsymbol{w}_{n_2}\} \quad \text{base de } M_2.$$

Veamos que

$$B = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_l, \boldsymbol{v}_{l+1}, \ldots \boldsymbol{v}_{n_1}, \boldsymbol{w}_{l+1}, \ldots \boldsymbol{w}_{n_2}\}\} \quad \text{es base de } M_1 + M_2.$$

En primer lugar dado $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \in M_1 \cup M_2$ con $\boldsymbol{a}_i \in M_i$, entonces $\boldsymbol{a}_i \in LinB_i$ para cada $i = 1, 2$, luego es inmediato ver que $\boldsymbol{a} \in LinB$.

Por otro lado supongamos que

$$\sum_{i=1}^{l} x_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=l+1}^{n_1} y_j \boldsymbol{v}_j + \sum_{k=l+1}^{n_2} z_k \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{o}. \tag{10}$$

Entonces tenemos que

$$\sum_{i=1}^{l} x_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=l+1}^{n_1} y_j \boldsymbol{v}_j = -\sum_{k=l+1}^{n_2} z_k \boldsymbol{w}_k \in M_1 \cap M_2,$$

pues el primer miembro está en M_1, el segundo en M_2 y ambos son iguales. Así el segundo miembro se podrá desarrollar en la base B_0 de $M_1 \cap M_2$

$$-\sum_{k=l+1}^{n_2} z_k \boldsymbol{w}_k = \sum_{i=1}^{l} r_i \boldsymbol{u}_i,$$

y podemos escribir (10) en la forma

$$\sum_{i=1}^{l} (x_i - r_i) \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=l+1}^{n_1} y_j \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{o}.$$

Pero al ser B_1 linealmente independiente (es una base M_1), se deduce en particular que $y_j = 0$ para $j = l+1, \dots, n_1$. Volviendo a (10) se obtiene

$$\sum_{i=1}^{l} x_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{k=l+1}^{n_2} z_k \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{o}.$$

Como B_2 es linealmente independiente (es una base de M_2) se deduce que $x_i = 0$ y $z_k = 0$ para $i = 1, \dots l$ y $k = l+1, \dots, n_2$. Luego B es un conjunto linealmente independiente $\square$

Suma directa de subespacios

Definición 10. *Dados dos subespacios vectoriales M_1 y M_2 de V su suma $M_1 + M_2$ se denomina* **suma directa** *y se denota*

$$M_1 \oplus M_2$$

si

$$M_1 \cap M_2 = \emptyset.$$

Teorema 6. *Una suma $M_1 + M_2$ es directa si y solo si todo $\boldsymbol{v} \in M_1 + M_2$ puede descomponerse de manera* **única** *en al forma*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \text{ con } \boldsymbol{v}_1 \in M_1 \text{ y } \boldsymbol{v}_2 \in M_2.$$

Demostración: En primer lugar, de la definición de suma de subespacios vectoriales sabemos que todo $\boldsymbol{v} \in M_1 + M_2$ puede descomponerse en la forma

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \quad \boldsymbol{v}_1 \in M_1\,, \boldsymbol{v}_2 \in M_2. \tag{11}$$

En el caso de que existiera otra descomposición

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}_2', \quad \boldsymbol{v}_1' \in M_1\,, \boldsymbol{v}_2' \in M_2,$$

entonces

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_2 \in M_1 \cap M_2$$

Por tanto, si la suma es directa

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{o},$$

luego

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1', \quad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2'.$$

Por otro lado si suponemos que las descomposiciones (11) son únicas, entonces dado un vector $\boldsymbol{v} \in M_1 \cap M_2$ podemos siempre descomponerlo de dos formas

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \quad \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v} \in M_1\,, \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{o} \in M_2,$$

y

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}_2', \quad \boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{o} \in M_1\,, \boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v} \in M_2.$$

Luego $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ $\square$

Propiedades

1. Si B_1 y B_2 son bases vectoriales de los subespacios vectoriales M_1 y M_2, respectivamente y los subespacios forman suma directa $M_1 \oplus M_2$ entonces $B_1 \cup B_2$ es base vectorial de $M_1 \oplus M_2$.

2. Una suma $M_1 + M_2$ es directa si y solo si

$$\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2.$$

Ejercicio 7. *Demostrar las propiedades anteriores.*

Generalización

Definición 11. *Sean M_1, M_2,...,M_n subespacios vectoriales de V, se denomina* **suma de los subespacios** *al conjunto*

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_n \,:\, \boldsymbol{v}_i \in M_i,\, i = 1, \ldots, n\}.$$

Se dice que la suma es directa y se denota

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n,$$

cuando todo $\boldsymbol{v} \in M_1 + M_2 + \cdots + M_n$ puede descomponerse de manera **única** *en la forma*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_n \,:\, \boldsymbol{v}_i \in M_i,\, i = 1, \ldots, n.$$

Ejercicio 8. *Demostrar que una suma de subespacios*

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_n \,:\, \boldsymbol{v}_i \in M_i,\, i = 1, \ldots, n\}.$$

es directa si y solo si la única solución de la ecuación

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o} \,:\, \boldsymbol{v}_i \in M_i,\, i = 1, \ldots, n,$$

es la trivial

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \cdots = \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}.$$

Problema: ¿Como construir un sistema de generadores de un subespacio M?

Problema: ¿Como construir una base vectorial de un subespacio?

<u>TEMA 3: MATRICES</u>

Figura 1: Todo se reduce a matrices.

1. MATRICES

Los vectores de $\mathbb{K}^n$ son listas (conjuntos ordenados) de números. Las matrices son listas de vectores.

Definición 1. *Una matriz A de dimensiones $m \times n$ (matriz en $\mathbb{K}^{m\times n}$) es un conjunto ordenado en m filas y n columnas de $m \times n$ números de $\mathbb{K}$*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

También la denotaremos como

$$A = \Big(a_{ij}\Big),$$

donde a_{ij} recibe el nombre de elemento de matriz correspondiente a la fila i y a la columna j. Si $m = n$ se dice que A es una **matriz cuadrada** *de dimensión n.*

Si introducimos los vectores columna de $\mathbb{K}^m$

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix},$$

podemos indicar la matriz en la forma

$$A = \Big(\boldsymbol{c}_1\Big|\boldsymbol{c}_2\Big|\cdots\Big|\boldsymbol{c}_n\Big).$$

De igual forma podemos introducir los vectores fila de $\mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{f}_2 &= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}, \\ &\cdots\cdots\cdots, \\ \boldsymbol{f}_m &= \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

y escribir la matriz en la forma

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ -- \\ \boldsymbol{f}_2 \\ -- \\ \vdots \\ -- \\ \boldsymbol{f}_m \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1. *La siguiente matriz en $\mathbb{C}^{2\times 3}$*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1+i & 0 \\ 2-i & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

se puede escribir en términos de tres columnas

$$A = \Big(\boldsymbol{c}_1\Big|\boldsymbol{c}_2\Big|\boldsymbol{c}_3\Big), \quad \boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} -1+i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y de dos filas

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ -- \\ \boldsymbol{f}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1+i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 2-i & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. OPERACIONES con MATRICES

Suma, multiplicación por escalares y producto de matrices.

Definición 2. *Sean A y B matrices $m \times n$ (mismas dimensiones) en $\mathbb{K}^{m\times n}$ y $c \in \mathbb{K}$*

$$A = \Big(a_{ij}\Big), \quad B = \Big(a_{ij}\Big); \quad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n.$$

Se define:

$$\textit{Suma}: \ A + B = \Big(a_{ij} + b_{ij}\Big); \quad \textit{Producto por escalares}: \ cA = \Big(a_{ij}\Big).$$

Es decir

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}, \quad cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.

1. *Probar que con las operaciones anteriores el conjunto de matrices $\mathbb{K}^{m\times n}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.*
2. *Probar que el conjunto de matrices de $\mathbb{K}^{m\times n}$*

$$E_{kl} = \Big(a_{ij} = 0 \ \textit{salvo} \ a_{kl} = 1\Big), \quad k = 1, \ldots, m; l = 1, \ldots, n.$$

   es una base vectorial de $\mathbb{K}^{m\times n}$.

3. *Determinar* $\dim \mathbb{K}^{m\times n}$

La operación fundamental del álgebra con matrices es el producto.

Definición 3. *Sean A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times p$*

$$A = \Big(a_{ij}\Big) \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad B = \Big(b_{ij}\Big) \in \mathbb{K}^{n\times p}.$$

Se define:

$$\textit{Producto} \ : \ AB = \Big(c_{ij}\Big), \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

que determina una matriz en $m \times p$.

$\boxed{AB \text{ solo está definido cuando el número de columnas de } A \text{ es igual al número de filas de } B}$

Expresiones alternativas del producto

Si escribimos

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ -- \\ \boldsymbol{f}_2 \\ -- \\ \vdots \\ -- \\ \boldsymbol{f}_m \end{pmatrix}, \quad B = \left(\boldsymbol{c}_1 \middle| \boldsymbol{c}_2 \middle| \cdots \middle| \boldsymbol{c}_p\right),$$

entonces podemos calcular el producto como

1. Multiplicando las filas de A por las columnas de B

$$AB = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ -- \\ \boldsymbol{f}_2 \\ -- \\ \vdots \\ -- \\ \boldsymbol{f}_m \end{pmatrix} \left(\boldsymbol{c}_1 \middle| \boldsymbol{c}_2 \middle| \cdots \middle| \boldsymbol{c}_p\right), = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{c}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{c}_2 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{c}_p \rangle \\ \langle \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{c}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{c}_2 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{c}_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{f}_m, \boldsymbol{c}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{f}_m, \boldsymbol{c}_2 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{f}_m, \boldsymbol{c}_p \rangle \end{pmatrix},$$

   donde usamos la notación de producto escalar para el producto de una matriz fila por una matriz columna

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{c} \rangle = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} f_i c_i.$$

2. Multiplicando A por las columnas de B:

$$AB = A\left(\boldsymbol{c}_1 \middle| \boldsymbol{c}_2 \middle| \cdots \middle| \boldsymbol{c}_n\right) = \left(A\boldsymbol{c}_1 \middle| A\boldsymbol{c}_2 \middle| \cdots \middle| A\boldsymbol{c}_n\right), \tag{1}$$

   siendo $A\boldsymbol{c}_i$ los productos de la matriz A por las matrices columna c.

Propiedades

Cuando los productos de matrices correspondientes están definidos se verifican las propiedades ($a, b, c \in \mathbb{K}$) :

1. Asociativas:
$$A+(B+C)=(A+B)+C, \quad A(BC)=(AB)C, \quad A(cB)=c(AB).$$
2. Distributivas
$$A(B+C)=AB+BC, \quad (A+B)C=AC+BC.$$

$$\boxed{\textbf{El producto de matrices no es conmutativo en general: } AB \neq BA}$$

Ejemplo 2. *Tomando*
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
se obtiene
$$AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. MATRICES TRASPUESTA y ADJUNTA

Matriz traspuesta de una matriz en $\mathbb{K}^{m\times n}$

Definición 4. *Dada una matriz $A=\left(a_{ij}\right)$ en $\mathbb{K}^{m\times n}$, se define su matriz traspuesta $A^t=\left(a^t_{ij}\right)$, como la matriz en $\mathbb{K}^{n\times m}$ dada por*
$$a^t_{ij}=a_{ji}.$$
Es decir la matriz que se obtiene al cambiar las filas por las columnas en A.

Ejemplo 3. *Por ejemplo*
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 1-i \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -i & 1-i \end{pmatrix}$$

Propiedades

1. $(A^t)^t=A$.
2. $(A+B)^t=A^t+B^t$.
3. $(AB)^t=B^tA^t$.

Ejercicio 2. *Probar las propiedades anteriores.*

Matriz adjunta de una matriz en $\mathbb{C}^{m\times n}$

Definición 5. *Dada una matriz $A = \left(a_{ij}\right)$ en $\mathbb{C}^{m\times n}$, se define su* **matriz adjunta** $A^\dagger = \left(a^\dagger_{ij}\right)$, *como la matriz en $\mathbb{C}^{n\times m}$ dada por*

$$a^\dagger_{ij} = \overline{a_{ji}}.$$

Es decir la matriz que se obtiene al cambiar las filas por las columnas en A y conjugando a continuación.

Ejemplo 4. *Por ejemplo*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 1-i \end{pmatrix} \Longrightarrow A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ i & 1+i \end{pmatrix}$$

Propiedades

1. $(A^\dagger)^\dagger = A$.
2. $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$.
3. $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

Ejercicio 3. *Probar las propiedades anteriores.*

4. FORMULACIÓN MATRICIAL de un SEL

Matrices actuando sobre vectores

Una matriz A de dimensiones $m \times n$ determina mediante el producto por vectores columna una aplicación del espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ en el espacio vectorial $\mathbb{K}^m$

$$A : K^n \to K^m, \quad \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x},$$

que a todo vector $\boldsymbol{x}$ le asocia otro $\boldsymbol{y}$. Las coordenadas del vector $\boldsymbol{y}$ vienen dadas por

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Adviértase que si denotamos $\boldsymbol{a}_i$ a las columnas de A

$$A = \left(\boldsymbol{a}_1 \middle| \boldsymbol{a}_2 \middle| \cdots \middle| \boldsymbol{a}_n\right),$$

entonces

$$A\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n. \tag{3}$$

Debido a las propiedades del producto matricial esta aplicación verifica

1. Para todo par $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{K}^n$
$$A(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = A\boldsymbol{v}_1 + A\boldsymbol{v}_2.$$

2. Para todo $c \in \mathbb{K}$ y $\boldsymbol{v} \in K^n$
$$A(c\boldsymbol{v}) = c(A\boldsymbol{v}).$$

Como veremos posteriormente estas propiedades significan que A determina una aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$.

Sistemas de ecuaciones lineales

Sea un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas en $\mathbb{K}$.:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_{2n} = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n = b_m. \end{array}\right. \tag{4}$$

Si introducimos la denominada **matriz de coeficientes**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y los vectores columna $\boldsymbol{x}$ de incógnitas y $\boldsymbol{b}$ de términos independientes

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix},$$

entonces el SEL (4) se escribe como la ecuación matricial

$$\boxed{A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}}$$

que se denomina **formulación matricial del sistema de ecuaciones lineales**. Así el problema del SEL se enuncia de la forma siguiente: Dado un vector $\boldsymbol{b} \in K^m$ encontrar vectores $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ tales que su imagen $A\boldsymbol{x}$ mediante A sea $\boldsymbol{b}$.

5. MATRICES CUADRADAS

El producto de matrices cuadradas.

El conjunto $\mathbb{K}^{n\times n}$ de matrices cuadradas de dimensión n (n filas y n columnas) tiene propiedades especiales. En primer lugar siempre esta definido el producto

$$AB, \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

Ello nos permite definir una operación fundamental en física cuántica:

Definición 6. *Dadas dos matrices cuadradas A y B en $\mathbb{K}^{n\times n}$ se define su* **conmutador** $[A, B]$ *como la matriz de $\mathbb{K}^{n\times n}$ dada por*

$$[A, B] = AB - BA.$$

Propiedades

1. Antisimetría: $[A, B] = -[B, A]$.
2. Linealidad: $[A, B + C] = [A, B] + [A, C], \quad [A, cB] = c[A, B]$. (Lo mismo por la izquierda).
3. $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C, \quad [AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.
4. $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.

Ejercicio 4. *Probar las propiedades anteriores.*

Definición 7. *Se define la* **matriz unidad** $n \times n$ *como la matriz cuadrada con todos sus elementos cero salvo la diagonal principal en que los elementos son unos*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Es claro que I es el elemento unidad del producto en $\mathbb{K}^{n\times n}$

$$AI = IA = A, \quad \forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

De particular importancia son las matrices cuadradas invertibles:

Definición 8. *Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se dice invertible si existe otra matriz $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que*

$$CA = AC = I.$$

En ese caso se denota $C = A^{-1}$ y se denomina **matriz inversa** *de A.*

Comentario: Se demostrará más adelante que si existe C tal que $CA = I$ entonces se verifica que $AC = I$.

Propiedades

1. Si existe, A^{-1} es única.

2. Si existe A^{-1} entonces $(A^{-1})^{-1} = A$.

3. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

4. Si existen A^{-1} y B^{-1}, entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ejercicio 5. *Probar las propiedades anteriores.*

Ejercicio 6. *Probar que para matrices 2×2*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

donde la matriz A^{-1} existe si y solo si $ad - bc \neq 0$.

Matrices cuadradas semejantes.

Definición 9. *Dos matrices cuadradas $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se dice que son* **semejantes** *si existe una otra matriz invertible $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que*

$$P^{-1}AP = B.$$

En ese caso se escribe

$$A \sim_s B.$$

Es inmediato probar las propiedades siguientes:

Propiedades

1. $A \sim_s A, \quad \forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

2. Si $A \sim_s B$ entonces $B \sim_s A$.

3. Si $A \sim_s B$ y $B \sim_s C$ entonces $A \sim_s C$.

Tipos importantes y grupos de matrices cuadradas.

Existen diversos tipos de matrices cuadradas importantes:

1. A se dice **simétrica** si $A = A^\dagger$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ello significa que $A = A^t$.

2. A se dice **unitaria** si existe su inversa y $A^{-1} = A^\dagger$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ello significa que $A^{-1} = A^t$ y en ese caso se dice que A es **ortogonal** .

Definición 10. *Un conjunto G de matrices cuadradas $n \times n$ es un* **grupo** *si verifica las propiedades siguientes:*

1. *Si $A, B \in G$ entonces también $AB \in G$.*

2. *Si $A \in G$ entonces existe A^{-1} y $A^{-1} \in G$.*

Ejercicio 7. *Probar que si G es un grupo de matrices cuadradas entonces $I \in G$.*

Ejemplo 5. *Grupos importantes de matrices son:*

1. $GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : \exists A^{-1}\}$ *(Grupo general lineal).*

2. $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \exists A^{-1}$ *y cumple* $A^{-1} = A^t\}$ *(Grupo ortogonal).*

3. $U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \exists A^{-1}$ *y cumple* $A^{-1} = A^\dagger$ *(Grupo unitario).*

Ejercicio 8. *Probar que los conjuntos anteriores son grupos de matrices.*

Traza de una matriz cuadrada.

Definición 11. *Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se define su* **traza** *como la suma de los elementos de la diagonal principal*

$$\mathrm{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots a_{nn}.$$

Propiedades

1. $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr} A + \mathrm{tr} B$.

2. $\mathrm{tr}(cA) = c\,\mathrm{tr} A$.

3. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Demostración: Las tres se prueban facilmente. Veamos la tercera

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} = \mathrm{tr}(BA).$$

□

5. MATRIZ DE CAMBIO DE BASE VECTORIAL

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y sean

$$B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}, \quad B' = \{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\},$$

dos bases vectoriales de V. Todo vector $\boldsymbol{x}$ de V podrá descomponerse en las dos bases en la forma

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n, \quad , \boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{v}'_1 + x'_2\boldsymbol{v}'_2 + \cdots + x'_n\boldsymbol{v}'_n.$$

Denotemos $(\boldsymbol{x})_B$ y $(\boldsymbol{x})_{B'}$ a los vectores columna formados con las coordenadas de $\boldsymbol{x}$ en las dos bases

$$(\boldsymbol{x})_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{x})_{B'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

En particular los vectors de la base B pueden descomponerse en la base B'

$$\boldsymbol{v}_i = a_{11}\boldsymbol{v}'_1 + a_{21}\boldsymbol{v}'_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{v}'_n, \quad (\boldsymbol{v}_i)_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Con la notación de sumatorio estas ecuaciones se escriben

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\boldsymbol{v}'_j.$$

De esta forma podemos desarrollar cada vector $\boldsymbol{x}$ en la forma

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{v}'_i = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) \boldsymbol{v}'_i.$$

Por tanto

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots a_{in} x_n, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Es decir el cambio de coordenadas es

$$\left\{ \begin{array}{c} x'_1 = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n, \\ x'_2 = a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_{2n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x'_n = a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \cdots + a_{nn}\, x_n. \end{array} \right.$$

Lo cual se expresa en forma matricial como

$$(\boldsymbol{x})_{B'} = M_{B'B} (\boldsymbol{x})_B, \tag{5}$$

siendo $M_{B'B}$ la denominada matriz de **cambio de base**, que viene dada por la matriz cuadrada

$$M_{B'B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \Big((\boldsymbol{v}_1)_{B'} \Big| (\boldsymbol{v}_2)_{B'} \Big| \cdots \Big| (\boldsymbol{v}_n)_{B'} \Big). \tag{6}$$

Como consecuencia de (5) se obtiene que

$$(\boldsymbol{x})_B = M_{B'B}^{-1} (\boldsymbol{x})'_B, \tag{7}$$

luego

$$\boxed{M_{BB'} = M_{B'B}^{-1}}$$

Ejemplo 6. *Sean las bases de* $\mathbb{R}^2$

$$B = \{\boldsymbol{v}_1 = (1,0), \boldsymbol{v}_2 = (0,1)\}, \quad B' = \{\boldsymbol{v}'_1 = (2,1), \boldsymbol{v}'_2 = (3,4)\}.$$

Entonces

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{4}{5} \boldsymbol{v}'_1 - \frac{1}{5} \boldsymbol{v}'_2, \quad \boldsymbol{v}_2 = -\frac{3}{5} \boldsymbol{v}'_1 + \frac{2}{5} \boldsymbol{v}'_2.$$

Por tanto

$$M_{B'B} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

TEMA 4: RESOLUCIÓN GAUSSIANA de SEL's

Figura 1: Gauss.

1. REDUCCIÓN GAUSSIANA

Matrices escalonadas y escalonadas reducidas

Sea A una matriz en $\mathbb{K}^{m\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Podemos escribirla en términos de sus filas en la forma

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ -- \\ \boldsymbol{f}_2 \\ -- \\ \vdots \\ -- \\ \boldsymbol{f}_m \end{pmatrix},$$

siendo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{f}_2 &= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}, \\ &\cdots\cdots\cdots, \\ \boldsymbol{f}_m &= \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definición 1. *Un elemento a_{ij} (por tanto en la fila $\boldsymbol{f}_i$) es el* **pivote** *de la fila $\boldsymbol{f}_i$ si $a_{ij} \neq 0$ y es el primer elemento no nulo de esa fila comenzando por la izquierda. Es decir*

$$\boldsymbol{f}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij} \neq 0 & \cdots \end{pmatrix},$$

Comentarios

1. Una fila de ceros $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{o}$ no tiene pivote.
2. El conjunto de pivotes de las filas de una matriz se denomina también conjunto de pivotes de la matriz.

Definición 2. *Una matriz A se dice que es* **escalonada** *cuando:*

1. *Las filas de ceros (si las hay) están situadas en las últimas filas de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1 \neq \boldsymbol{o} \\ -- \\ \boldsymbol{f}_2 \neq \boldsymbol{o} \\ -- \\ \vdots \\ -- \\ \boldsymbol{f}_k \neq \boldsymbol{o} \\ -- \\ \boldsymbol{o} \\ -- \\ \vdots \\ -- \\ \boldsymbol{o} \end{pmatrix},$$

2. *Al moverse de arriba hacia abajo por las filas distintas de* $\boldsymbol{o}$ *los pivotes se van desplazando estrictamente hacia la derecha. De forma equivalente, debajo de cada pivote solo hay ceros.*

Ejemplo 1. *La matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

no es escalonada pues el pivote de la segunda fila no esta estrictamente a la derecha del pivote de la primera fila.

Ejemplo 2. *La matriz*

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & 0 & 0 & 12 \\ 0 & \mathbf{1} & -4 & 8 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

es escalonada.

Ejemplo 3. *La matriz*

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & 0 & 0 & 12 \\ 0 & \mathbf{1} & -4 & 8 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix}.$$

es escalonada.

Definición 3. *Una matriz A se dice que es* **escalonada reducida** *cuando:*

1. *Es escalonada.*

2. *Todos los pivotes son iguales a 1.*

3. *En la columna de cada pivote no solo son cero los elementos por encima del pivote sino también los de debajo del pivote.*

Ejemplo 4. *La matriz*

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 12 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 8 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

es escalonada reducida.

Reducción Gaussiana a la forma escalonada

Definición 4. *Sean A y B dos matrices en $\mathbb{K}^{m\times n}$, se dice que A es* **equivalente** *a B y lo indicaremos como*

$$A \sim B,$$

si podemos obtener B a partir de A mediante una serie de **operaciones básicas** *de los tipos siguientes:*

1. *Intercambiar dos filas distintas:*
$$\boldsymbol{f}_i \leftrightarrow \boldsymbol{f}_j, \quad i \neq j$$
2. *Multiplicar una fila por un número distinto de cero:*
$$\boldsymbol{f}_i \to c\boldsymbol{f}_i, \quad (c \neq 0).$$
3. *Sumar a una fila un múltiplo de otra fila:*
$$\boldsymbol{f}_i \to \boldsymbol{f}_i + c\boldsymbol{f}_j, \quad (i \neq j, c \neq 0).$$

Teorema 1. *Toda matriz es equivalente a una matriz escalonada, de hecho a una matriz escalonada reducida .*

En lugar de hacer la demostración describimos a continuación el denominado **método de Gauss** para reducir una matriz A cualquiera a otra escalonada equivalente. Para ello partiremos de la expresión de A en términos de sus columnas

$$A = \left(\boldsymbol{c}_1 \middle| \boldsymbol{c}_2 \middle| \cdots \middle| \boldsymbol{c}_n\right).$$

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Supondremos que la primera columna no es el vector cero $\boldsymbol{c}_1 \neq \boldsymbol{o}$, en caso contrario comenzaríamos con la primera columna no cero mirando desde la izquierda.

Paso 1: Localizamos la fila $\boldsymbol{f}_i$ en que está la primera componente no nula de $\boldsymbol{c}_1$

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{i1} \neq 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Si no es la primera fila ($i \neq 1$), entonces efectuamos la operación:

$$\boldsymbol{f}_i \leftrightarrow \boldsymbol{f}_1.$$

Así obtenemos una matriz A' en que $a'_{11} \neq 0$.

Paso 2: Generamos ceros en la primera columna de A' debajo de a'_{11} mediante operaciones elementales del tipo

$$\boldsymbol{f}'_i \to \boldsymbol{f}'_i + c\boldsymbol{f}'_1, \quad (i \neq 1, c \neq 0).$$

De esta forma se obtiene una matriz de la forma

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} a'_{11} \neq 0 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \hline 0 & a''_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{array}\right).$$

Paso 3: Aplicamos el mismo procedimiento a la submatriz de dimensiones $(m-1) \times (n-1)$

$$A'_1 = \begin{pmatrix} a''_{22} & \cdots & a''_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a''_{m2} & \cdots & a''_{mn} \end{pmatrix},$$

para llegar a una matriz equivalente de la forma

$$A_2 = \left(\begin{array}{cc|ccc} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} & \cdots & a''_{1n} \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & \cdots & a''_{2n} \\ \hline 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \cdots & a''_{mn} \end{array}\right).$$

Paso 4: Aplicamos sucesivamente el mismo procedimiento hasta llegar a la forma escalonada.

Una vez que se ha obtenido la forma escalonada, para llegar a la forma escalonada reducida se aplican las operaciones básicas para reducir los pivotes a la unidad y a cero los elementos de matriz por encima de los pivotes.

2. RESOLUCIÓN GAUSSIANA de SEL's

Sistemas de ecuaciones lineales

Denotemos mediante (S) a un sistema de m ecuaciones lineales $(E_1), \ldots, (E_m)$ con n incógnitas $x_1, \ldots, x_m$ en $\mathbb{K}$:

$$(S) \begin{cases} (E_1); \quad a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = b_1, \\ (E_2); \quad a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_{2n} = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (E_m); \quad a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \cdots + a_{mn}\, x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

En forma matricial se escribe

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}, \end{pmatrix} = \text{matriz de coeficientes}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \text{vector de incógnitas}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} = \text{vector de términos independientes}$$

Comentario: Hacemos notar que todas las columnas $\boldsymbol{c}_i$ de la matriz A son distintas del vector cero, ya que si fuera $\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{o}$ la incógnita x_i no aparecería en ninguna ecuación del SEL.

Definición 5. *Definimos la* **matriz ampliada** $\widetilde{A}$ *asociada al sistema* (S) *como la matriz de* m *filas y* $n+1$ *columnas*

$$\widetilde{A} = (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m, \end{array}\right)$$

Comentario: La correspondencia $(S) \leftrightarrow \widetilde{A}$ entre SEL's y matrices (ampliadas) es biyectiva. Es decir, dado un SEL está determinada su matriz ampliada asociada.

Ejemplo 5. *Para el SEL*

$$(S) \begin{cases} x_2 + ix_3 = 1, \\ -x_1 + x_4 = 1 - i \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

su matriz extendida asociada es

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1-i \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6. *Dada la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Es la matriz extendida $\widetilde{A}$ del SEL siguiente

$$(S)\left\{\begin{array}{c} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 + i. \end{array}\right.$$

El método de resolución Gaussiana

Este método para resolver SEL's se basa en el teorema siguiente:

Teorema 2. *Si* $\mathrm{Sol}(S)$ *denota al conjunto de vectores* $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ *solución de un SEL* (S) *con matriz ampliada* $\widetilde{A}$*. Entonces si* (S') *es el SEL asociado a un matriz ampliada* $\widetilde{A}'$ *equivalente a* $\widetilde{A}$ *se verifica que*

$$\mathrm{Sol}(S) = \mathrm{Sol}(S').$$

Es decir (S) *y* (S') *tienen el mismo conjunto de soluciones.*

Demostración: Basta traducir la operaciones básicas sobre la matriz ampliada $\widetilde{A}$ en operaciones sobre las ecuaciones del sistema (S) de ecuaciones lineales:

1. Intercambiar dos filas distintas en $\widetilde{A}$:

$$(E_i) \leftrightarrow (E_j), \quad i \neq j$$

2. Multiplicar una fila de $\widetilde{A}$ por un número distinto de cero:

$$(E_i) \to c(E_i), \quad (c \neq 0).$$

3. Sumar a una fila de $\widetilde{A}$ un múltiplo de otra fila:

$$(E_i) \to (E_i) + c(E_j), \quad (i \neq j, c \neq 0).$$

En todos los casos, las condiciones sobre las incógnitas que imponen el SEL original y el SEL transformado son equivalentes, así que el conjunto de soluciones es el mismo □

Comentarios: De esta forma la estrategia para resolver un SEL (S) es

1. Se considera la matriz ampliada $\widetilde{A}$ de (S) y se determina una matriz escalonada $\widetilde{A}'$ (o escalonada reducida) equivalente a $\widetilde{A}$.

2. Se resuelve el SEL (S') correspondiente a $\widetilde{A}'$.

Ejemplo 7. *Consideremos el sistema del ejemplo 5:*

$$(S)\begin{cases} x_2 + ix_3 = 1, \\ -x_1 + x_4 = 1-i \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

su matriz extendida asociada es

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1-i \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

una escalonada equivalente es

$$\widetilde{A}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1-i \\ 0 & 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Luego (S) es equivalente a

$$(S)\begin{cases} -x_1 + x_4 = 1-i, \\ x_2 + ix_3 = 1 \\ -ix_3 = -i. \end{cases}$$

Por tanto resolviendo el sistema

$$x_3 = 1, \quad x_2 = 1 - ix_3 = 1-i, \quad x_4 = 1 - i + x_1.$$

Es decir, podemos tomar x_1 como incógnita libre y escribir la solución en la forma

$$x_1 = \textit{arbitraria}, \quad x_2 = 1-i, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1-i+x_1.$$

El teorema de Rouche-Frobenius

Para resolver un SEL (S') correspondiente a una matriz escalonada $\widetilde{A}'$ se analiza primero si el SEL es compatible (tiene solución) ó incompatible (no tiene solución). Veamos que el sistema es compatible si y solo si la matriz $\widetilde{A}'$ no posee filas en que el único elemento distinto de cero es el último.

$$\boldsymbol{f}'_{inc} = (0\,0\,\cdots 0\, c_{n+1} \neq 0).$$

Es claro que si existe una fila de este tipo, tendríamos una ecuación del SEL $(S)'$ que no tiene solución

$$0 = c_{n+1}.$$

Si no existen filas $\boldsymbol{f}'_{inc}$ tendremos que las filas de $\widetilde{A}'$ distintas de $\boldsymbol{o}$ tendrán **pivotes** en posiciones distintas de la última componente

$$\boldsymbol{f}'_j = (0\,0\,\cdots 0\, a'_{ij} \neq 0\, a'_{ij+1}\,\cdots\, a'_{in} b'_{n+1}), \quad 1 \leq j < n+1.$$

Estas filas dán lugar a ecuaciones lineales de la forma

$$a'_{ij}x_j + a'_{ij+1}x_{j+1} + \cdots + a'_{in}x_n = b'_{n+1}.$$

Cada una de estas ecuaciones permite despejar la incógnita x_j en función de $x_{j+1}, \ldots, x_n$.

$$x_j = -\Big(\frac{a'_{ij+1}}{a'_{ij}}x_{j+1} + \cdots + \frac{a'_{in}}{a'_{ij}}x_n\Big) + \frac{b'_{n+1}}{a'_{ij}}.$$

Incógnitas x_j ligadas a las posiciones de los pivotes en filas de este tipo se denominan **incógnitas principales**. El número p de incógnitas principales es igual al número de pivotes de la matriz $\widetilde{A}'$, que al suponer que no existen filas $\boldsymbol{f}'_{inc}$, es igual al de pivotes de A' siendo $\widetilde{A}' = (A'|\mathbf{b}')$. Despejando incógnitas principales en las filas de $\widetilde{A}'$ distintas de $\boldsymbol{o}$, empezando por la fila en la última posición y siguiendo de arriba a abajo. Encontramos así que el SEL tiene solución (es compatible) y que la solución es dada por una serie de ecuaciones que expresan las incógnitas principales en términos de las no principales (**incógnitas libres**). Entonces la solución será única si y solo si el número p de incógnitas principales es igual al número n de incógnitas.

Podemos resumir esta discusión en el siguiente teorema:

Teorema 3. Rouche-Fobenius.

Se verifica:

1. *El SEL (S) es compatible si y solo si la matriz $\widetilde{A}' = (A'|\mathbf{b}')$ tiene el mismo número de pivotes que la submatriz A' (si y solo si $\widetilde{A}'$ no posee filas en que el único elemento distinto de cero es el último).*

2. *Cuando (S) es compatible, será compatible determinado si el número de pivotes p de la submatriz A' verifica $p = n$ y compatible indeterminado si $p < n$. En este último caso la solución dependerá de las $n - p$ incógnitas libres.*

Comentarios: Si el SEL es homogéneo

$$(S)\left\{\begin{array}{c} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = 0, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_{2n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n = 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

el sistema es siempre compatible pues siempre tiene la solución trivial

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Como en este caso $\mathbf{b} = \boldsymbol{o}$ entonces $\widetilde{A} = (A|\boldsymbol{o})$ y es inmediato ver que también $\widetilde{A}' = (A'|\boldsymbol{o})$ y por tanto podemos proceder aplicando reducción Gaussiana a A en lugar de a $\widetilde{A}$. Así, si p es el número de pivotes de la matriz A', el sistema será compatible determinado cuando $p = n$ y compatible indeterminado cuando $p < n$. En este último caso la solución dependerá de las $n - p$ incógnitas libres.

3. APLICACIONES de la RESOLUCIÓN GAUSSIANA

Veamos ahora como muchas de las cuestiones planteadas anteriormente se reducen a cuestiones sobre SEL's.

Independencia lineal

Sea $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{K}^n$. Veamos como resolver diversos problemas de dependencia lineal, cálculo de coordenadas, cambios de base... mediante resolución de SEL's.

¿Son linealmente independientes? (Se supone $m \leq n$)

La pregunta es equivalente a saber si la única solución $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{K}$ de la ecuación vectorial

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{o},$$

es la trivial

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0.$$

Si escribimos los vectores $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ en forma de columnas con n componentes

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{a}_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nm} \end{pmatrix}.$$

La cuestión es saber si el sistema homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1m}\,x_m = 0, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2m}\,x_{2n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nm}\,x_m = 0. \end{array} \right. \tag{3}$$

que en forma matricial se escribe

$$A\mathbf{x} = \boldsymbol{o}, \quad A = (\boldsymbol{a}_1|\cdots|\boldsymbol{a}_m),$$

admite solo la solución trivial.

Si $m > n$ entonces $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\} \subset \mathbb{K}^n$ serán linealmente dependientes ya que $\dim \mathbb{K}^n = n < m$. Supongamos que **queremos extraer el máyor subconjunto linealmente independiente** de entre estos vectores. Para ello determinamos una matriz escalonada A' equivalente a A

$$A = (\boldsymbol{a}_1 | \cdots | \boldsymbol{a}_m) \sim A' = (\boldsymbol{a}'_1 | \cdots | \boldsymbol{a}'_m).$$

Las soluciones de las dos ecuaciones vectoriales

$$x_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_m \boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{o},$$

y

$$x_1 \boldsymbol{a}'_1 + \ldots + x_m \boldsymbol{a}'_m = \boldsymbol{o},$$

son las mismas y es sencillo comprobar que al ser A' una matriz escalonada, un subconjunto linealmente independiente maximal de $\{\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_m\}$ está formado por los vectores columna $\{\boldsymbol{a}'_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}'_{i_r}\}$ que contienen pivotes de A' (todos los demás vectores columnas son combinaciones lineales de estos). Lo mismo ocurrirá entonces con los vectores columna $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_r}\}$: son un subconjunto linealmente independiente maximal de $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$. Adviértase que forman entonces una base vectorial del subespacio lineal $Lin\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$.

Coordenadas respecto de bases vectoriales

Sea $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de $\mathbb{K}^n$ (así que $m \leq n$). Denotemos M al subespacio lineal

$$M = Lin\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}.$$

Por tanto $B = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ es una base vectorial de M. Dado

$$\mathbf{b} \in M, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}.$$

para encontrar las coordenadas $x_1, \ldots, x_m$ de $\mathbf{b}$ en la base B

$$\mathbf{b} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_m \boldsymbol{a}_m,$$

basta resolver el SEL

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1m}\, x_m = b_1, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_{2m} = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \cdots + a_{nm}\, x_m = b_n. \end{array} \right. \tag{4}$$

Como la solución existe y es única, el número de pivotes de la matriz ampliada escalonada $\widetilde{A}'$ será igual a m el número de incógnitas, así que $\widetilde{A}'$ tendrá $n-m$ filas cero. En particular la matriz ampliada reducida $\widetilde{A}'$ será de la forma

$$\widetilde{A}' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es decir, las m primeras coordenadas de la última columna nos dán las coordenadas pedidas.

Resolución múltiple de un SEL

Si queremos determinar las coordenadas de varios vectores

$$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r \in M, \quad \mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, r,$$

en lugar de resolver un SEL para cada uno de ellos

$$(S_k) \left\{ \begin{array}{c} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1m}\,x_m = b_{1k}, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_{2m} = b_{2k}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nm}\,x_m = b_{nk}. \end{array} \right. \qquad k = 1, \ldots, r, \tag{5}$$

es más facil usar una **resolución múltiple**. Para ello aplicaremos la reducción Gaussiana a la matriz ampliada

$$\widetilde{A} = (A|\mathbf{b_1}|\cdots|\mathbf{b_r}) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_{21} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{array}\right)$$

y determinaremos su matriz escalonada reducida equivalente, que será de la forma

$$\widetilde{A}' = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{11} & \cdots & x_{1r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_{21} & \cdots & x_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{m1} & \cdots & x_{mr} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

Así que las m primeras componentes de las r últimas columnas nos proporcionan las coordenadas pedidas.

Cambio de base vectorial. Matriz asociada

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y sean

$$B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}, \quad B' = \{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\},$$

dos bases vectoriales de V. Como hemos visto anteriormente, para determinar la matriz de cambio de base $M_{B'B}$ que relaciona las coordenadas de un vector $\boldsymbol{x}$ en ambas bases

$$(\boldsymbol{x})_{B'} = M_{B'B}(\boldsymbol{x})_B,$$

necesitamos conocer las coordenadas de los vectores $\boldsymbol{v}_i$ de la base B respecto de los vectores $\boldsymbol{v}'_i$ de la base B'

$$\boldsymbol{v}_i = a_{11}\boldsymbol{v}'_1 + a_{21}\boldsymbol{v}'_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{v}'_n, \quad (\boldsymbol{v}_i)_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

De esta forma la matriz de **cambio de base** viene dada por

$$M_{B'B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \Big((\boldsymbol{v}_1)_{B'} \Big| (\boldsymbol{v}_2)_{B'} \Big| \cdots \Big| (\boldsymbol{v}_n)_{B'}\Big). \tag{6}$$

En general conocemos de partida los vectores de ambas bases como elementos de $\mathbb{K}^n$, así que podemos aplicar al método de resolución simultanea visto en el apartado anterior. De esta forma partimos de la matriz ampliada

$$\widetilde{A} = (\boldsymbol{v}'_1|\cdots|\boldsymbol{v}'_n|\boldsymbol{v}_1|\cdots|\boldsymbol{v}'_n) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} v'_{11} & v'_{12} & \cdots & v'_{1n} & v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ v'_{21} & v'_{22} & \cdots & v'_{2n} & v_{21} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v'_{n1} & v'_{n2} & \cdots & v'_{nn} & v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{array}\right)$$

y determinaremos su matriz escalonada reducida equivalente, que será de la forma

$$\widetilde{A}' = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) = (I|M_{B'B}).$$

Lo que nos proporciona la matriz de cambio de base.

Ejemplo 8. *Determinar la matriz de cambio de base para las bases de $\mathbb{R}^3$ siguientes*

$$B = \{(1,1,0),(-1,1,1),(0,1,2)\}, \quad B' = \{(2,1,1),(0,0,1),(-1,1,1)\}.$$

Formamos la matriz ampliada

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Empleando transformaciones básicas

$$(F_1 \leftrightarrow F_2) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right).$$

$$(F_2 \to F_2 - 2F_1,\ F_3 \to F_3 - F_1) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$(F_2 \to F_3) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right).$$

$$(F_3 \to -F_3/3) \longrightarrow (F_1 \to F_1 - F_3) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1 & 2/3 \end{array}\right).$$

Por tanto

$$M_{B'B} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la matriz inversa

Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz cuadrada cualquiera y $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ son los vectores de la base canónica de $\mathbb{K}^n$, podemos escribir

$$A = (A\boldsymbol{e}_1|\cdots|A\boldsymbol{e}_n).$$

De igual forma, si existe la matriz inversa podemos escribir

$$A^{-1} = (A^{-1}\boldsymbol{e}_1|\cdots|A^{-1}\boldsymbol{e}_n).$$

Por tanto calcular la matriz inversa es equivalente a calcular los vectores

$$\boldsymbol{v}_1 = A^{-1}\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n = A^{-1}\boldsymbol{e}_n.$$

Pero estos vectores son las soluciones de los SEL's

$$A\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1, \cdots, A\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{e}_n.$$

con matriz de coeficientes A. Podemos entoncer usar el método de resolución simultanea partiendo de la matriz ampliada

$$\widetilde{A} = (A|\boldsymbol{e}_1|\cdots\boldsymbol{e}_n) = (A|I).$$

Así, reduciendola a la forma escalonada reducida equivalente nos qudará

$$\widetilde{A}' = (I|\boldsymbol{v}_1|\cdots\boldsymbol{v}_n) = (I|A^{-1}).$$

Ejemplo 9. *Sea la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Formamos la matriz ampliada

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Usando transformaciones básicas obtenemos su forma escalonada reducida equivalente

$$\widetilde{A}' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -3/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -3/2 \end{array}\right).$$

Por tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1/2 & -3/2 & 7/2 \\ 1/2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

Ecuaciones intrínsecas de un subespacio vectorial

Una manera simple de definir subespacios vectoriales M de $\mathbb{K}^n$ es a través de un sistema de ecuaciones homogéneas

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = 0, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_{2n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n = 0. \end{array}\right.$$

que se denominan **ecuaciones intrísecas** de M. Es decir M es el conjunto de vectores $\mathbf{x}$ de $\mathbb{K}^n$ que verifican la ecuación matricial

$$A\mathbf{x} = \boldsymbol{o}, \tag{7}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}, \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1. *Probar que el conjunto M determinado por la ecuación matricial* (7) *es un subespacio vectorial.*

Además todo subespacio vectorial M de $\mathbb{K}^n$ admite un sistema de ecuaciones intrínsecas. Para probarlo, supongamos que conocemos una base vectorial $B = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ de M dada en forma de columnas por

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{a}_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Para saber si un vector $\mathbf{x}$ de $\mathbb{K}^n$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

pertenece a M bastará con saber si puede descomponerse como combinación lineal

$$\mathbf{x} = c_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_m \boldsymbol{a}_m.$$

Es decir si es compatible el SEL siguiente

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}\, c_1 + a_{12}\, c_2 + \cdots + a_{1m}\, c_m = x_1, \\ a_{21}\, c_1 + a_{22}\, c_2 + \cdots + a_{2m}\, c_m = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\, c_1 + a_{n2}\, c_2 + \cdots + a_{nm}\, c_m = x_n. \end{array} \right.$$

Para ello consideraremos la matriz ampliada

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & x_n \end{array} \right),$$

y la reduciremos a forma escalonada

$$\widetilde{A}' = \left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1m} & c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2m} & c_{21}x_1 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{mm} & c_{m1}x_1 + \cdots + c_{mn}x_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-m1}x_1 \cdots + b_{n-mn}x_n \end{array} \right)$$

De esta forma el SEL es compatible si y solo si los elementos extremos de las últimas filas se anulan. Es decir

$$\left\{ \begin{array}{c} b_{11}\, x_1 + \cdots + b_{1n}\, x_n = 0, \\ b_{21}\, x_1 + \cdots + b_{2n}\, x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n-m1}x_1 \cdots + b_{n-mn}x_n = 0. \end{array} \right.$$

Están son las ecuaciones intrísecas de M.

TEMA 5: APLICACIONES LINEALES

Figura 1: Todas las aplicaciones lineales se reducen a matrices.

1. APLICACIONES LINEALES

Aplicaciones lineales. Núcleo, espacio Imagen y rango.

Las aplicaciones más sImples entre conjuntos son las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales. Pueden adoptan diversas formas en espacios vectoriales de funciones (operadores diferenciales, operadores integrales,...), pero si estos espacios son de dimensión finita se reducen a matrices.

Definición 1. *Dados dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ se denomina* **aplicación lineal** *de V en W a toda aplicación*

$$T : V \to W, \quad \boldsymbol{w} = T\boldsymbol{v},$$

que verifique

1. *Para todo par $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$*
$$T(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = T\boldsymbol{v}_1 + T\boldsymbol{v}_2.$$

2. *Para todo $c \in \mathbb{K}$ y $\boldsymbol{v} \in V$*
$$T(c\boldsymbol{v}) = c(T\boldsymbol{v}).$$

Es decir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{La imagen de la suma es la suma de las imágenes} \\ \textit{La imagen de un número por un vector es el número por la imagen del vector} \end{array} \right\}$$

Se denomina

$$\textbf{Núcleo} \textit{ de } T : \ \operatorname{Ker} T = \{\boldsymbol{v} \in V \textit{ tal que } T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}\},$$

$$\textbf{Imagen} \textit{ de } T : \ \operatorname{Im} T = \{\boldsymbol{w} \in W \ : \textit{ existe } \boldsymbol{v} \in V \textit{ tal que } T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}\},$$

Propiedades

1. $\operatorname{Ker} T$ es un subespacio vectorial de V.

2. $\operatorname{Im} T$ es un subespacio vectorial de W.

3. $T\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$.

4. $T(-\boldsymbol{v}) = -T\boldsymbol{v}$.

5. Dado $\boldsymbol{v} \in V$ de la forma
$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots c_k\boldsymbol{a}_k,$$
entonces
$$T\boldsymbol{v} = c_1T\boldsymbol{a}_1 + \cdots c_kT\boldsymbol{a}_k.$$
6. Si $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ es una base de V, entonces
$$\mathrm{Im}T = Lin\{T\boldsymbol{u}_1, T\boldsymbol{u}_2, \dots, T\boldsymbol{u}_n\}.$$

Ejercicio 1. *Probar todas las propiedades anteriores.*

Teorema 1. *Dada una aplicación lineal*
$$T : V \to W, \quad \boldsymbol{w} = T\boldsymbol{v},$$
se verifica
$$\dim V = \dim(\mathrm{Ker}T) + \dim(\mathrm{Im}T). \tag{1}$$

Demostración:

Sea $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m\}$ una base de Ker$T$ ($T\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{o}$) y ampliemosla a una base $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ de V. Entonces
$$\mathrm{Im}T = Lin\{T\boldsymbol{u}_1, \dots, T\boldsymbol{u}_m, T\boldsymbol{v}_{m+1}, \dots, T\boldsymbol{v}_n\} = Lin\{T\boldsymbol{v}_{m+1}, \dots, T\boldsymbol{v}_n\}.$$

Probemos que $\{T\boldsymbol{v}_{m+1}, \dots, T\boldsymbol{v}_n\}$ son linealmente independientes, con lo que (1) quedara probado. Si existen $c_i \in \mathbb{K}$ tal que
$$c_{m+1}T\boldsymbol{v}_{m+1} + \cdots + c_nT\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o} \Longrightarrow T(c_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{o},$$
por tanto $c_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n \in \mathrm{Ker}T$ y existirá una descomposición en la base de Ker$T$
$$c_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = b_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + \boldsymbol{u}_m \Longrightarrow c_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n - b_1\boldsymbol{u}_1 - \ldots - \boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{o}.$$
Al ser $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ linealmente independientes, esto es posible solo si todos los coeficientes son cero. En particular todos los coeficientes c_i son cero, luego $\{T\boldsymbol{v}_{m+1}, \dots, T\boldsymbol{v}_n\}$ son linealmente independientes. □

Definición 2. *Se denomina* **rango** *de una aplicación lineal* T *a la dimensión* $\dim(\mathrm{Im}T)$ *del subespacio lineal* ImT.

Aplicaciones lineales inyectivas. Aplicación Inversa

Teorema 2. *Una aplicación lineal*

$$T : V \to W, \quad \boldsymbol{w} = T\boldsymbol{v},$$

es inyectiva si y solo si

$$\operatorname{Ker} T = \{\boldsymbol{o}\}.$$

Es decir cuando

$$T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \iff \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}. \tag{2}$$

Demostración:
($\Longrightarrow$) Supongamos que T es inyectiva. Al ser T una aplicación lineal se verifica que

$$T\boldsymbol{v} = T(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{o}) = T\boldsymbol{v} + T\boldsymbol{o},$$

luego

$$T\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}.$$

Por otro lado como T es inyectiva, si $T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$, debe suceder que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$.

($\Longleftarrow$) Supogamos que (2) se cumple. Entonces si

$$T\boldsymbol{v}_1 = T\boldsymbol{v}_2,$$

se tiene que

$$T(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{o},$$

luego por (2) $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{o}$, así que $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$, lo que prueba que T es inyectiva $\square$

Teorema 3. *Si T es una aplicación lineal biyectiva*

$$T : V \to W, \quad \boldsymbol{w} = T\boldsymbol{v},$$

entonces su aplicación inversa

$$T^{-1} : W \to V, \quad \boldsymbol{v} = T^{-1}\boldsymbol{w},$$

es una aplicación lineal.

Demostración: Dados $\boldsymbol{w}_1$ y $\boldsymbol{w}_2$ en W, si $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ son sus pre-Imagenes (únicas al ser T biyectiva) en V

$$T\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{w}_1, \quad T\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_2,$$

se cumple que

$$T(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = T\boldsymbol{v}_1 + T\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2,$$

luego

$$T^{-1}(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = T^{-1}\boldsymbol{w}_1 + T^{-1}\boldsymbol{w}_2.$$

De igual forma se demuestra que

$$T^{-1}(c\boldsymbol{w}) = cT^{-1}\boldsymbol{w}.$$

□

Ejercicio 2. *Probar que una aplicación lineal*

$$T : V \to W, \quad \boldsymbol{w} = T\boldsymbol{v},$$

es biyectiva si y solo si

$$\mathrm{Ker}T = \{\boldsymbol{o}\} \text{ y } \mathrm{Im}T = W$$

Operaciones con aplicaciones lineales. Composición

Suma y producto por escalares

Definición 3. *Dadas dos aplicaciones lineales de la forma*

$$T_i : V \to W, \quad i = 1, 2,$$

definimos su suma

$$T_1 + T_2 : V \to W, \quad (T_1 + T_2)\boldsymbol{v} = T_1\boldsymbol{v} + T_2\boldsymbol{v}.$$

Dada una aplicación lineal

$$T : V \to W,$$

y $c \in \mathbb{K}$, definimos

$$cT : V \to W, \quad (cT)\boldsymbol{v} = c(T\boldsymbol{v}).$$

Ejercicio 3. *Probar que $T_1 + T_2$ y cT son también aplicaciones lineales.*

Composición

Teorema 4. *Sean dos aplicaciones lineales de la forma*

$$T : V \to W, \quad \boldsymbol{w} = T\boldsymbol{v},$$

y

$$S : W \to U \quad \boldsymbol{u} = S\boldsymbol{w}.$$

Entonces la composición de ambas

$$ST : V \to W, \quad \boldsymbol{u} = (ST)\boldsymbol{v} = S(T\boldsymbol{v}),$$

es también una aplicación lineal.

Demostración: La demostración es muy sImple usando la linealidad de ambas aplicaciones.

$$(ST)(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=S(T(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2))=S(T(\boldsymbol{v}_1)+T(\boldsymbol{v}_2))=S(T(\boldsymbol{v}_1))+S(T(\boldsymbol{v}_2))=(ST)(\boldsymbol{v}_1)+(ST)(\boldsymbol{v}_2).$$

De igual forma se demuestra que

$$(ST)(c\boldsymbol{v})=c(ST)(\boldsymbol{v}).$$

□

2. TIPOS de APLICACIONES LINEALES

Matrices

Matrices como aplicaciones lineales

Como vímos en el capítulo 3, una matriz A de dimensiones $m\times n$ determina una aplicación lineal del espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ en el espacio vectorial $\mathbb{K}^m$

$$A: K^n\to K^m,\quad \boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}.$$

En esta construcción $A\boldsymbol{x}$ denota el producto de la matriz A por el vector columna (matriz columna) $\boldsymbol{x}$. Las coordenadas del vector $\boldsymbol{y}$ vienen dadas por

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\quad i=1,\dots,m. \tag{3}$$

Obviamente, debido a las propiedades del producto matricial esta aplicación verifica los requisitos exigidos a una aplicación lineal:

1. Para todo par $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in\mathbb{K}^n$
$$A(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=A\boldsymbol{v}_1+A\boldsymbol{v}_2.$$
2. Para todo $c\in\mathbb{K}$ y $\boldsymbol{v}\in K^n$
$$A(c\boldsymbol{v})=c(A\boldsymbol{v}).$$

Adviértase también que si denotamos mediante $\boldsymbol{a}_i$ a las columnas de A

$$A=\Big(\boldsymbol{a}_1\Big|\boldsymbol{a}_2\Big|\cdots\Big|\boldsymbol{a}_n\Big),$$

entonces

$$A\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n. \tag{4}$$

Aplicación lineal asociada a un SEL

Sea (S) un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, \ldots, x_m$ en $\mathbb{K}$:

$$(S) \left\{ \begin{array}{c} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = b_1, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_{2n} = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \cdots + a_{mn}\, x_n = b_m. \end{array} \right. \tag{5}$$

En forma matricial se reduce al problema siguiente: Dado un vector $\mathbf{b} \in K^m$ determinar los vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ que verifican

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}, \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{a}_1 \middle| \boldsymbol{a}_2 \middle| \cdots \middle| \boldsymbol{a}_n\right), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

Si consideramos la matriz de coeficientes A como una aplicación lineal

$$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad \text{Aplicación lineal asociada al SEL } (S),$$

entonces el problema es caracterizar el subespacio ImA de $\mathbb{K}^m$ para poder decidir dado $\mathbf{b} \in K^m$ si pertenece o no a ImA. Si consideramos las base canónica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ de $\mathbb{K}^n$, entonces sabemos que

$$\boldsymbol{a}_i = A\boldsymbol{e}_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

y que

$$\mathrm{Im}A = Lin\{A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_n\} = Lin\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}.$$

En particular considerando el sistema homogéneo asociado (S_h)

$$(S_h) \left\{ \begin{array}{c} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = 0, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_{2n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \cdots + a_{mn}\, x_n = 0. \end{array} \right. \tag{6}$$

En forma matricial se reduce a determinar los vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ que verifican

$$A\mathbf{x} = \mathbf{o}.$$

Es decir a caracterizar

$$\mathrm{Ker}A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \, : \, A\mathbf{x} = \mathbf{o}\}.$$

Ejercicio 4. *Probar que el conjunto de soluciones $Sol(S)$ del SEL (S) satisface*

$$Sol(S) = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \textit{ siendo } \mathbf{x}_0 \textit{ una solución cualquiera de } (S) \textit{ y } \mathbf{x} \textit{ la solución general de } (S_h) \ \}$$

Operadores diferenciales

En el capítulo 2 vímos que dado un intervalo abierto $I = (a, b)$ el conjunto $C^{(N)}(I;\mathbb{K})$ de funciones $u : I \to \mathbb{K}$ que son derivables hasta el orden k con derivadas continuas es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones

$$\text{Suma}: \ (u + v)(x) = u(x) + v(x); \quad \text{Producto por escalares } c \in \mathbb{K}: \ (cu)(x) = cu(x).$$

Por otro lado sabemos que la operación de derivación de funciones es **lineal**. Es decir: la derivada de una suma es la suma de las derivadas y la derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función

$$D(u(x) + v(x)) = Du(x) + Dv(x), \quad D(cu(x)) = cDu(x),$$

donde $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ denota la derivada respecto de x

Las mismas propiedades se cumplen para las derivadas de orden cualquiera

$$D^n(u(x) + v(x)) = D^n u(x) + D^n v(x), \quad D^n(cu(x)) = cD^n u(x).$$

Lo cual nos lleva a introducir un tipo natural de aplicaciones lineales sobre espacios de funciones derivables.

Definición 4. *Sean $a_n = a_n(x)\,(n = 0, 1, ldots, p)$ funciones dadas de $C^{(N)}(I;\mathbb{K})$ con $p < N$, entonces podemos definir la aplicación lineal*

$$T : C^{(N)}(I;\mathbb{K}) \to C^{(N-p)}(I;\mathbb{K}),$$

dada por

$$\boxed{Tv = a_p(x)D^p v(x) + a_{p-1}(x)D^{p-1}v(x) + \cdots a_1(x)Dv(x) + a_0(x)v(x)}$$

que se denomina **operador diferencial** *de orden p.*

<u>Comentarios</u>

1. Los operadores diferenciales son objetos fundamentales en la teoría de ecuaciones diferenciales lineales.

2. Una ecuación diferencial lineal es una ecuación del tipo: dada la función $b(x)$ en $C^{(N-p)}(I;\mathbb{K})$, encontrar funciones $v(x)$ en $C^{(N)}(I;\mathbb{K})$ tal que
$$Tv = b.$$

3. Las ecuaciones diferenciales lineales se estudian en las signaturas de Métodos Matemáticos I y II.

Ejercicio 5. *Sea el operador diferencial*

$$T : C^{(2)}(I;\mathbb{K}) \to C^{(0)}(I;\mathbb{K}),$$

dado por

$$Tv = D^2 v(x).$$

Determinar $\operatorname{Ker} T$.

3. MATRIZ ASOCIADA a una APLICACIÓN LINEAL

Definición 5. *Sea una aplicación lineal*

$$T : V \to W, \quad \mathbf{x}' = T\mathbf{x},$$

y dos bases vectoriales $B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ y $B' = \{\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_m\}$ de V y de W respectivamente. Cada vector imagen de la base B tiene una descomposición única en la base B'

$$T\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\boldsymbol{v}'_j, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

La matriz

$$(T)_{B'B} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se denomina matriz asociada a T respecto de las bases B y B'.

Expresiones alternativas de $T_{B'B}$

1. Si escribimos como vectores columna las componentes en la base B' de los vectores imagen $T\boldsymbol{v}_i$

$$(T\boldsymbol{v}_1)_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad (T\boldsymbol{v}_2)_{B'} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad (T\boldsymbol{v}_n)_{B'} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

   podemos caracterizar la matriz en la forma

$$(T)_{B'B} = \Big((T\boldsymbol{v}_1)_{B'} \Big| (T\boldsymbol{v}_2)_{B'} \Big| \cdots \Big| (T\boldsymbol{v}_n)_{B'} \Big).$$

2. Si escribimos $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$ en $\mathbf{x}' = T\mathbf{x}$ desarrollados es las bases B y B'

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{v}_i, \quad \mathbf{x}' = \sum_{j=1}^{m} x'_j\boldsymbol{v}'_j,$$

y usamos (7)

$$\mathbf{x}' = \sum_{j=1}^{m} x'_j \boldsymbol{v}'_j = T(\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i T\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\boldsymbol{u}'_j = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i)\boldsymbol{u}'_j.$$

Es decir

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i.$$

Por tanto usando vectores columna para las coordenadas de $\mathbf{x}$ y de $\mathbf{x}' = T\mathbf{x}$

$$(\mathbf{x})_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{x}')_{B'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_m \end{pmatrix}$$

nos queda

$$\boxed{(\mathbf{x}')_{B'} = (T)_{B'B}(\mathbf{x})_B}$$

Ejemplo 1. *Sea*

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad T(x,y,z) = (x-y, x+2z, y, y+z).$$

La matriz asociada en las bases canónicas es

$$(T)_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6. *Calcular las matrices (en la base canónica) correspondientes a las siguientes transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:*

1. *Dilatación de magnitud $c > 0$*

$$T\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{v}.$$

2. *Rotación de $\pi/2$:*

$$T(x,y) = (-y, x).$$

3. *Reflexión respecto de la diagonal principal:*

$$T(x,y) = (y, x).$$

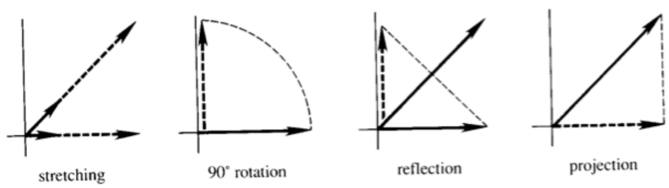

Figura 2: Aplicaciones lineales.

S*olución:*

1. $A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Propiedades

1. Si A_1 y A_2 son las matrices asociadas a dos aplicaciones lineales (en ciertas bases B y B' de V y W)
$$T_i : V \to W, \quad i = 1, 2,$$
entonces $A_1 + A_2$ es la matriz asociada a $T_1 + T_2$.

2. Si A es la matriz asociada a la aplicación lineal T (en ciertas bases B y B' de V y W) entonces cA es la matriz asociada a cT.

3. Sean
$$A_T \text{ matriz asociada a } T : V \to W \text{ en las bases } B \text{ de } V \text{ y } B' \text{ de } W,$$
$$A_S \text{ matriz asociada a } S : W \to U \text{ en las bases } B' \text{ de } W \text{ y } B'' \text{ de } U,$$
y
$$A_{ST} \text{ matriz asociada a } ST : V \to U \text{ en las bases } B \text{ de } V \text{ y } B'' \text{ de } U.$$

Entonces A_{ST} es el producto

$$A_{ST} = A_S A_T.$$

4. Si A es la matriz asociada a una aplicación lineal biyectiva

$$T : V \to W,$$

(en ciertas bases B y B' de V y W), entonces A^{-1} es la matriz asociada a la aplicación inversa

$$T^{-1} : W \to V,$$

respecto de las bases B' y B de W y V.

Demostración: Haremos solo la demostración de la propiedad 3. Para ello introducimos vectores columna

$$(\mathbf{x})_B = \text{coordenadas de } \mathbf{x} \text{ en la base } B \text{ de } V,$$

$$(\mathbf{x}')_{B'} = \text{coordenadas de } \mathbf{x}' = T\mathbf{x} \text{ en la base } B' \text{ de } W = (T)_{B'B}(\mathbf{x})_B$$

$$(\mathbf{x}'')_{B''} = \text{coordenadas de } \mathbf{x}'' = S\mathbf{x}' \text{ en la base } B'' \text{ de } U = (S)_{B''B'}(\mathbf{x})'_{B'},$$

Entonces

$$(\mathbf{x}'')_{B''} = (S)_{B''B'}(\mathbf{x})'_{B'} = (S)_{B''B'}(T)_{B'B}(\mathbf{x})_B = (A_S A_T)(\mathbf{x})_B,$$

lo que demuestra la propiedad 3.

Cambios de base y $(T)_{B'B}$

Supongamos una aplicación lineal

$$T : V \to W, \quad \mathbf{x}' = T\mathbf{x},$$

y que tenemos bases B_1 y B_1' en V y W, respectivamente. La matriz de la aplicación en estas bases verifica

$$(\mathbf{x}')_{B_1'} = (T)_{B_1'B_1}(\mathbf{x})_{B_1},$$

Si efectuamos cambios de bases en ambos espacios V (cambiamos B_1 por B_2) y W (cambiamos B_1' por B_2'), entonces

$$(\mathbf{x}')_{B_2'} = M_{B_2'B_1'}(\mathbf{x}')_{B_1'}, \quad (\mathbf{x})_{B_2} = M_{B_2B_1}(\mathbf{x})_{B_1},$$

donde $M_{B_2'B_1'}$ y $M_{B_2B_1}$ son las matrices respectivas de cambio de base. De esta forma obtenemos

$$(\mathbf{x}')_{B_2'} = M_{B_2'B_1'}(T)_{B_1'B_1}(\mathbf{x})_{B_1} = M_{B_2'B_1'}(T)_{B_1'B_1}M^{-1}_{B_2B_1}(\mathbf{x})_{B_2}.$$

Lo que quiere decir que la fórmula

$$\boxed{(T)_{B_2'B_2} = M_{B_2'B_1'}(T)_{B_1'B_1}M^{-1}_{B_2B_1},}$$

nos dá la expresión de la matriz de la aplicación lineal T en las nuevas bases B_2' y B_2.

TEMA 6: DETERMINANTES

1. DEFINICIÓN DE DETERMINANTE

Permutaciones.

Definición 1. *Sea* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *el conjunto de los* n *primeros números naturales. Llamaremos* **permutación de** n **objetos** *a toda aplicación*

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\} \quad \textit{que sea biyectiva.}$$

Denotaremos

$$S_n = \{\textit{conjunto de todas las permutaciones de } n \textit{ objetos}\},$$

que tiene $n!$ *elementos distintos.*

Comentarios

1. Escribiremos las permutaciones de S_n en forma de matrices de dos filas y n columnas

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

   La primera fila está formada por los números $1, 2, \ldots, n$ y la segunda fila por sus imágenes mediante la permutación.

2. El conjunto S_n con la operación de composición de aplicaciones es un **grupo**. Es decir

   - La composición de permutaciones $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$ es de nuevo otra permutación (una aplicación biyectiva de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en $\{1, 2, \ldots, n\}$).
   - La composición de permutaciones es asociativa $(\sigma\tau)\lambda = \sigma(\tau\lambda)$.
   - Exista una permutación identidad e que es el elemento neutro de operación de composición $\sigma e = e\sigma = \sigma$, $\forall\sigma$. Es dada por $e(i) = i$, $\forall 1 \leq i \leq n$.
   - Toda permutación σ posee una permutación inversa σ^{-1} tal que $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$. Si $j = \sigma(i)$ entonces $i = \sigma^{-1}(j)$.

Ejemplo 1. *La permutación de* S_5

$$\sigma \,:\, \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

significa

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 2, \quad \sigma(3) = 5, \quad \sigma(4) = 1, \quad \sigma(5) = 4.$$

Si tomamos otra permutación

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

La composición de ambas es la permutación

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2. *La permutación de* S_5

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

tiene por inversa

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3. *Para* $n = 2$ *y* $n = 3$ *los correspondientes grupos de permutaciones son*

$$S_2 \,:\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$S_3 \,:\, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 2. *Dada una permutación* $\sigma \in S_n$ *se define su* **paridad** $p(\sigma)$ *como*

$$p(\sigma) = (-1)^{n(\sigma)},$$

donde $n(\sigma)$ *es el* **nḿuero de inversiones de la permutación** σ

$$n(\sigma) = \textit{número de pares } (i, j) \textit{ con } i < j \textit{ y } \sigma(i) > \sigma(j)\ .$$

Para calcular $n(\sigma)$ miramos para cada $\sigma(i)$ en

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

cuantos $\sigma(j)$ con $j > i$ están a su izquierda. La suma de todos estos números es $n(\sigma)$. Si $n(\sigma)$ es par (impar) entonces la paridad $p(\sigma)$ es igual a 1 (a 1).

Ejemplo 4. *Las paridades de las permutaciones en* S_2 *son*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ p(\sigma_1) = 1; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ p(\sigma_2) = -1. \tag{1}$$

Ejemplo 5. *Las paridades de las permutaciones en* S_3 *son*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ p(\sigma_1) = 1;\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ p(\sigma_2) = -1;\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ p(\sigma_3) = 1. \tag{2}$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ p(\sigma_4) = -1;\ \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ p(\sigma_5) = 1;\ \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ p(\sigma_6) = -1. \tag{3}$$

Propiedades

1. La paridad de un producto de permutaciones es el producto de las paridades
$$p(\sigma\sigma') = p(\sigma)p(\sigma'). \tag{4}$$

2. Las paridades de una permutación y de su inversa son iguales
$$p(\sigma^{-1}) = p(\sigma). \tag{5}$$

Demostración:

Para probar la propiedad 1 introducimos la noción de **transposición**: permutación τ en que solo se intercambian dos elementos $i < j$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ quedando todos los dems fijos. Es decir:

$$\tau(i) = j, \quad \tau(j) = i, \quad \tau(k) = k,\ \forall k \neq i, j.$$

Toda permutación se puede descomponer (aunque no de manera única) como un producto de transposiciones

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m,$$

donde el número m de transposiciones en dos descomposiciones de σ solo puede variar en un nḿero par. Por tanto la paridad satisface $p(\sigma) = (-1)^m$ independientemente del producto de transposiciones que usemos. Por tanto si

$$\sigma' = \tau_1' \tau_2' \cdots \tau_{m'}',$$

$$\sigma\sigma' = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m \tau_1' \tau_2' \cdots \tau_{m'}' \Longrightarrow p(\sigma\sigma') = (-1)^{m+m'} = p(\sigma)p(\sigma').$$

La propiedad 2 se deduce inmediatamente de la propiedad 1 ya que

$$p(\sigma\sigma^{-1}) = p(e) = 1, \quad p(\sigma\sigma^{-1}) = p(\sigma)p(\sigma^{-1}).$$

□

Determinante de una matriz cuadrada

Definición 3. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada en $\mathbb{K}^{n\times n}$. Se define su* **determinante** *como el número de $\mathbb{K}$ dado por*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} p(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \tag{6}$$

También lo denotaremos como

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 6. *Para matrices 2×2*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Del ejemplo 4 se obtiene inmediatamente

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

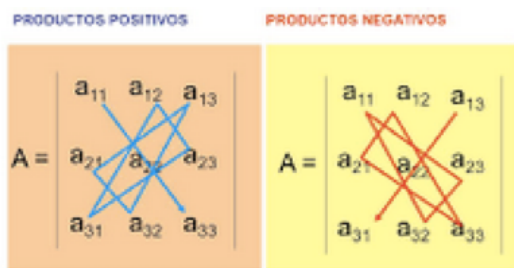

Figura 1: La regla de Sarrus.

Ejemplo 7. *Para matrices* 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Del ejemplo 5 se obtiene inmediatamente

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Que puede interpretarse mediante la regla de Sarrus de la figura.

De acuerdo con la anterior definición, para formar los términos del determinante tomamos un elemento de cada fila, de columnas diferentes, los multiplicamos y aadimos el factor de paridad. Veamos que puede emplearse también una regla de formación análoga con columnas.

Teorema 1. *Para toda matriz cuadrada* A

$$|A| = |A^t|.$$

Demostración:

Usando la definición anterior de determinante

$$|A^t| = \sum_{\sigma \in S_n} p(\sigma) a^t_{1\sigma(1)} a^t_{2\sigma(2)} \cdots a^t_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} p(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Ahora bién el conjunto S_n de todas las permutaciones σ de n objetos es el mismo conjunto que el conjunto de las permutaciones inversas σ^{-1}. Por tanto

$$|A^t| = \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} p(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}.$$

Pero $p(\sigma^{-1}) = p(\sigma)$ y es facil ver que

$$a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} = a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

luego

$$|A^t| = \sum_{\sigma\in S_n} p(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = |A|.$$

□

Consecuencia:

Del teorema anterior se desprende que podemos también calcular determinantes con la fórmula

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} p(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Es decir para formar los términos tomamos un elemento de cada columna, de filas diferentes, los multiplicamos y aadimos el factor de paridad.

2. EL DETERMINANTE COMO APLICACIÓN MULTILINEAL

El determinante como función de las filas (o de las columnas).

Podemos escribir la matriz A en la forma

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ -- \\ \mathbf{f}_2 \\ -- \\ \vdots \\ -- \\ \mathbf{f}_n \end{pmatrix}$$

en términos de los vectores fila de $\mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}, \\
\mathbf{f}_2 &= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}, \\
&\cdots\cdots\cdots, \\
\mathbf{f}_n &= \begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Si nos olvidamos por el momento del caracter de vectores fila de $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$, podemos considerar el determinante de A como una aplicación que depende de n vectores $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ de $\mathbb{K}^n$

$$D \,:\, \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}, \quad D(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n) = |A|.$$

Es decir

$$D(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} p(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} p(\sigma) (\mathbf{f}_1)_{\sigma(1)} (\mathbf{f}_2)_{\sigma(2)} \cdots (\mathbf{f}_n)_{\sigma(n)}. \tag{7}$$

Esta aplicación posee dos propiedades fundamentales

Propiedades

1. **Linealidad** respecto de cada vector $\mathbf{f}_i$:

   a) $D(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_i', \ldots, \mathbf{f}_n) = D(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_i, \ldots, \mathbf{f}_n) + D(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_i', \ldots, \mathbf{f}_n)$ para todo par $\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i' \in \mathbb{K}^n$.

   b) $D(\mathbf{f}_1, \ldots, c\,\mathbf{f}_i, \ldots, \mathbf{f}_n) = c\,D(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_i, \ldots, \mathbf{f}_n)$ para todo $c \in \mathbb{K}$.

2. **Antisimetría**. Si intercambiamos dos vectores $\mathbf{f}_i$ y $\mathbf{f}_j$ con $i \neq j$ en la función D, esta queda multiplicada por -1

$$D(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_j, \ldots, \mathbf{f}_i, \ldots, \mathbf{f}_n) = -D(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_i, \ldots, \mathbf{f}_j, \ldots, \mathbf{f}_n).$$

Demostración: La linealidad es consecuencia inmediata de que cada término en (**??**) depende linealmente de las coordenadas de cada vector $\mathbf{f}_i$. En cuanto a la antisimetría, venos que

$$D(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_j, \ldots, \mathbf{f}_i, \ldots, \mathbf{f}_n) = D(\mathbf{f}_{\tau(1)}, \ldots, \mathbf{f}_{\tau(i)}, \ldots, \mathbf{f}_{\tau(n)}),$$

donde τ es la permutación (transposición) que intercambia I con j:

$$\tau(i) = j, \quad \tau(j) = i, \quad \tau(k) = k, \, \forall k \neq i, j.$$

Pero

$$
\begin{aligned}
D(\mathbf{f}_{\tau(1)}, \ldots, \mathbf{f}_{\tau(i)}, \ldots, \mathbf{f}_{\tau(n)}) &= \sum_{\sigma \in S_n} p(\sigma) a_{1(\sigma\tau)(1)} a_{2(\sigma\tau)(2)} \cdots a_{n(\sigma\tau)(n)} \\
&= -\sum_{\sigma \in S_n} p(\sigma\tau) a_{1(\sigma\tau)(1)} a_{2(\sigma\tau)(2)} \cdots a_{n(\sigma\tau)(n)} \\
&= -\sum_{\sigma \in S_n} p(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= -\sum_{\sigma \in S_n} p(\sigma) (\mathbf{f}_1)_{\sigma(1)} (\mathbf{f}_2)_{\sigma(2)} \cdots (\mathbf{f}_n)_{\sigma(n)} = -D(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n).
\end{aligned}
$$

□

De igual manera si introducimos los vectores columna de $\mathbb{K}^m$

$$
\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix},
$$

podemos indicar la matriz en la forma

$$
A = \Big(\mathbf{c}_1 \Big| \mathbf{c}_2 \Big| \cdots \Big| \mathbf{c}_n \Big).
$$

y considerar el determinante de A como una aplicación que depende de n vectores $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ de $\mathbb{K}^n$

$$
D' : \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}, \quad D'(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n) = |A|.
$$

Es decir

$$
D'(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} p(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} p(\sigma) (\mathbf{c}_1)_{\sigma(1)} (\mathbf{c}_2)_{\sigma(2)} \cdots (\mathbf{c}_n)_{\sigma(n)}. \tag{8}
$$

Al igual que la aplicación D la aplicación D' posee dos propiedades fundamentales

Propiedades

1. **Linealidad** respecto de cada vector $\mathbf{c}_i$:

   a) $D'(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_i + \mathbf{c}'_i, \ldots, \mathbf{c}_n) = D'(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_i, \ldots, \mathbf{c}_n) + D'(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}'_i, \ldots, \mathbf{c}_n)$ para todo par $\mathbf{c}_i$, $\mathbf{c}'_i$ en $\mathbb{K}^n$.

   b) $D'(\mathbf{c}_1, \ldots, c\,\mathbf{c}_i, \ldots, \mathbf{c}_n) = c\, D'(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_i, \ldots, \mathbf{c}_n)$ para todo $c \in \mathbb{K}$.

2. **Antisimetría**. Si intercambiamos dos vectores $\mathbf{c}_i$ y $\mathbf{c}_j$ con $i \neq j$ en la función D', esta queda multiplicada por -1

$$
D'(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_j, \ldots, \mathbf{c}_i, \ldots, \mathbf{c}_n) = -D'(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_i, \ldots, \mathbf{c}_j, \ldots, \mathbf{c}_n).
$$

Consecuencias

Es inmediato deducir como consecuencia de las propiedades anteriores que:

1. Si en un determinante una fila (o una columna) es una suma de dos vectores fila (o vectores columna), el determinante es igual a la suma de los determinantes.
2. Si en un determinante una fila (o una columna) es el producto de un número por un vector fila (o vectores columna), el determinante es igual al producto del número por el determinante.
3. Si en un determinante dos filas (o dos columnas) son iguales el determinante vale cero.

Es también inmediato probar las siguientes propiedades del determinante cuando en la matriz A se efectúan las de **operaciones básicas de la reducción Gaussiana**

1. Intercambiar dos filas distintas:
$$\mathbf{f}_i \leftrightarrow \mathbf{f}_j, (i \neq j) \Longrightarrow |A| \to -|A|.$$
2. Multiplicar una fila por un número distinto de cero:
$$\mathbf{f}_i \to c\mathbf{f}_i, \ (c \neq 0) \Longrightarrow |A| \to c|A|..$$
3. Sumar a una fila un múltiplo de otra fila:
$$\mathbf{f}_i \to \mathbf{f}_i + c\mathbf{f}_j, \ (i \neq j, c \neq 0) \Longrightarrow |A| \to |A|..$$

Una propiedad muy importante es el siguiente teorema

Teorema 2. *El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes*
$$\boxed{|AB| = |A||B|}$$

Demostración: Escribiendo la matriz B en términos de sus columnas
$$B = \left(\mathbf{b}_1 \middle| \mathbf{b}_2 \middle| \cdots \middle| \mathbf{b}_n\right),$$
podemos determinar el producto como una matriz con columnas dadas por
$$AB = \left(A\mathbf{b}_1 \middle| A\mathbf{b}_2 \middle| \cdots \middle| A\mathbf{b}_n\right).$$
Por tanto
$$|AB| = D'(A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \cdots, A\mathbf{b}_n).$$

Si consideramos ahora la aplicación D'' dependiente de los n vectores $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n)$ definida por

$$D''(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n) = |AB| = D'(A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \cdots, A\mathbf{b}_n), \tag{9}$$

es fcil ver que satisface las propiedades de linealidad, respecto de los n vectores $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n)$ de $\mathbb{K}^n$ y antisimetría. Debido a estas propiedades, si desarrollamos los vectores $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n)$ en la base canónica $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n)$

$$\mathbf{b}_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\mathbf{e}_j$$

se verifica que

$$D''(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n) = D''(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n) \sum_{\sigma \in S_n} p(\sigma) b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n} = c\,|B|,$$

donde

$$c = D''(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n).$$

En particular, tomando $B = I$ y teniendo en cuenta (9) se obtiene

$$c = |A|, \tag{10}$$

y por lo tanto $|AB| = |A||B|$ $\square$

Grupos especiales de matrices cuadradas.

En el tema 3 vimos varios tipos de grupos importantes de matrices cuadradas :

1. $GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \,:\, \exists A^{-1}\}$ (Grupo general lineal).
2. $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, \exists A^{-1}$ y cumple $A^{-1} = A^t\}$ (Grupo ortogonal).
3. $U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \,:\, \exists A^{-1}$ y cumple $A^{-1} = A^\dagger$ (Grupo ortogonal).

Debido al teorema 2 que acabamos de demostrar podemos definir otros grupos importantes de matrices cuadradas

1. $SL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \,:\, |A| = 1\}$ (Grupo especial general lineal).
2. $SO(n) = \{R \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, \exists R^{-1}$ y cumple $R^{-1} = R^t$, $|R| = 1\}$ (Grupo especial ortogonal).
3. $SU(n) = \{U \in \mathbb{C}^{n\times n} \,:\, \exists U^{-1}$ y cumple $U^{-1} = U^\dagger$, $|U| = 1\}$ (Grupo especial unitario).

3. DESARROLLO de un DETERMINANTE en COFACTORES

Sabemos calcular facilmente determinantes de matrices de dimensiones 2 y 3. Para calcular determinantes de matrices con dimensiones superiores es muy útil emplear la noción de cofactor.

Cofactores de un determinante

Definición 4. *Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ ($A \in \mathbb{K}^{n\times n}$) se define el* **cofactor** (i,j) *de A ($i,j = 1,\dots,n$) como*

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det A^{(i,j)}, \quad A^{(i,j)} = \textit{matriz obtenida de } A \textit{ eliminando la fila } i \textit{ y la columna } j.$$

Ejemplo 8. *Sea la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene

$$\Delta_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 14, \quad \Delta_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -6.$$

El teorema siguiente permite reducir la dificultad del cálculo de determinantes.

Teorema 3. *SEa A una matriz en $\mathbb{K}^{n\times n}$. Las siguientes identidades se verifican*

$$|A| = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots a_{in}\Delta_{in} \quad (\textit{desarrollo por la fila } i\textit{-ésima}). \tag{11}$$

$$|A| = a_{1i}\Delta_{1i} + a_{2i}\Delta_{2i} + \cdots a_{ni}\Delta_{ni} \quad (\textit{desarrollo por la columna } i\textit{-ésima}). \tag{12}$$

Demostración: Escribiendo la matriz A en términos de sus columnas

$$A = \left(\mathbf{c}_1 \middle| \mathbf{c}_2 \middle| \cdots \middle| \mathbf{c}_i \middle| \cdots \middle| \mathbf{c}_n\right),$$

y desarrollando la columna $\mathbf{c}_i$ respecto de la base canónica

$$\mathbf{c}_i = a_{1i}\mathbf{e}_1 + a_{2i}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{ni}\mathbf{e}_n,$$

por la linealidad del determinate se encuentra

$$|A| = a_{1i}\Big(\mathbf{c}_1\Big|\mathbf{c}_2\Big|\cdots\Big|\mathbf{e}_1\Big|\cdots\Big|\mathbf{c}_n\Big) + a_{2i}\Big(\mathbf{c}_1\Big|\mathbf{c}_2\Big|\cdots\Big|\mathbf{e}_2\Big|\cdots\Big|\mathbf{c}_n\Big) + \cdots + a_{ni}\Big(\mathbf{c}_1\Big|\mathbf{c}_2\Big|\cdots\Big|\mathbf{e}_n\Big|\cdots\Big|\mathbf{c}_n\Big)$$

$$= a_{1i}\Delta_{1i} + a_{2i}\Delta_{2i} + \cdots a_{ni}\Delta_{ni},$$

donde hemos usado la identidad que se comprueba facilmente

$$\Delta_{ki} = \Big(\mathbf{c}_1\Big|\mathbf{c}_2\Big|\cdots\Big|\mathbf{e}_k\Big|\cdots\Big|\mathbf{c}_n\Big).$$

Esto prueba (12), la demostración de (11) es análoga. □

Determinante y matriz inversa

Teorema 4. *Una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es invertible si y solo si*

$$|A| \neq 0.$$

En ese caso su matriz inversa viene dada en términos de cofactores de A por

$$A^{-1} = (\widetilde{a}_{ij}), \quad \widetilde{a}_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{|A|}. \tag{13}$$

Demostración: En primer lugar veamos que si A es invertible su determinante no se anula.

$$\exists A^{-1} \Longrightarrow AA^{-1} = I \Longrightarrow |AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |I| = 1,$$

luego $|A| \neq 0$ y

$$|A^{-1}| = 1/|A|.$$

Veamos ahora la forma (13) de los elementos de matriz de $A^{-1} = (\widetilde{a}_{ij})$ es correcta

$$(AA^{-1})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\widetilde{a}_{kj} = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{jk}.$$

Entonces para $i = j$, usando la fórmula de desarrollo en cofactores (11) del determinante

$$(AA^{-1})_{ii} = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{ik} = \frac{|A|}{|A|} = 1.$$

Mientras que para $i \neq j$

$$(AA^{-1})_{ij} = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{jk} = 0,$$

ya que el sumatorio es el desarrollo en cofactores (11) del determinante de la matriz obtenida poniendo en lugar de la fila j la fila i (por tanto con dos filas iguales)

Obsérvese que en esta demostración se prueba también que si $|A| \neq 0$ entonces existe A^{-1} □

4. REGLA de CRAMER

Sea un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas en $\mathbb{K}$.:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_{2n} = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nn}\,x_n = b_n. \end{array} \right. \tag{14}$$

que en forma matricial se escribe como

$$\boxed{A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix},$$

Teorema 5. *El sistema* (14) *tiene solución única si y solo si* $|A| \neq 0$. *En ese caso viene dada por*

$$x_i = \frac{|B_i|}{|A|}, \quad B_i = \textit{matriz obtenida sustituyendo la columna i-ésima de } A \textit{ por } \mathbf{b}.$$

Demostración: Si $|A| \neq 0$ entonces existe A^{-1} y despejando $\mathbf{x}$ en $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vemos que (14) tiene la solución única

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Si (14) tiene solución única entonces $\mathrm{Ker}A = \{\mathbf{0}\}$ (luego A es una aplicación inyectiva de K^n en $\mathbb{K}^N$)y como $\dim\mathbb{K}^n = \dim(\mathrm{Ker}A) + \dim(\mathrm{Im}A)$ se deduce que

$$\dim(\mathrm{Im}A) = \dim\mathbb{K}^n = n \Longrightarrow \mathrm{Im}A = \mathbb{K}^n.$$

Es decir A es no solo inyectiva sino también sobreyectiva. Por tanto A es biyectiva y existe A^{-1} y sabemos que esto último solo ocurre cuando $|A| \neq 0$.

Supongamos ahora que la solución única es $(x_1, \ldots, x_n)$, en ese caso

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{c}_1 + \cdots + x_i\mathbf{c}_i + \cdots + x_n\mathbf{c}_n.$$

Es claro entonces que sustituyendo este desarrollo en la i-esima columna de la matriz B_i

$$|B_i| = x_i \det(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c_i}, \cdots, \mathbf{c}_n) = x_i|A|.$$

□

Consecuencia importante: Un conjunto de n vectores $\{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ en $\mathbb{K}^n$ es linealmente independiente si y solo si

$$|A| \neq 0, \quad \text{siendo } A = \Big(\mathbf{c}_1\Big|\mathbf{c}_2\Big|\cdots\Big|\mathbf{c}_i\Big|\cdots\Big|\mathbf{c}_n\Big).$$

Demostración: Un conjunto de n vectores $\{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{K}^n$ si y solo si todo vector $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$ admite una descomposición única

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{c}_1 + \cdots + x_i\mathbf{c}_i + \cdots + x_n\mathbf{c}_n.$$

Lo cual equivale a decir que el SEL asociado (14) tiene solución única, ello ocurre si y solo si $|A| \neq 0$ □

TEMA 7

VALORES y VECTORES PROPIOS

Figura 1: Hay mucha álgebra lineal detrás de Google. Concretamente, teoría de valores y vectores propios. La compañía salió a bolsa en 2004 con un valor de 25.000 millones de dolares .

1. PROBLEMAS de VALORES y VECTORES PROPIOS

Valores y vectores propios de una aplicación lineal

Definición 1. *Dada una aplicación lineal*

$$T : V \to V,$$

donde V es un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, un número $\lambda \in \mathbb{K}$ se denomina **valor propio** *de T si existe algún $\boldsymbol{v} \in V$ distinto del vector cero ($\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$) tal que*

$$T\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}. \tag{1}$$

En ese caso se dice que $\boldsymbol{v}$ es un **vector propio** *de T correspondiente al valor propio λ.*

Es también habitual denominar autovalores y autovectores a los valores y vectores propios, respectivamente.

El conjunto de valores propios de una aplicación lineal T se denomina **espectro** *de T y se denota*

$$\sigma(T).$$

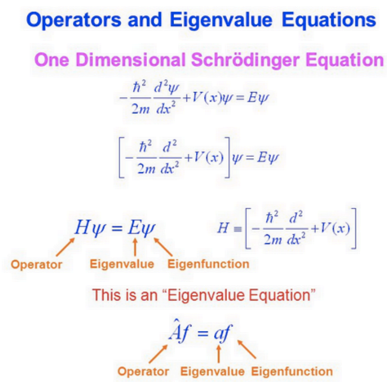

Figura 2: La Mecánica Cuántica se formula en términos de valores propios (eigenvalues) y vectores propios (eigenfunctions) de operadores diferenciales.

Propiedades

1. Un número $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de T si y solo si la aplicación lineal
$$T - \lambda I : V \to V,$$
no es inyectiva.

2. Si $\boldsymbol{v}_i \, (i = 1, \ldots, r)$ son vectores propios
$$T\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \quad i = 1, \ldots, r,$$
correspondientes a valores propios $\lambda_i \, (i = 1, \ldots, r)$ distintos, entonces son linealmente independientes.

3. Dado un valor propio λ de T entonces el conjunto
$$V_\lambda = \{\boldsymbol{v} \in V \,|\, T\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}\},$$
es un subespacio vectorial de V. Este conjunto recibe el nombre de **subespacio propio** asociado a λ.

4. El vector cero siempre pertenece a V_λ (aunque no es un vector propio).

5. Si $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_r$ son valores propios distintos, entonces la suma de los correspondientes subespacios vectoriales de vectores propios es una suma directa
$$V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_r} = V_{\lambda_1} \bigoplus V_{\lambda_2} \bigoplus \cdots \bigoplus V_{\lambda_r}.$$

Demostración:

1. Como ocurre con toda aplicación lineal, la aplicación $T' = T - \lambda I$ es inyectiva si y solo si el único vector $\boldsymbol{v}$ tal que $T'\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ es $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$. Luego T' es no inyectiva si y solo si existe $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ tal que

$$T'\boldsymbol{v} = T\boldsymbol{v} - \lambda\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \Longleftrightarrow T\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

   Es decir, si y solo si λ es un valor propio de T.

2. Sea k el mayor de los números entre 1 y r tal que $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ son linealmente independientes. Si k es menor que r entonces $\boldsymbol{v}_{k+1}$ sera combinación lineal de los anteriores

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k,$$

   y alguno de los c_i no es cero pues $\boldsymbol{v}_{k+1} \neq \boldsymbol{o}$. Pero entonces

$$Tv_{k+1} = \lambda_{k+1}\boldsymbol{v}_{k+1} = \lambda_{k+1}(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k),$$

   y

$$Tv_{k+1} = T(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k) = c_1T\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_kT\boldsymbol{v}_k = c_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\lambda_k\boldsymbol{v}_k.$$

   Luego

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1})c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (\lambda_k - \lambda_{k+1})c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o},$$

   y algún coeficiente $(\lambda_i - \lambda_{k+1})c_i$ no es cero al ser todos los valores propios $\lambda_i\,(i = 1, \ldots, r)$ distintos. Es decir los vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ son linealmente dependientes en contradicción con la hipótesis de partida. Por tanto $k = r$.

3. Dados dos vectores $\boldsymbol{v}_i \in V_\lambda\,(i = 1, 2)$ entonces para cualesquiera $c_i \in \mathbb{K}\,(i = 1, 2)$ se cumple

$$T\boldsymbol{v}_i = \lambda\boldsymbol{v}_i,\ i = 1, 2 \Longrightarrow T(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) = c_1T\boldsymbol{v}_1 + c_2T\boldsymbol{v}_2 = c_1\lambda\boldsymbol{v}_1 + c_2\lambda\boldsymbol{v}_2 = \lambda(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2).$$

   Luego $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 \in V_\lambda$.

4. Evidente ya que $T\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} = \lambda\boldsymbol{o}$.

5. Supongamos vectores $\boldsymbol{v}_i \in V_{\lambda_i}$, $(i = 1, \ldots, r)$ tales que

$$\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{o}.$$

   Entonces debido a la propiedad 2 han de ser todos cero, lo cual significa que la suma de los subespacios V_{λ_i} es directa $\square$

Definición 2. *La dimensión* $\dim V_\lambda$ *de* V_λ *se denomina* **multiplicidad geométrica** *del valor propio* λ*. Si* $\dim V_\lambda = 1$ *se dice que* λ *es un* **valor propio simple** *y si* $\dim V_\lambda \geq 2$ *se dice que* λ *es un* **valor propio degenerado**.

Problemas de valores y vectores propios

Dada una aplicación lineal $T : V \to V$, su problema asociado de valores y vectores propios consiste en

- Determinar los valores propios de T. Es decir, hallar el espectro $\sigma(T)$ de T.
- Determinar los vectores propios de T. Es decir, caracterizar todos los subespacios propios V_λ para todo $\lambda \in \sigma(T)$.

Ejemplo 1. *Sea el operador diferencial*

$$Tv = xDv(x).$$

actuando sobre el espacio vectorial V (sobre $\mathbb{C}$) de polinomios de grado menor o igual que uno

$$V = \{v(x) = a_0 + a_1x \,|\, a_0, a_1 \in \mathbb{C}\}, \quad T(a_0 + a_1x) = xD(a_0 + a_1x) = xa_1 = a_1x.$$

Un número $\lambda \in \mathbb{C}$ es valor propio de T si y solo si existe $v(x) = a_0 + a_1x \neq 0$ tal que $xDv(x) = \lambda v(x)$. Es decir

$$a_1x = \lambda(a_0 + a_1x) = \lambda a_0 + \lambda a_1x \Longleftrightarrow \lambda a_0 = 0,\ \lambda a_1 = a_1.$$

Hay entonces dos posibilidades

1. $\lambda = 0$ *y* $v(x) = a_0 \neq 0$.
2. $\lambda = 1$ *y* $v(x) = a_1x$ *con* $a_1 \neq 0$.

Por tanto $\sigma(T) = \{0, 1\}$ con

$$V_0 = \mathrm{Lin}\{1\}, \quad V_1 = \mathrm{Lin}\{x\}.$$

2. VALORES y VECTORES PROPIOS de MATRICES $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Como hemos visto en el tema 6, toda aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita se reduce a una matriz tomando bases en los espacios. Por tanto, dada una aplicación lineal $T : V \to V$, usando una base vectorial cualquiera B de V el estudio de problemas de valores y vectores propios

$$T\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} \in V.$$

se reduce a un problemas con matrices

$$(T)_B(\boldsymbol{v})_B = \lambda(\boldsymbol{v})_B, \quad (\boldsymbol{v})_B \in \mathbb{K}^n.$$

Valores propios y polinomio característico

Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{K},$$

define una aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^n$

$$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad \boldsymbol{w} = A\boldsymbol{v},$$

donde suponemos los vectores de $\mathbb{K}^n$ en forma de vectores columna de n componentes y $A\boldsymbol{v}$ denota el producto de la matriz A por el vector columna $\boldsymbol{v}$. Un número $\lambda \in \mathbb{K}$ es valor propio de A si existe algún $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ distinto del vector cero ($\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$) tal que

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

En cuyo caso $\boldsymbol{v}$ es un vector propio de A correspondiente al valor propio λ.

Por la propiedad 1 de la sección anterior, $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de A si y solo si la matriz

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix},$$

no es inyectiva. Es decir si y solo si su determinante se anula. De esta forma si introducimos la función de la variable λ

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix},$$

que es un polinomio de grado n denominado **polinomio característico** de A,

$$\boxed{\text{Los valores propios de } A \text{ son las soluciones } \lambda_i \in \mathbb{K} \text{ de } P(\lambda_i) = 0.}$$

La multiplicidad n_i de una raiz λ_i recibe el nombre de **multiplicidad algebraica** de λ.

Debe tenerse cuidado en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pues

$$\boxed{\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ las soluciones } \lambda_i \text{ de } P(\lambda_i) = 0 \text{ con } \mathrm{Im}\lambda_i \neq 0 \text{ no son valores propios de } A}$$

Ejemplo 2. *La matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

tiene como polinomio característico a

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

cuyas raices son $\lambda = \pm i$ (con multiplicidad unidad). Hay dos posibles elecciones para el cuerpo $\mathbb{K}$ que podemos usar:

1. *Si consideramos A como una aplicación lineal de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^2$ (caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) entonces las raices $\lambda = \pm i$ de $P(\lambda)$ están en $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y por tanto son los valores propios de A*

$$\sigma(A) = \{-i, i\}.$$

2. *Si consideramos A como una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ (caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) entonces las raices $\lambda = \pm i$ de $P(\lambda)$ no están en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y por tanto A no tiene valores propios*

$$\sigma(A) = \emptyset.$$

Ejercicio 1. *Dada una matriz diagonal*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Probar que sus valores propios son los elementos de su diagonal principal

$$\lambda_i = a_{ii}, \ (i = 1, \ldots, n).$$

Ejercicio 2. *Dada una matriz triangular*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Probar que sus valores propios son los elementos de su diagonal principal

$$\lambda_i = a_{ii}, \ (i = 1, \ldots, n).$$

Propiedades

1. El número de valores propios de una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ varía entre cero y n.
2. Si $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ son matrices semejantes, entonces tienen los mismos valores propios.
3. La multiplicidad algebraica n_i de un valor propio λ_i es siempre mayor o igual que su multiplicidad geométrica $d_i = \mathrm{dim} V_{\lambda_i}$.

Demostración:

1. Es consecuencia inmediata de la Propiedad 4 de la sección 1.
2. Si
$$A = P^{-1}BP,$$
entonces
$$A - \lambda I = P^{-1}(B - \lambda I)P,$$
y
$$\det(A - \lambda I) = \det(P^{-1}(B - \lambda I)P) = \det P^{-1} \det(B - \lambda I) \det P = \det(B - \lambda I).$$
Por tanto los polinomios característicos de A y B coinciden y como consecuencia A y B tienen los mismos valores propios.
3. La demostración no es elemental.

Vectores propios

Una vez determinado el espectro $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ de una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ podemos atacar el problema de determinar los correspondientes subespacios propios

$$V_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{v} \in V \mid A\boldsymbol{v} = \lambda_k \boldsymbol{v}\}, \quad k = 1, \ldots, r.$$

De esta manera, para cada valor propio debemos resolver el SEL homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{c} (a_{11} - \lambda_k)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_k)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda_k)x_n = 0 \end{array} \right.$$

Ejemplo 3. *Hemos visto que los valores propios de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

como aplicación lineal de $\mathbb{C}^2$ *en* $\mathbb{C}^2$ *son* $\lambda = \pm i$. *El cálculo de sus subespacios propios es como sigue*

$$\lambda = -i: \quad \begin{cases} (1+i)x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + (1+i)x_2 = 0. \end{cases}, \quad V_{-i} = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}\}.$$

$$\lambda = i: \quad \begin{cases} (1-i)x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + (1-i)x_2 = 0. \end{cases}, \quad V_{i} = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}\}.$$

Matrices diagonalizables

Definición 3. *Una matriz* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *es* **diagonalizable** *si admite* n *vectores propios linealmente independientes. Es decir si existe una base vectorial de* $\mathbb{K}^n$ *formada por vectores propios de* A.

Si $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ *es una base de* $\mathbb{K}^n$ *formada por vectores propios*

$$A\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

donde los números λ_i *se repetirán, para los valores propios degenerados, entonces la matriz* $(A)_{BB}$ *correspondiente a tomar la base* B *como base en ambos lados de la aplicación lineal* $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *es*

$$(A)_{BB} = ((A\boldsymbol{v}_1)_B|(A\boldsymbol{v}_2)_B|\cdots|(A\boldsymbol{v}_n)_B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Es decir $(A)_{BB}$ *es una matriz diagonal que denotaremos* D

$$D = (A)_{BB} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dado que $A = (A)_{B_cB_c}$ y $\boldsymbol{v}_i = (\boldsymbol{v}_i)_{B_c}$ donde B_c denota la base canónica de $\mathbb{K}^n$, se verifica que

$$D = M^{-1}AM, \quad A = MDM^{-1},$$

donde M es la matriz de cambio de base entre la base B y la base canónica B_c de $\mathbb{K}^n$

$$M = M_{B_cB} = \Big((\boldsymbol{v}_1)_{B_c}\Big|(\boldsymbol{v}_2)_{B_c}\Big|\cdots\Big|(\boldsymbol{v}_n)_{B_c}\Big) = \Big(\boldsymbol{v}_1\Big|\boldsymbol{v}_2\Big|\cdots\Big|\boldsymbol{v}_n\Big). \tag{2}$$

Por tanto A y D son matrices semejantes. Es inmediato probar que:

Propiedades

1. Si $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ y las multiplicidades geométricas respectivas $d_i = \dim V_{\lambda_i}$ satisfacen

$$d_1 + \cdots + d_r = n,$$

   entonces A es diagonalizable.

2. Si A tiene n valores propios distintos entonces A es diagonalizable.

3. Si A es diagonalizable con

$$A = MDM^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   Entonces

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \quad \mathrm{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n,$$

4. Si $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es una matriz diagonalizable y $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_r$ son sus valores propios distintos, entonces

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r} = \mathbb{K}^n.$$

TEMA 8: PRODUCTO ESCALAR

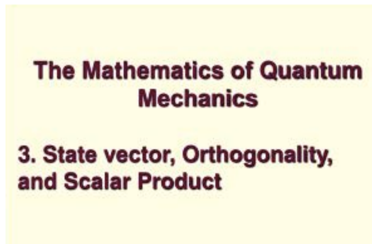

Figura 1: Las Matemáticas de la Mecánica Cuántica.

1. PRODUCTO ESCALAR, NORMA y DISTANCIA

La noción de producto escalar

El producto escalar es una operación fundamental que puede definirse en un espacio vectorial .

Definición 1. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), un* **producto escalar** *en V es una aplicación*

$$\langle \, , \, \rangle : V \times V \to \mathbb{K}, \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \to \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle,$$

que asocia a cada par ordenado $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ de vectores un número $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ en $\mathbb{K}$ que cumple las propiedades siguientes

1. *Linealidad por la derecha:*

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 \rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2 \rangle, \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V,$$
$$\langle \boldsymbol{u}, c\,\boldsymbol{v} \rangle = c\,\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle, \quad \forall c \in \mathbb{K}, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V.$$

2. *Simetría*
$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle}, \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V.$$

   Adviértase que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ los productos escalares son números reales, así que en ese caso la relación de simetría se reduce a

$$\textit{Si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \textit{ entonces } \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle} = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle.$$

3. *Positividad*
$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \geq 0 \;\; \textit{y } \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 0 \textit{ si y solo si } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}.$$

Hay dos ejemplos básicos de producto escalar

Producto escalar (euclidiano) en $\mathbb{R}^n$

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se define el **producto escalar euclidiano** como

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i, \quad \boldsymbol{u} = (x_1, \ldots, x_n), \, \boldsymbol{v} = (y_1, \ldots, y_n).$$

Producto escalar (unitario) en $\mathbb{C}^n$

En el espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ se define el **producto escalar unitario** como

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i \, y_i, \quad \boldsymbol{u} = (x_1, \ldots, x_n), \, \boldsymbol{v} = (y_1, \ldots, y_n).$$

Ejemplo 1. *Sean los vectores de $\mathbb{C}^2$*

$$\boldsymbol{u} = (1, i), \quad \boldsymbol{v} = (i, 1 + i).$$

Entonces su producto escalar unitario es

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 1 \cdot i + (-i)\,(1 + i) = i - i + 1 = 1.$$

Propiedades

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la linealidad por la derecha y la simetría implican la linealidad por la izquierda

$$\langle \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} \rangle, \quad \forall \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} \in V,$$
$$\langle c\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = c\, \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle, \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V.$$

   Sin embargo, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ la linealidad por la derecha y la simetría implican la **antilinealidad** por la izquierda

$$\langle \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} \rangle, \quad \forall \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} \in V,$$
$$\langle c\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \overline{c}\, \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle, \quad \forall c \in \mathbb{C}, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V.$$

2. Se verifican las identidades

$$\langle \boldsymbol{u}, \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{v}_i \rangle = \sum_{i=1}^{r} c_i \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_i \rangle,$$

y

$$\langle \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{r} \overline{c}_i \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v} \rangle.$$

Demostración: Propiedad 1: Veamos la antilinealidad en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Se tiene que

$$\langle \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \rangle} = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_1 \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_2 \rangle} = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_1 \rangle} + \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_2 \rangle} = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} \rangle.$$

$$\langle c\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{v}, c\, \boldsymbol{u} \rangle} = \overline{c \,\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle} = \overline{c}\, \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle} = \overline{c}\, \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle.$$

Propiedad 2: Aplicar inducción y las propiedades de linealidad y antilinealidad . □

Forma del producto escalar respecto de una base vectorial

La expresión del producto escalar en función de las coordenadas de los vectores depende de la base vectorial usada. Sea $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ una base vectorial de V y sean los desarrollos de los vectores en esa base

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{u}_i.$$

Entonces tenemos que

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i \langle \boldsymbol{u}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{u}_j \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_i y_j \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle.$$

Si introducimos los vectores columna de $\mathbb{K}^n$ dados por las coordenadas de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ en la base B

$$(\boldsymbol{u})_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{v})_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix},$$

y denotamos $(\boldsymbol{u})_B^\dagger$ al vector fila

$$(\boldsymbol{u})_B^\dagger = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 & \overline{x}_2 & \cdots & \overline{x}_n \end{pmatrix},$$

podemos expresar el producto escalar en la forma de un producto matricial

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = (\boldsymbol{u})_B^\dagger \, G \, (\boldsymbol{v})_B, \tag{1}$$

donde G es la matriz simétrica con elementos

$$G = (g_{ij}), \quad g_{ij} = \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle.$$

que caracteriza el producto escalar en la base B. Así podemos escribir

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_i g_{ij} y_j$$

Si efectuamos un cambio de base vectorial

$$(\boldsymbol{u})_{B'} = M_{B'B} (\boldsymbol{u})_B, \tag{2}$$

tenemos que

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = (\boldsymbol{u})_B^\dagger \, G_B \, (\boldsymbol{v})_B = (\boldsymbol{u})_{B'}^\dagger \, G_{B'} \, (\boldsymbol{v})_{B'} = (\boldsymbol{u})_B^\dagger \, M_{B'B}^\dagger \, G_B \, M_{B'B}, (\boldsymbol{v})_B,$$

y por tanto

$$G_{B'} = M_{B'B}^\dagger \, G_B \, M_{B'B}.$$

Norma y distancia asociadas a un producto escalar

Definición 2. *Dado un producto escalar* $\langle \, , \, \rangle$ *en un espacio vectorial* V *se denomina* **norma** *asociada a la aplicación*

$$|| \, || : V \to \mathbb{R}^+, \quad \boldsymbol{u} \to ||\boldsymbol{u}||,$$

que asocia a cada vector $\boldsymbol{u} \in V$ *el número real positivo (consecuencia de la propiedad de positividad del producto escalar)*

$$||\boldsymbol{u}|| = +\sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle}.$$

Teorema 1. Desigualdad de Cauchy-Schwarz*:*

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leq ||\boldsymbol{u}|| \, ||\boldsymbol{v}||, \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V. \tag{3}$$

Demostración: Si $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ entonces $|\langle \boldsymbol{o}, \boldsymbol{v} \rangle| = |0| = 0 =\leq ||\boldsymbol{o}|| \, ||\boldsymbol{v}|| = 0$ (dado que $||\boldsymbol{u}|| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle} = \sqrt{0} = 0$. Si $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ tomamos

$$c = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{||\boldsymbol{u}||^2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}0 &\leq ||\boldsymbol{v}-c\,\boldsymbol{u}||^2 = \langle \boldsymbol{v}-c\,\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-c\,\boldsymbol{u}\rangle = \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle - c\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\rangle - \bar{c}\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle + \bar{c}\,c\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle \\ &= ||\boldsymbol{v}||^2 - c\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\rangle - \bar{c}\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle + |c|^2\,||\boldsymbol{u}||^2.\end{aligned}$$

Ahora bién

$$c\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\rangle + \bar{c}\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = c\overline{\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle} + \bar{c}\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = 2\,\mathrm{Re}(\bar{c}\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle) \leq 2\,|\bar{c}\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle)| = 2\,|c|\,|\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle| = 2\,\frac{|\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle|^2}{||\boldsymbol{u}||^2}.$$

y

$$|c|^2\,||\boldsymbol{u}||^2 = \frac{|\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle|^2}{||\boldsymbol{u}||^2}.$$

Así que la desigualdad anterior queda

$$0 \leq ||\boldsymbol{v}||^2 - \frac{|\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle|^2}{||\boldsymbol{u}||^2}.$$

Es decir

$$|\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle| \leq ||\boldsymbol{u}||\,||\boldsymbol{v}||.$$

□

En el caso de los productos escalares euclidiano y unitario se deduce que las normas asociadas son

$$\text{Producto escalar euclidiano en } \mathbb{R}^n\text{: norma asociada } ||u|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2}$$

$$\text{Producto escalar unitario en } \mathbb{C}^n\text{: norma asociada } ||u|| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots |x_n|^2}$$

Ejemplo 2. *Sea el vector de* $\mathbb{C}^2$

$$\boldsymbol{v} = (i, 1+i).$$

Entonces su norma asociada al producto escalar unitario es

$$||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{|i|^2 + |1+i|^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}.$$

Propiedades de la norma

1. Positividad
$$||\boldsymbol{u}|| \geq 0, \quad \text{y } ||\boldsymbol{u}|| = 0 \text{ si y solo si } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}.$$
2. $||c\,\boldsymbol{u}|| = |c|\,||\boldsymbol{u}||, \quad \forall c \in \mathbb{K}, \forall \boldsymbol{u} \in V.$
3. Desigualdad triangular
$$||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|| \leq ||\boldsymbol{u}|| + ||\boldsymbol{v}||, \quad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V.$$

Demostración: Propiedad 2:

$$||c\,\boldsymbol{u}|| = \sqrt{\langle c\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{u}\rangle} = \sqrt{|c|^2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle} = \sqrt{|c|^2\,||\boldsymbol{u}||^2} = |c|\,||\boldsymbol{u}||.$$

Propiedad 3

$$||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}||^2 = \langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle + 2\mathrm{Re}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle \leq ||\boldsymbol{u}||^2 + ||\boldsymbol{v}||^2 + 2|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle| \leq (||u|| + ||\boldsymbol{v}||)^2.$$

□

Definición 3. *Debido a la desigualdad de Cauchy-Schwarz* (3) *para todo par de vectores no nulos en un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$-1 \leq \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle}{||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}||} \leq 1.$$

Luego existirá un único ángulo θ *tal que*

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle}{||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}||}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Diremos entonces que θ *es el ángulo formado por ambos vectores.*

Ejemplo 3. *Sean los vectores de* $\mathbb{C}^2$

$$\boldsymbol{u} = (1, i), \quad \boldsymbol{v} = (i, 1+i).$$

Entonces el ángulo entre ellos tiene por coseno

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Definición 4. *Dado un producto escalar* $\langle\ ,\ \rangle$ *en un espacio vectorial* V *se denomina* **distancia** *asociada a la aplicación*

$$d(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{R}^+, \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \to d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}||,$$

que asocia a cada par ordenado de vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ *un número real positivo que se denomina* **distancia** *entre* $\boldsymbol{u}$ *y* $\boldsymbol{v}$.

Propiedades de la distancia

1. Positividad
$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V.$$

2. Simetría
$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}), \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V.$$

3. Desigualdad triangular

$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \leq d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + d(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V.$$

Demostración: Veamos la desigualdad triangular

$$d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = ||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|| = ||(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})|| \leq ||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}|| + ||\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|| = d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) + d(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}).$$

□

Distancia asociada al producto escalar euclidiano en $\mathbb{R}^n$

$$d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}, \quad \boldsymbol{u}=(x_1,\ldots,x_n),\ \boldsymbol{v}=(y_1,\ldots,y_n).$$

Distancia asociada al producto escalar unitario en $\mathbb{C}^n$

$$d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2}, \quad \boldsymbol{u}=(x_1,\ldots,x_n),\ \boldsymbol{v}=(y_1,\ldots,y_n).$$

Ejemplo 4. *Sean los vectores de* $\mathbb{C}^2$

$$\boldsymbol{u}=(1,i), \quad \boldsymbol{v}=(i,1+i).$$

Entonces la distancia entre ellos es

$$d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \sqrt{|1-i|^2+1^2} = \sqrt{3}.$$

2. PRODUCTO ESCALAR y ORTOGONALIDAD

Ortogonalidad

Definición 5. *Dos vectores* $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$ *se dice que son* **ortogonales** *entre sí y se indica*

$$\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v},$$

cuando

$$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = 0.$$

Dado un subconjunto $X\subset V$*, un vector* $\boldsymbol{u}\in V$ *se dice que es ortogonal a* X *y se indica*

$$\boldsymbol{u}\perp X,$$

cuando es ortogonal a todos los elementos de X. E decir

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0, \, \forall \boldsymbol{v} \in X.$$

El conjunto de todos los vectores ortogonales a X se denota $X^\perp$

$$X^\perp = \{\boldsymbol{u} \in V \mid \boldsymbol{u} \perp X\}.$$

Propiedades

1. El único vector $\boldsymbol{v}$ ortogonal a todos los vectores de V es el vector cero $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$.

2. Para todo subconjunto $X \subset V$ el conjunto $X^\perp$ es un subespacio vectorial de V.

Demostración: Propiedad 1: Si $\boldsymbol{v}$ es ortogonal a todos los vectores de V, en particular $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{v}$ luego $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$ y por el axioma de positividad del producto escalar $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$. Por otro lado el vector cero es ortogonal a todo V ya que

$$\langle \boldsymbol{o}, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 0, \quad \forall \boldsymbol{u} \in V.$$

Propiedad 2: Si $\boldsymbol{u}_i \in X^\perp (i = 1, 2)$ entonces para todo $\boldsymbol{v} \in X$

$$\langle \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} \rangle = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \in X^\perp.$$

Análogamente se demuestra que si Si $\boldsymbol{u} \in X^\perp$ entonces $c\boldsymbol{u} \in X^\perp$, $\forall c \in \mathbb{K}$ $\square$

Conjuntos ortogonales y ortonormales

Definición 6. *Un subconjunto $\{\boldsymbol{u}_1, \dots \boldsymbol{u}_r\}$ de vectores de V se denomina* **ortogonal** *cuando todos esos vectores son ortogonales entre sí. Es decir*

$$\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle = 0, \quad i \neq j.$$

Hay dos propiedades importantes de los conjuntos ortogonales:

Propiedades

1. Si $\{\boldsymbol{u}_1, \dots \boldsymbol{u}_r\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos ($\boldsymbol{u}_i \neq \boldsymbol{o}$, $i = 1, \dots, r$) entonces $\{\boldsymbol{u}_1, \dots \boldsymbol{u}_r\}$ son linealmente independientes.

2. **Teorema de Pitagoras**: Si $\{\boldsymbol{u}_1, \dots \boldsymbol{u}_r\}$ es un conjunto ortogonal entonces

$$||\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \boldsymbol{u}_r||^2 = ||\boldsymbol{u}_1||^2 + \cdots + ||\boldsymbol{u}_r||^2.$$

Demostración: Propiedad 1: Si

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{o},$$

entonces

$$\langle \boldsymbol{u}_i, c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r\rangle = \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{o} = 0, \quad i = 1, \ldots, r,$$

pero también

$$\langle \boldsymbol{u}_i, c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r\rangle = \sum_{j=1}^{r} c_j\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j\rangle = c_i\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i\rangle = c_i||\boldsymbol{u}_i||^2,$$

y como $||\boldsymbol{u}_i|| \neq 0$

$$c_i = 0, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Propiedad 2: Operando se obtiene

$$||\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \boldsymbol{u}_r||^2 = \langle \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \boldsymbol{u}_r\rangle = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i\rangle = \sum_{i=1}^{r} ||\boldsymbol{u}_i||^2 = ||\boldsymbol{u}_1||^2 + \cdots + ||\boldsymbol{u}_r||^2.$$

□

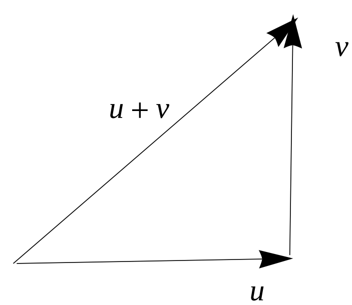

Figura 2: Teorema de Pitagoras para dos vectores ortogonales $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$.

Definición 7. *Un subconjunto* $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots \boldsymbol{u}_r\}$ *se dice* **ortonormal** *cuando es ortogonal y todos los vectores tienen norma unidad* $||u_i|| = 1$, $i = 1, \ldots, r$. *Es decir*

$$\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Por la propiedad 1 anterior todo conjunto ortonormal es linealmente independiente.

Bases ortonormales

Los conjuntos ortonormales $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots \boldsymbol{u}_r\}$ son bases vectoriales de los subespacios $\mathrm{Lin}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots \boldsymbol{u}_r\}$ que generan y los desarrollos a que dán lugar son muy simples

Teorema 2. *Si $\{\boldsymbol{u}_1, \dots \boldsymbol{u}_r\}$ un conjunto ortonormal entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\forall \boldsymbol{u} \in \mathrm{Lin}\{\boldsymbol{u}_1, \dots \boldsymbol{u}_r\}, \quad \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^r x_i \, \boldsymbol{u}_i, \quad x_i = \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u} \rangle.$
2. $\forall \boldsymbol{u} \in \mathrm{Lin}\{\boldsymbol{u}_1, \dots \boldsymbol{u}_r\}, \quad ||\boldsymbol{u}||^2 = \sum_{i=1}^r |x_i|^2, \quad x_i = \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u} \rangle.$
3. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{Lin}\{\boldsymbol{u}_1, \dots \boldsymbol{u}_r\}, \quad \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^r \overline{x}_i x'_i, \quad x_i = \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u} \rangle,\, x'_i = \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v} \rangle.$
4. *Si $B = \{\boldsymbol{u}_1, \dots \boldsymbol{u}_n\}$ es una base ortonormal de V entonces*

$$G = (g_{ij}) = I, \textit{ ya que } g_{ij} = \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Así que el producto escalar se escribe en forma matricial como

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = (\boldsymbol{u})_B^\dagger (\boldsymbol{v})_B.$$

Demostración: Si $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Lin}\{\boldsymbol{u}_1, \dots \boldsymbol{u}_r\}$ entonces admite un desarrollo de la forma

$$\boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^r x_j \, \boldsymbol{u}_j.$$

Por tanto

$$\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{u}_i, \sum_{j=1}^r x_j \, \boldsymbol{u}_j \rangle = \sum_{j=1}^r x_j \, \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle = x_i,$$

que demuestra el apartado 1. Además

$$||\boldsymbol{u}||^2 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \sum_{i=1}^r x_i \, \boldsymbol{u}_i, \sum_{j=1}^r x_j \, \boldsymbol{u}_j \rangle = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \overline{x}_i \, x_j \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle = \sum_{i=1}^r \overline{x}_i \, x_i = \sum_{i=1}^r |x_i I|^2,$$

que demuestra el apartado 2. Finalmente, dados

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^r x_i \, \boldsymbol{u}_i, \; \boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^r x'_j \, \boldsymbol{u}_j \in \mathrm{Lin}\{\boldsymbol{u}_1, \dots \boldsymbol{u}_r\}.$$

Tenemos que

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \sum_{i=1}^r x_i \, \boldsymbol{u}_i, \sum_{j=1}^r x'_j \, \boldsymbol{u}_j \rangle = \sum_{i=1}^r \overline{x}_i \, x'_j,$$

que prueba el apartado 3 $\square$

Ejemplo 5. *Es inmediato ver que la base canónica $B = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ de $\mathbb{K}^n$, con el producto escalar euclideo en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y el producto escalar unitario en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, es una base ortonormal de $\mathbb{K}^n$.*

El método de ortonormalización de Gram-Schmidt

Supongamos que $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_r\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes. Forman entonces una base vectorial del subespacio vectorial $\mathrm{Lin}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_r\}$. El siguiente proceso (método de Gram-Schmidt) genera una base ortonormal $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots \boldsymbol{u}_r\}$ de ese subespacio.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 \to \boldsymbol{u}_1 &= \frac{\boldsymbol{v}_1}{||\boldsymbol{v}_1||}, \\
\boldsymbol{v}_2 \to \boldsymbol{u}_2 &= \frac{\boldsymbol{v}_2 - \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle}{||\boldsymbol{v}_2 - \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle||}, \\
\boldsymbol{v}_3 \to \boldsymbol{u}_3 &= \frac{\boldsymbol{v}_3 - \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle - \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle}{||\boldsymbol{v}_3 - \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle - \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle||}, \\
\vdots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
\boldsymbol{v}_r \to \boldsymbol{u}_r &= \frac{\boldsymbol{v}_r - \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_r \rangle - \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_r \rangle - \cdots - \langle \boldsymbol{u}_{r-1}, \boldsymbol{v}_r \rangle}{||\boldsymbol{v}_r - \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_r \rangle - \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_r \rangle - \cdots - \langle \boldsymbol{u}_{r-1}, \boldsymbol{v}_r \rangle||}.
\end{aligned}$$

Vemos que a cada paso k-ésimo con $1 \leq k \leq r$ la construcción garantiza que

$$\mathrm{Lin}\{\boldsymbol{u}_1, cldots \boldsymbol{u}_k\} = \mathrm{Lin}\{\boldsymbol{v}_1, \cdots \boldsymbol{v}_k\}, \quad \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots k.$$

3. PROYECCIÓN ORTOGONAL

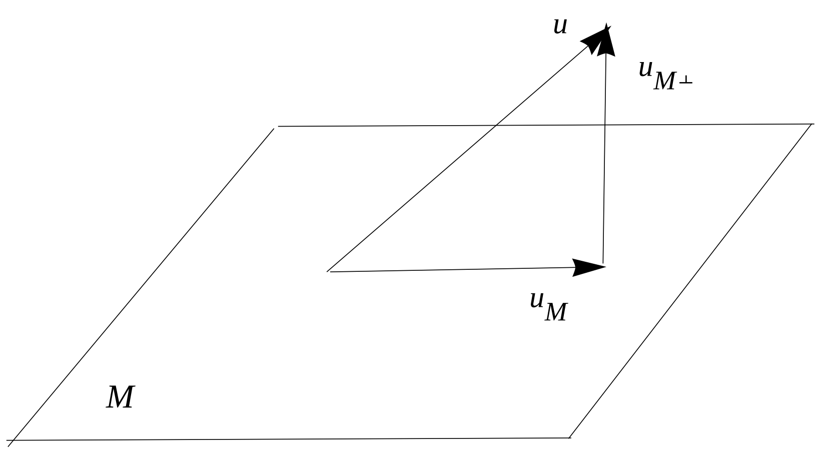

Figura 3: Proyección ortogonal de un vector $\boldsymbol{u}$ de $\mathbb{R}^3$ sobre un plano .

Un resultado fundamental sobre el producto escalar es el siguiente teorema

Teorema 3. Teorema de la proyección ortogonal: *Si M es un subespacio vectorial de V entonces la suma de los subespacios M y $M^\perp$ es directa e igual a todo el espacio V:*

$$V = M \oplus M^\perp.$$

Demostración: Sea $B_M = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ una base de M y $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ una extensión de B_M a una base de V. Aplicando el método de ortonormalización de Gram-Schmidt podemos generar bases ortonormales

$$\tilde{B}_M = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}, \quad \mathrm{Lin}\tilde{B}_M = M,$$

y

$$\tilde{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}, \quad \mathrm{Lin}\tilde{B} = V,$$

de M y V, respectivamente. Además

$$\mathrm{Lin}\{\boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\} = M^\perp.$$

Es por tanto claro que $M + M^\perp = V$. Además la suma es directa pues si $\boldsymbol{v} \in M \cap M^\perp$ entonces $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ lo que implica $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$. De esta forma

Todo $\boldsymbol{v} \in V$ admite una descomposición única $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_M + \boldsymbol{v}_{M^\perp}$ con $\boldsymbol{v}_M \in M$, $\boldsymbol{v}_{M^\perp} \in M^\perp$.

De hecho teniendo en cuenta las bases ortonormales introducidas $\tilde{B}_M$ y $\tilde{B}$, deducimos que

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{v}_M = \sum_{i=1}^{r} \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{v}_{M^\perp} = \sum_{i=r+1}^{n} \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{u}_i. \tag{4}$$

□

Definición 8. *El vector $\boldsymbol{v}_M$ se denomina* **proyección ortogonal** *del vector $\boldsymbol{v}$ sobre el subespacio vectorial M. La aplicación*

$$P : V \to V, \quad P\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_M,$$

se denomina **proyector ortogonal** *sobre M.*

Ejercicio 1. *Probar que*

1. *P es una aplicación lineal.*
2. $\mathrm{Ker}P = M^\perp$ *y* $\mathrm{Im}P = M$.
3. $P^2 = P$.

TEMA 9

APLICACIONES LINEALES en ESPACIOS con PRODUCTO ESCALAR

El producto escalar permite definir varios tipos de aplicaciones lineales muy importantes. En este capítulo usaremos explícitamente espacios vectoriales V sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) de dimensión finita dotados de un producto escalar

$$\langle \, , \, \rangle : V \times V \to \mathbb{K}, \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \to \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle,$$

aunque muchos de los resultados se generalizan a espacios vectoriales de dimensión infinita.

1. APLICACIONES LINEALES y PRODUCTO ESCALAR

Matrices asociadas a aplicaciones lineales en bases ortonormales

Recordemos que dada una aplicación lineal de V en sí mismo

$$T : V \to V, \quad \boldsymbol{w} = T\boldsymbol{v},$$

y una base vectorial $B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ en V, se verifica que

1. La matriz asociada a T en esa base viene dada por

$$(T)_B = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \Big((T\boldsymbol{v}_1)_B \Big| (T\boldsymbol{v}_2)_B \Big| \cdots \Big| (T\boldsymbol{v}_n)_B \Big)$$

donde

$$(T\boldsymbol{v}_1)_B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad (T\boldsymbol{v}_2)_B = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad (T\boldsymbol{v}_n)_B = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

son los vectores columna formados por las componentes en la base B de los vectores

$$T\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\boldsymbol{v}_j. \tag{1}$$

2. Si desarrollamos $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ en la ecuación $\boldsymbol{w} = T\boldsymbol{v}$ respecto de la base B

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{v}_j, \quad \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \boldsymbol{v}_i,$$

tenemos que

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad (\boldsymbol{w})_B = (T)_B \, (\boldsymbol{v})_B,$$

siendo

$$(\boldsymbol{v})_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{w})_B = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_m \end{pmatrix}$$

Supongamos que la base $B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ sea una **base ortonormal**, entonces el desarrollo (1) queda

$$T\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\boldsymbol{v}_j, \quad a_{ji} = \langle \boldsymbol{v}_j, T\boldsymbol{v}_i \rangle$$

Es decir la matriz asociada a T en una **base ortogonal** es dada por

$$(T)_B = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \langle \boldsymbol{v}_i, T\boldsymbol{v}_j \rangle \tag{2}$$

Aplicación lineal adjunta

Definición 1. *Dada una aplicación lineal $T : V \to V$ de V en sí mismo, se define la aplicación adjunta asociada*

$$T^\dagger : V \to V$$

mediante la condición

$$\langle T^\dagger \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, T\boldsymbol{u} \rangle, \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V. \tag{3}$$

Tomando desarrollos respecto de una base ortonormal cualquiera $B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ de V

$$\boldsymbol{v} = \sum_i x'_i \boldsymbol{v}_i, \quad \boldsymbol{u} = \sum_i x_i \boldsymbol{v}_i,$$

podemos escribir en forma de producto de matrices

$$\langle \boldsymbol{v}, T\boldsymbol{u} \rangle = (\boldsymbol{v})_B^\dagger \, (T\boldsymbol{u})_B = (\boldsymbol{v})_B^\dagger \, (T)_B (\boldsymbol{u})_B = \sum_i \overline{x'}_i (\sum_j a_{ij} x_j) = \sum_j \overline{(\sum_i \overline{a_{ij}} x'_i)} \, x_j.$$

Por otro lado

$$\langle T^\dagger \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle = ((T^\dagger \boldsymbol{v})_B)^\dagger (\boldsymbol{u})_B.$$

Es decir la condición (3) significa que $T^\dagger$ es la aplicación lineal cuya matriz asociada en una base ortonormal cualquiera B es la matriz adjunta de T_B

$$(T^\dagger)_B = (a^\dagger_{ij}) = (T)^\dagger_B, \quad a^\dagger_{ij} = \overline{a_{ji}}.$$

$$\boxed{\text{La matriz asociada a } T^\dagger \text{ en una base ortonormal es la matriz adjunta de la matriz asociada a } T}$$

Propiedades

Teniendo en cuenta las propiedades vistas en el tema 3 sobre la matriz adjunta de una matriz, se demuestran las siguientes propiedades de la aplicación adjunta

1. $(T^\dagger)^\dagger = T$.
2. $(T_1 + T_2)^\dagger = T_1^\dagger + T_2^\dagger, \quad (c\,T)^\dagger = \overline{c}\,T^\dagger$.
3. $(T_1 T_2)^\dagger = T_2^\dagger T_1^\dagger$.

Ejemplo 1. *La matriz*

$$A = \begin{pmatrix} i & i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix},$$

determina una aplicación lineal en $\mathbb{C}^2$. Su aplicación adjunta es

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} -i & 1+i \\ -i & 1 \end{pmatrix},$$

Aplicaciónes lineales simétricas

Definición 2. *Una aplicación lineal $T : V \to V$ se dice que es* **simétrica** *si*

$$T^{\dagger} = T.$$

Es decir cuando

$$\langle T\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, T\boldsymbol{u}\rangle, \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V. \tag{4}$$

Propiedad: La condición (4) significa que la matriz asociada a T en una base ortonormal cualquiera B es simétrica

$$(T)_B = (T)_B^{\dagger} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \overline{a_{ji}}.$$

Basta ver que si $B = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ es una base ortonormal

$$a_{ij} = \langle \boldsymbol{u}_i, T\boldsymbol{u}_j\rangle = \langle T\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j\rangle = \overline{\langle \boldsymbol{u}_j, T\boldsymbol{u}_i\rangle} = \overline{a_{ji}}.$$

En el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ entonces T es simétrica si y solo si

$$(T)_B = (T)_B^{t} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Las aplicaciones simétricas también se denominan **aplicaciones autoadjuntas** y si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ **hermíticas**.

Ejemplo 2. *La matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix},$$

determina una aplicación lineal simétrica en $\mathbb{C}^2$.

Ejemplo 3. *Sea P el proyector ortogonal sobre un subespacio lineal M de V*

$$P : V \to V, \quad P\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_M.$$

Veamos que es una aplicación simétrica.

$$\langle P\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle = \langle \boldsymbol{v}_M, \boldsymbol{u}_M + \boldsymbol{u}_{M^{\perp}}\rangle = \langle \boldsymbol{v}_M, \boldsymbol{u}_M\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_M\rangle = \langle \boldsymbol{v}, P\boldsymbol{u}\rangle, \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V.$$

Ejercicio 1. *Probar que para toda aplicación lineal $T : V \to V$, la aplicación*

$$T\,T^{\dagger},$$

es simétrica.

Aplicaciónes lineales unitarias y ortogonales

Definición 3. *Una aplicación lineal $U : V \to V$ se dice que es* **unitaria** *si existe su inversa U^{-1} y coincide con su adjunta*

$$U^{-1} = U^{\dagger}.$$

En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ las aplicaciones unitarias se denominan aplicaciones **ortogonales** *y sus matrices asociadas en bases ortonormales B cumplen:*

$$U \text{ es ortogonal} \Leftrightarrow (U)_B^{-1} = (U)_B^t.$$

Las aplicaciones ortogonales son las aplicaciones unitarias en espacios vectoriales V reales (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Teorema 1. *Una aplicación lineal $U : V \to V$ es unitaria si y solo si*

$$\langle U\boldsymbol{v}, U\boldsymbol{u}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle, \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V. \tag{5}$$

Demostración. Si U es unitario se verifica que

$$\langle U\boldsymbol{v}, U\boldsymbol{u}\rangle = \langle U^{\dagger}U\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle = \langle U^{-1}U\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle, \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V.$$

Por otro lado si se cumple (5) entonces

$$||U\boldsymbol{u}||^2 = \langle U\boldsymbol{u}, U\boldsymbol{u}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = ||\boldsymbol{u}||^2, \quad \forall \boldsymbol{u} \in U.$$

Por tanto si $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ entonces $||U\boldsymbol{u}|| = ||\boldsymbol{u}|| \neq 0$, luego $U\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$. Es decir U es biyectiva. Además (5) implica

$$\langle \boldsymbol{v}, U\boldsymbol{u}\rangle = \langle UU^{-1}\boldsymbol{v}, U\boldsymbol{u}\rangle = \langle U^{-1}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle, \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V.$$

Por lo tanto $U^{\dagger} = U^{-1}$ y U es unitaria. $\square$

Ejemplo 4. *La matriz*

$$U = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

determina una aplicación lineal unitaria en $\mathbb{C}^2$., ya que

$$U^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

satisface $U^{\dagger}U = I$, luego $U^{\dagger} = U^{-1}$.

Ejemplo 5. *Una rotación R en el plano de ángulo θ en el sentido contrario a las agujas del reloj transforma los vectores de la base canónica en la forma*

$$\begin{cases} R\boldsymbol{e}_1 = \cos\theta\,\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{sen}\theta\,\boldsymbol{e}_2, \\ R\boldsymbol{e}_2 = -\mathrm{sen}\theta\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_2 \end{cases}$$

determina una aplicación lineal en $\mathbb{R}^2$ dada por la matriz

$$R = (R\boldsymbol{e}_1|R\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

que satisface $R^tR = I$, luego $R^t = R^{-1}$ y R es una aplicación ortogonal.

Ejercicio 2. *Determinar* $\mathrm{Tr}R$ *y* $\det R$.

Ejercicio 3. *Demostrar que una rotación en $\mathbb{R}^3$ de ángulo θ alrededor del eje determinado por un vector unitario $\vec{n}$ $((||\vec{n}|| = 1)$ en el sentido contrario a las agujas del reloj viene dada por*

$$R\vec{x} = \cos\theta\,\vec{x} + (1-\cos\theta)(\vec{n}\cdot\vec{x})\vec{n} - \mathrm{sen}\theta\,\vec{n}\times\vec{x}.$$

Probar que es una aplicación ortogonal.

Aplicaciónes lineales normales

Definición 4. *Una aplicación lineal $T : V \to V$ se dice que es* **normal** *si conmuta con su aplicación adjunta*

$$T\,T^\dagger = T^\dagger\,T.$$

Los dos casos más obvios de aplicaciones normales son:

1. T simétrica ($T^\dagger = T$).
2. U unitaria ($U^\dagger = U^{-1} \Rightarrow UU^\dagger = I = U^\dagger U$.)

Ejercicio 4. *Probar que si T_1 y T_2 son aplicaciones normales de V en V tales que conmutan entre sí*

$$T_1T_2 = T_2T_1,$$

entonces

$$c_1T_1 + c_2T_2, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{K},$$

es también una aplicación normal.

2. VALORES y VECTORES PROPIOS

Aplicaciónes lineales simétricas

Teorema 2. *Si $T : V \to V$ es una aplicación lineal simétrica entonces se verifica*

1. *Los valores propios de T son números reales*

$$\sigma(T) \subset \mathbb{R}.$$

2. *Vectores propios asociados a autovalores distintos son ortogonales.*

$$T\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i,\ (i = 1, 2)\ \textit{con}\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{v}_2.$$

3. *Existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de T.*

Demostración. **Propiedad 1**: Si $\lambda \in \sigma(T)$ existe $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ tal que

$$T\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v},$$

por tanto

$$\langle \boldsymbol{v}, T\boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \lambda \boldsymbol{v} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{v}, bv \rangle = \lambda ||\boldsymbol{v}||^2.$$

Ahora bién al ser T simétrico

$$\langle \boldsymbol{v}, T\boldsymbol{v} \rangle = \langle T\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \lambda \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = \overline{\lambda} \langle \boldsymbol{v}, bv \rangle = \overline{\lambda} ||\boldsymbol{v}||^2.$$

Como consecuencia, teniendo en cuenta que al ser $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ se tiene $||\boldsymbol{v}|| \neq 0$

$$\lambda ||\boldsymbol{v}||^2 = \overline{\lambda} ||\boldsymbol{v}||^2 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}.$$

Propiedad 2: Si

$$T\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \quad i = 1, 2,$$

tenemos que por la Propiedad 1 se verifica que $\lambda_i \in \mathbb{R}\,(i = 1, 2)$. Ahora bién

$$\langle \boldsymbol{v}_1, T\boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \rangle = \lambda_2 \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle.$$

y al ser T simétrico

$$\langle \boldsymbol{v}_1, T\boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle T\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \lambda_1 \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \lambda_1 \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle.$$

Como consecuencia , si $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{v}_2.$$

Propiedad 3: Es la más complicada de demostrar. Supondremos que hemos tomado una base vectorial de V y que A es la correspondiente matriz de T en esa base. Así que A determina una aplicación lineal simétrica $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. Haremos la demostración en varios pasos.

1. Primer paso: Siempre existe algún vector propio de A en $\mathbb{K}^n$

   Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esto es así dado que el polinomio característico de A tiene n raices en $\mathbb{C}$ (contando multipliciades), que serán valores propios de $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. De esta forma existir algún valor propio $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ que tendrá algún vector propio asociado $\boldsymbol{x}_1$ en $\mathbb{C}^n$.

   $$A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1, \quad \boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{C}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}.$$

   Además, al ser A una matriz simétrica, por la Propiedad 1 se tiene que $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

   Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la matriz A es una matriz real y define una aplicación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. También será real la matriz $A - \lambda_1 I$ donde λ_1 es la raiz del polinomio característico de A del parrafo anterior. Al ser $\det(A - \lambda_1 I) = 0$, la aplicación lineal $A - \lambda_1 I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ no es inyectiva luego habrá alguna solución $\boldsymbol{x}_1$ de

   $$A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1, \quad \boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}.$$

2. Segundo paso: Existen n vectores propios de A en $\mathbb{K}^n$ linealmente independientes.

   Si $n = 1$ la afirmación está probada, SI $n > 1$ denotemos $M_1 = \mathrm{Lin}\{\boldsymbol{x}_1\}$, entonces

   $$\mathbb{K}^n = M_1 \oplus M_1^{\perp}$$

   veamos que la restricción A' de A sobre $M_1^{\perp}$

   $$A' : M_1^{\perp} \to M_1^{\perp}, \quad A'\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x},$$

   determina una aplicación lineal de $M_1^{\perp}$ en sí mismo. Sea $\boldsymbol{x} \in M_1^{\perp}$

   $$\forall \boldsymbol{u} \in M_1, \quad \langle \boldsymbol{u}, A\boldsymbol{x} \rangle = \langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle = \lambda_1 \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle = 0,$$

   luego $A\boldsymbol{x} \in M_1^{\perp}$. Pero A' es también una aplicación simétrica en $M_1^{\perp}$ dado que

   $$\langle \boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v} \rangle = \langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \Rightarrow \langle \boldsymbol{u}, A'\boldsymbol{v} \rangle = \langle A'\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in M_1^{\perp}.$$

   Entonces por lo demostrado en el primer paso existirá algún vector propio de A en $M_1^{\perp}$

   $$A\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2, \quad \boldsymbol{x}_2 \in M_1^{\perp} \setminus \{\boldsymbol{o}\}.$$

   Los vectores $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ son linealmente independientes al ser ortogonales entre sí y no nulos. Repitiendo el proceso con pasos intermedios

   $$M_k = \mathrm{Lin}\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}, \quad \mathbb{K}^n = M_k \oplus M_k^{\perp}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

   se completa un conjunto $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ de n vectores propios ortogonales no nulos y por lo tanto linealmente independientes.

$\square$

Aplicaciónes lineales unitarias y ortogonales

Teorema 3. *Si $U : V \to V$ es una aplicación lineal unitaria en un espacio vectorial V sobre los números complejos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entonces se verifica*

1. *Los valores propios de U son números complejos de módulo unidad*
$$|\lambda_i| = 1.$$
2. *Vectores propios asociados a autovalores distintos son ortogonales.*
$$U\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \ (i = 1, 2) \ \textit{con} \ \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{v}_2.$$
3. *Existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de U.*

Demostración. **Propiedad 1**: Si $\lambda \in \sigma(U)$ existe $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ tal que
$$U\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v},$$
por tanto
$$\langle U\boldsymbol{v}, U\boldsymbol{v}\rangle = \langle \lambda\boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{v}\rangle = |\lambda|^2 \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = |\lambda|^2 ||\boldsymbol{v}||^2.$$
Ahora bién al ser U unitario
$$\langle U\boldsymbol{v}, U\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = ||\boldsymbol{v}||^2.$$
Como consecuencia, teniendo en cuenta que al ser $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ se tiene $||\boldsymbol{v}|| \neq 0$
$$|\lambda|^2 ||\boldsymbol{v}||^2 = ||\boldsymbol{v}||^2 \Rightarrow |\lambda| = 1.$$
Propiedad 2: Si
$$U\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \quad i = 1, 2,$$
tenemos que por la Propiedad 1 se verifica que $|\lambda_i|^2 = 1$, $(i = 1, 2)$. Es decir
$$\frac{1}{\lambda_i} = \overline{\lambda_i}.$$
Así que
$$U^{-1}\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{\lambda_i}\boldsymbol{v}_i = \overline{\lambda_i}\boldsymbol{v}_i, \quad i = 1, 2,$$
Ahora bién
$$\langle \boldsymbol{v}_1, U\boldsymbol{v}_2\rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \lambda_2\boldsymbol{v}_2\rangle = \lambda_2 \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle.$$
y al ser U unitario
$$\langle \boldsymbol{v}_1, U\boldsymbol{v}_2\rangle = \langle U^\dagger \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle = \langle U^{-1}\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle = \langle \overline{\lambda_1}\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle = \lambda_1 \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle.$$
Como consecuencia, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$
$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle = 0 \Rightarrow \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{v}_2.$$
Propiedad 2: La demostración es similar a la de la Propiedad 3 de las aplicaciones simétricas. $\square$

Las aplicaciones unitarias en espacios vectoriales sobre los números reales no tienen las mismas propiedades que sus análogas en espacios vectoriales sobre los números complejos.

Ejercicio 5. *Sea $U : V \to V$ una aplicación lineal ortogonal en un espacio vectorial V sobre los números reales $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, probar que entonces se verifica*

1. *U puede carecer de valores propios y en todo caso $\sigma(U) \subset \{1, -1\}$.*

2. *Vectores propios asociados a autovalores distintos son ortogonales.*

$$U\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \ (i = 1, 2) \ \textit{con} \ \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{v}_2.$$

3. *U puede no ser diagonalizable.*

Aplicaciónes lineales normales

Se puede demostrar el siguiente teorema

Teorema 4. *Si $T : V \to V$ es una aplicación lineal normal entonces se verifica*

1. *Vectores propios asociados a autovalores distintos son ortogonales.*

$$T\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \ (i = 1, 2) \ \textit{con} \ \lambda_1 \neq \lambda_2 \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{v}_2.$$

2. *Existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de T.*

3. DIAGONALIZACIÓN de MATRICES SIMÉTRICAS y UNITARIAS (complejas)

Sea $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{K}^n$, si consideramos la matriz formada por las columnas de sus coordenadas

$$M = \Big(\boldsymbol{v}_1 \Big| \boldsymbol{v}_2 \Big| \cdots \Big| \boldsymbol{v}_n\Big), \tag{6}$$

y su matriz adjunta

$$M^\dagger = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1^\dagger \\ -- \\ \boldsymbol{v}_2^\dagger \\ -- \\ \vdots \\ -- \\ \boldsymbol{v}_n^\dagger \end{pmatrix}.$$

Entonces dado que

$$\boldsymbol{v}_i^\dagger \, \boldsymbol{v}_j = \delta_{ij},$$

se verifica que

$$M^\dagger \, M = I.$$

Por tanto

$$M^\dagger = M^{-1}.$$

Es decir M es una matriz unitaria en $\mathbb{K}^n$.

Como consecuencia de este resultado se deduce que:

Teorema 5. 1. *Toda matriz simétrica A en $\mathbb{K}^n$ es diagonalizable*

$$A = MDM^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

donde M es la matriz unitaria

$$M = \Big(\boldsymbol{v}_1 \Big| \boldsymbol{v}_2 \Big| \cdots \Big| \boldsymbol{v}_n \Big),$$

siendo $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base ortonormal de n vectores propios de A

$$A\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

2. *Toda matriz unitaria U en $\mathbb{C}^n$ es diagonalizable*

$$U = MDM^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

donde M es la matriz unitaria

$$M = \Big(\boldsymbol{v}_1 \Big| \boldsymbol{v}_2 \Big| \cdots \Big| \boldsymbol{v}_n \Big),$$

siendo $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base ortonormal de n vectores propios de U

$$U\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$