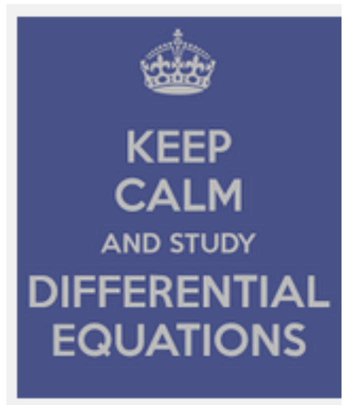
PARTE 1: ECUACIONES DIFERENCIALES



Luis Martínez Alonso
http://jacobi.fis.ucm.es/luism

TEMA 1

1. INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Nociones generales

Definición 1.

$$\left\{ \textit{ Ecuación diferencial } \right\} = \left\{ \textit{ Relación que debe cumplir una función incógnita y sus derivadas } \right\}$$

- Si en la relación solo aparecen derivadas respecto de una sola variable decimos que es una **ecuación diferencial ordinaria** (EDO).
- Si en la relación aparecen derivadas respecto varias variable decimos que es una **ecuación diferencial en derivadas parciales** (EDP).
- El orden de la derivada de orden máximo de la función incǵonita que aparece en la ecuación se denomina **orden** de la ecuación diferencial.

Ejemplo 1. *La ecuación del oscilador armónico en la recta*

$$m\ddot{x} = -kx.$$

La función incógnita es $x = x(t)$. Solo aparece una derivada de orden 2 respecto de la variable t. Es una EDO de orden 2.

Ejemplo 2. *La ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

La función incógnita es $U = U(x, y, z)$. Aparecen derivadas de orden 2 respecto de 3 variables. Es una EDP de orden 2.

Definición 2.

$$\left\{ \textit{ Sistema de ecuaciones diferenciales } \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \textit{Conjunto de dos o más relaciones que deben} \\ \textit{cumplir una o varias funciones y sus derivadas} \end{array} \right\}$$

- Si en las relaciones solo aparecen derivadas respecto de una sola variable decimos que es un **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias** (SEDO's).
- Si en las relaciones aparecen derivadas respecto de varias variables decimos que es un **sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales** (SEDP's).
- El orden de la derivada de orden máximo de las funciones incǵonitas que aparecen en las ecuaciones del sistema se denomina **orden** del sistema de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 3. *La ecuación del movimiento de una partícula bajo la acción de un campo de fuerzas* $\vec{F}(\vec{x}) = (F_1, F_2, F_3)$ *es un sistema de tres ecuaciones ordinarias*

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}),$$

en componentes

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_1(x, y, z) \\ m\ddot{y} = F_2(x, y, z) \\ m\ddot{z} = F_3(x, y, z) \end{cases}$$

Hay tres funciones incógnita, las componentes de $\vec{x} = \vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$*. Es un SEDO's de orden 2.*

Comentarios

- Las variables de las que dependen las función incógnitas se denominan **variables independientes**.
- Las funciones incógnitas se denominan **variables dependientes**.

Ejercicio 1. *Las ecuaciones de Maxwell son el SEDP's:*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

1. *¿Cuantas ecuaciones hay?*
2. *¿Cuales son las variables independientes?*
3. *¿ Cuales son las incógnitas?*
4. *¿Cuál es el orden del sistema?*

Ejercicio 2. *Las ecuación de Schrödinger es:*

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t,\vec{r})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi(t,\vec{r}) + V(\vec{r},t)\Psi(t,\vec{r})$$

1. *¿Cuales son las variables independientes?*
2. *¿ Cuales son las incógnitas?*
3. *¿Cuál es el orden de la ecuación?*

$\boxed{\textbf{EN ESTE CURSO SOLO ESTUDIAREMOS EDO's Y SISTEMAS DE EDO's}}$

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's)

Definición 3. *Nuestra notación general será la siguiente: la variable independiente se denotará x, la función incógnita $y = y(x)$ y sus derivadas sucesivas como $y', y'', \dots y^{(n)}$*

$$\left\{ \text{ EDO de orden } n \ \right\} = \left\{ \ F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \ \right\}.$$

Se supone que la función F depende de la derivada $y^{(n)}$.

Una función $y = y(x)$ es solución en un intervalo abierto I si

1. Existen $y = y(x)$ y sus derivadas $y'(x), y''(x), \dots y^{(n)}(x)$ para todo $x \in I$.
2. Se cumple la ecuación $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ para todo $x \in I$.

Ejemplo 4. *La EDO*

$$y' - xy = 0,$$

es de orden 1. La función $y(x) = e^{x^2/2}$ es solución en cualquier intervalo abierto I de la recta.

Ejemplo 5. *La EDO*

$$xyy'' - y''' - e^x y^2 = 0,$$

es de orden 3. La función $y(x) \equiv 0$ es solución en cualquier intervalo abierto I de la recta.

$$\left\{ \text{ EDO de orden } n \text{ en forma normal } \right\} = \left\{ \ y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \ \right\}$$

Comentarios

- Denominaremos **solución general** de una EDO de orden n a una función $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ solución que dependa de n constantes arbitrarias $C_1, C_2, \dots, C_n$. ¿ Motivo?
- Cuando somos capaces de obtener una solución general $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ escrita usando funciones elementales o integrales indefinidas (o de extremo variable) de funciones elementales decimos que la EDO es **integrable**.
- Toda EDO $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ de orden n arbitrario puede reducirse a un sistema de n EDO's de primer orden usando las derivadas de y como incógnitas. Es decir denotando

$$\begin{aligned} y_1 &= y, \quad y_2 = y', \quad y_n = y^{(n-1)} \Rightarrow \\ y_1' &= y' = y_2, \quad y_2' = y'' = y_3, \quad y_n' = y^{(n)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n \\ F(y_1, y_2, \dots, y_n') = 0 \end{array} \right.$$

Por tanto el estudio de EDO's de orden n se reduce al de sistemas de EDO's de primer orden.

Integración indefinida

$$\boxed{\text{Repasar la operación de integral indefinida}}$$

Integrales indefinidas básicas:

$$
\begin{array}{ll}
\displaystyle\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ x > 0; & \text{for } \alpha \neq -1 \\
\displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C,\ x \neq 0 & \displaystyle\int e^x \, dx = e^x + C \\
\displaystyle\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C & \displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx = \tan(x) + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\
\displaystyle\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C & \displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)} \, dx = -\cot(x) + C,\ x \neq k\pi \\
\displaystyle\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + C & \displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2(x)} \, dx = \tanh(x) + C \\
\displaystyle\int \cosh(x) \, dx = \sinh(x) + C & \displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2(x)} \, dx = -\coth(x) + C,\ x \neq 0 \\
\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x) + C & \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin(x) + C,\ x \in (-1,1)
\end{array}
$$

Ejemplo 6. *Sea la EDO de segundo orden*

$$y'' = 0.$$

Integramos una vez

$$\int y''\mathrm{d}x = \int 0 \,\mathrm{d}x\,,, \quad y' + c_1 = c_2\,,, \quad y' = C_1.$$

Integramos una vez más

$$\int y'\mathrm{d}x = \int C_1\mathrm{d}x\,,, \quad y + c_1 = C_1 x + c_2\,,, \quad y = C_1 x + C_2.$$

Así que la solución general es $y(x, C_1, C_2) = x^2/2 + C_1 x + C_2$.

Ejemplo 7. *La EDO de primer orden*

$$y' = \frac{e^x}{x},$$

tiene por solución general

$$y(x, C) = \int \frac{e^x}{x} + C.$$

El término integral no puede expresarse como una función elemental, pero es una integral de una función elemental.

Problemas de valores iniciales (PVI's)

Definición 4. *Un problema de valores iniciales (PVI) para una EDO de orden n consiste en pedir una solución $y = y(x)$ de la EDO*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

tal que y y sus derivadas $y^{(k)}$ hasta el orden $n-1$ estén fijadas en un punto dado x_0

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Comentarios

- En general, salvo casos de EDO's especiales, solo existe soluciones **locales** alrededor de x_0. Es decir soluciones $y = y(x)$ que no pueden extenderse fuera de un cierto intervalo I alrededor de x_0.
- Dominar los enunciados de los teoremas de existencia y unicidad de EDO's es **imprescindible** para aprovechar la teoría de EDO's. Es una condición indispensable para poder manejar métodos numéricos.
- La forma elemental de tratar problemas de valores iniciales es construir una solución general $y = y(x, C_1, \dots, C_n)$ e intentar determinar los valores de las constantes que permitan satisfacer los valores iniciales mediante el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} y(x_0, C_1, \dots, C_n) = y_0 \\ y'(x_0, C_1, \dots, C_n) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0, C_1, \dots, C_n) = y_{n-1} \end{array} \right.$$

Ejemplo 8. *Resolver el problema de valores iniciales*

$$y'' = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1.$$

Sabemos que la solución general es $y(x, C_1, C_2) = C_1 x + C_2$. Imponemos por tanto

$$(C_1 x + C_2)\Big|_{x=0} = C_2 = y_0, \quad (C_1 x + C_2)'\Big|_{x=0} = C_1 = y_1$$

La solución es

$$y(x) = y_1 x + y_0.$$

2. EL TEOREMA DE PICARD

Consideramos el siguiente problema de valores iniciales (PVI)

$$\boxed{y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0}$$

Comentarios

- El problema requiere una formulación más precisa. Debemos suponer que la función $f(x, y)$ está definida sobre algún **abierto conexo** U del plano XY y que $(x_0, y_0) \in U$. Es decir, buscamos una función $y = y(x)$ que pase sobre el punto (x_0, y_0) y que verifique $y'(x) = f(x, y(x))$ en algún intervalo I alrededor de x_0.

- El teorema siguiente requiere que $f(x, y)$ sea **suficientemente regular** para poder asegurar que hay una solución única que pasa por (x_0, y_0).

Teorema 1. (Picard).
Si se cumple que las funciones

$$f(x, y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ son continuas en } U,$$

entonces para todo punto $(x_0, y_0) \in U$

1. *Existe un intervalo abierto I no vacio de la recta con $x_0 \in I$ y una función $y = y(x)$ tal que $(x, y(x)) \in U$ para todo $x \in I$ y que verifica el PVI*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad \forall x \in I, \quad y(x_0) = y_0.$$

2. *Solo existe una función que satisface esas propiedades sobre el intervalo I*

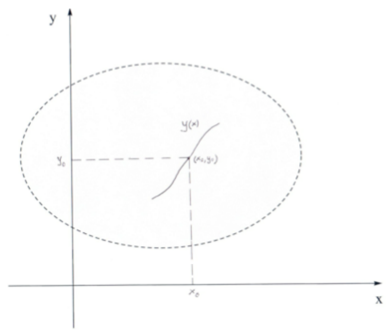
Comentarios

- Para facilitar las cosas llamaremos **dominio de Picard** de la EDO a cualquier abierto conexo en que se cumplan las condiciones del teorema y **punto Picard** a cualquiera de sus puntos.

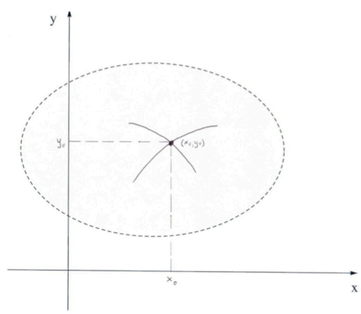
- Decimos que $y = y(x)\,(x \in I)$ es una solución maximal del PVI si no se puede prolongar a una solución del PVI sobre algún intervalo mayor $I' \supset I$. Siempre existe una 'nica solución maximal.

- **¿Qué le puede pasar a una solución maximal al tender a un extremo finito de su intervalo de existencia?** Por ejemplo si $I = (a, b)$ ó $I = (-\infty, b)$ ó $I = (a, +\infty)$ con a y b finitos.

- No puede suceder que $(a, \lim_{x\to a} y(x))$ (ó $(b, \lim_{x\to b} y(x)))$ sean puntos de Picard de U ni de un dominio de Picard U' mayor que U.
- Lo que puede suceder es que esos puntos alcancen la frontera de U ó que no existan los límites $\lim_{x\to a} y(x)$ ($\lim_{x\to b} y(x)$).
- Si U no es un conjunto acotado $\lim_{x\to a} y(x)$ ($\lim_{x\to b} y(x)$) pueden tender a $\pm\infty$. Es decir $(a, \lim_{x\to a} y(x))$ (ó $(b, \lim_{x\to b} y(x))$ pueden tender a un punto en el infinito de la frontera de U.
- Si $(a, \lim_{x\to a} y(x))$ ($(b, \lim_{x\to b} y(x)))$ existen como puntos finitos de la frontera de U, entonces no son puntos Picard y la solución $y(x)$ puede no ser única más allá de ese punto.



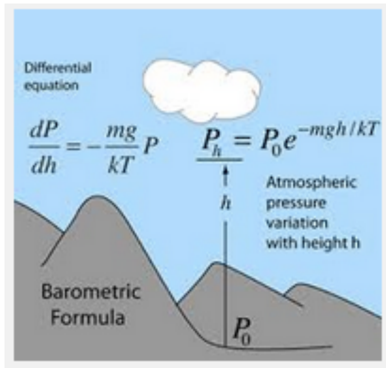
Solución única local que pasa por el punto (x_0, y_0).



Prohibido si se cumplen las condiciones del teorema de Picard .

3. EDO's DE PRIMER ORDEN INTEGRABLES

1. EDO's lineales



Son las de la forma

$$\boxed{y' + a(x)\, y = b(x)}$$

Se denomina EDO lineal homogénea asociada a

$$y' + a(x)\, y = 0.$$

- Adviértase que si $a = a(x)$ y $b = b(x)$ son continuas, podemos tomar como dominio de Picard de la EDO lineal todo el plano $\mathbb{R}^2$.
- Si conocemos una solución particular $y_p = y_p(x)$ entonces cualquier otra solución será de la forma

  $$y = y_h + y_p.$$

  donde y_h es solución de la EDO homogénea asociada. Obvio ya que

  $$y' + a(x)\, y = b(x), \quad y_p' + a(x)\, y_p = b(x) \Rightarrow (y - y_p)' + a\,(y - y_p) = 0.$$

- Para resolver la EDO se construye la solución de la EDO homogénea

  $$y'/y = -a(x) \Rightarrow \int y'/y\, \mathrm{d}x = -\int a(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \log y(x) = -\int a(x)\mathrm{d}x + c.$$

  Es decir la solución general de la homogénea es

  $$y_h(x) = C\, e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}.$$

Para buscar una solución particular aplicamos el **método de variación de constante**. Buscamos una función $C(x)$ tal que $y_p(x) = C(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}$ verifique la EDO

$$C'e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} - a(x)Ce^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + a(x)Ce^{-\int a(x)\mathrm{d}x} = b(x) \Rightarrow C' = b(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}.$$

De esta forma la solución general de nuestra EDO es

$$y(x) = C\, e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + \Big(\int b(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\Big)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}.$$

Es decir

$$\boxed{y(x) = C\, e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + \Big(\int b(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\Big)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}.}$$

Ejemplo 9. *Sea la EDO lineal*

$$y' = \frac{y}{x} + x^2.$$

Resolvemos la homogénea asociada ($a(x) = -1/x$)

$$y_h = C\,\exp\Big(\int \frac{\mathrm{d}x}{x}\Big) = Cx.$$

Aplicamos variación de constantes para encontrar una solución particular $y_p = C(x)x$

$$C'x + C = C + x^2 \Rightarrow C' = x \Rightarrow C(x) = x^2/2(\textit{una de las soluciones})$$

Luego se obtiene la solución general:

$$y(x,C) = Cx + \frac{x^3}{2}.$$

Ejemplo 10. *Resolver el PVI*

$$y' = -\frac{\cos(1/x)}{x^2}, \quad y(1/\pi) = 0.$$

Hay dos dominios de Picard maximales

$$U_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}, \quad U_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x < 0\}.$$

El punto $(x_0, y_0) = (1/\pi, 0)$ pertenece a U_+. Integrando la ecuación

$$y(x) = -\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \Rightarrow y(x) = \operatorname{sen}(1/x) + C.$$

Imponiendo la condición inicial queda $C = 0$. Luego la solución del PVI es

$$y(x) = \operatorname{sen}(1/x).$$

Es una solución maximal sobre el intervalo $I = (0, +\infty)$, Además

$$\nexists \lim_{x\to 0} y(x).$$

2. EDO's de variables separables

Son las de la forma

$$\boxed{y' = g(x)h(y)}$$

Para integrarlas se procede como sigue

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y)\,,, \quad \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\mathrm{d}x\,,, \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\mathrm{d}x.$$

Introduciendo ahora las funciones

$$H(y) = \int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)}, \quad G(x) = \int g(x)\mathrm{d}x,$$

que estarán definidas salvo una constante aditiva, se obtiene una ecuación implícita

$$\boxed{H(y) = G(x) + C.}$$

De esta relación, en caso de poder despejar, encontraremos las soluciones generales $y = y(x, C)$.

- Adviértase que si $g(x))$ es continua en un intervalo abierto I_1, y $h(y)$ y $h'(y)$ son continuas en un intervalo abierto I_2 el abierto $I_1 \times I_2$ es de Picard de la EDO .
- En uno de los pasos hemos dividido por la función $h(y)$. Este paso no es admisible en puntos x en donde $h(y(x))$ se anule. Así, los valores y_0 de y en los que $h(y) = 0$ son especiales. De hecho las funciones constantes asociadas $y(x) = y_0$ son soluciones de la EDO.
- La solución de estas EDO's aparece en forma implícita, que podrá o no llevarnos a formas explícitas. Este aspecto hay que estudiarlo en cada caso particular.
- Estas EDO's son de gran interés en las aplicaciones a la Física.

Ejemplo 11. *Sea la EDO separable*

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Aplicamos el esquema

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x/y\,,, \quad y\mathrm{d}y = -x\mathrm{d}x\,,, \quad \int y\mathrm{d}y = -\int x\mathrm{d}x$$

Es decir

$$y^2/2 = -x^2/2 + c$$

Así que obtenemos la solución implícita:

$$x^2 + y^2 = C.$$

Que produce dos soluciones generales:

$$y(x, C) = \sqrt{C - x^2}, \quad y(x, C) = -\sqrt{C - x^2},$$

Representar las soluciones y obtener las soluciones constantes.

Ejemplo 12. *Sea la EDO separable*

$$y' = \frac{y}{x}$$

Aplicamos el esquema

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y/x\,,, \quad \mathrm{d}y/y = \mathrm{d}x/x\,,, \quad \int \mathrm{d}y/y = \int \mathrm{d}x/x$$

Es decir

$$\log|y| = \log|x| + c,$$

Tomando la exponencial de la ecuación

$$|y| = C|x|,\ (C > 0).$$

Que produce la solución general:

$$y(x, C) = Cx,\ C \in \mathbb{R}.$$

Representar las soluciones y obtener las soluciones constantes.

Ejemplo 13. *Resolver el PVI para la EDO separable*

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(x_0) = x_0.$$

Aplicamos el esquema

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3y^{2/3},, \quad \mathrm{d}y/y^{2/3} = 3\,\mathrm{d}x,, \quad \int \mathrm{d}y/y^{2/3} = \int 3\mathrm{d}x$$

Es decir

$$3y^{1/3} = 3x + c.$$

Simplificando el factor 3 y elevando al cubo se obtiene la solución general:

$$y(x, C) = (x + C)^3.$$

También tenemos la solución constante $y = 0$.

En este caso

$$f(x, y) = y^{2/3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2}{3y^{1/3}}.$$

La derivada no es continua (no existe siquiera) para $y = 0$*, luego hay dos dominios maximales de Picard*

$$U_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad U_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}.$$

Dado $(x_0, y_0) \in U_+$ *(*$y_0 > 0$*)la solución del PVI es*

$$y(x) = (x + C)^3, \quad y_0 = (x_0 + C)^3 \Rightarrow C = y_0^{1/3} - x_0.$$

Es decir

$$y(x) = (x - x_0 + y_0^{1/3})^3.$$

La solución está definida para todo x de la recta, pero para $x = x_0 - y_0^{1/3}$ se anula y se cruza con la solución constante $y = 0$. Ha perdido la unicidad al llegar a un punto finito de la frontera del dominio de Picard U_+. Luego la solución maximal tiene por intervalo de definición

$$I = (x_0 - y_0^{1/3}, +\infty).$$

Anlogamente ocurre con los puntos de U_-

Ejemplo 14. *Resolver el PVI siguiente*

$$y' = -y^2, \quad y(x_0) = y_0.$$

Podemos tomar como dominio de Picard todo el plano $\mathbb{R}^2$. La solución general es

$$y(x) = \frac{1}{x - C}.$$

Si imponemos la condición inicial

$$y_0 = \frac{1}{x_0 - C},$$

determinamos la constante

$$C = x_0 - 1/y_0,$$

y por tanto la solución del PVI

$$y(x) = \frac{1}{x - x_0 + 1/y_0}.$$

La solución es singular en el punto $x = x_0 - 1/y_0$. Así que el intervalo I correspondiente a la solución maximal es de la forma siguiente:

1. *Si $y_0 < 0$ entonces $I = (-\infty, x_0 - 1/y_0)$*
2. *Si $y_0 > 0$ entonces $I = (x_0 - 1/y_0, +\infty)$*
3. *Si $y_0 = 0$ la solución del PVI es $y = 0$ (no incluida en la solución general) y por tanto $I = \mathbb{R}$*

En los dos primeros casos la solución maximal $y(x)$ tiende a ∞ cuando x tiende al extremo finito $x_0 - 1/y_0$ del intervalo I

Ejemplo 15. *En una dimensión si una partícula se mueve bajo la acción de un potencial $V = V(x)$, la energía total es constante en el tiempo*

$$E = \frac{1}{2} m (x')^2 + V(x).$$

Despejando entonces x' encontramos que las trayectorias obedecen una de las dos EDO's siguientes

$$x' = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}, \quad x' = -\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}.$$

Ambas son de variables separadas.

Ejercicio 3. *En la teoría cuántica de campos las interacciones entre las partículas son caracterizadas por constantes de acoplamiento $\alpha = \alpha(E)$ que dependen de la energía E del proceso estudiado. Cuanto mayor es el valor de estas constantes más intensa es la interacción de las partículas en el proceso. Estas funciones satisfacen EDO's separables de la forma*

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}E} = \frac{\beta(\alpha)}{E}.$$

Las funciones $\beta(\alpha)$ caracterizan la evolución de estas constantes de acoplamiento (running of the coupling constants) . Por ejemplo, en la interacción electromagn´tica y en la Cromodinámica cuántica

$$\beta(\alpha) = c\alpha^2,$$

donde $c > 0$ en la interacción electromagnética y $c < 0$ en la Cromodinámica cuántica. Resolver la EDO correspondiente ¿Que pasa entonces cuando E crece en las dos teorías?

3. EDO's homogéneas

Son las de la forma

$$\boxed{y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},}$$

donde $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son polinómios en x é y homogéneos y del mismo grado. Se reducen a EDO's separables para u mediante el cambio de variable

$$y = x\,u.$$

En efecto

$$y' = (xu)' = u + x\,u'.$$

Por otro lado si n es el grado de los polinómios homogéneos P y Q

$$\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{P(x,xu)}{Q(x,xu)} = \frac{x^n P(1,u)}{x^n Q(1,u)}.$$

Es decir la EDO nos queda de la forma

$$u' = \frac{1}{x}\Big(\frac{P(1,u)}{Q(1,u)} - u\Big).$$

Ejemplo 16. *Sea la EDO homogénea*

$$y' = \frac{y-2x}{2y+x}.$$

Hacemos el cambio de variable

$$y = x\,u \Rightarrow u' = -\frac{2}{x}\frac{u^2+1}{2u+1}.$$

Aplicando el esquema de las EDO's separables

$$\int \frac{2u+1}{u^2+1}\mathrm{d}u = -2\int \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Obtenemos la solución en forma implícita

$$\log(1+u^2) + \arctan u = -\log x^2 + C.$$

Deshaciendo el cambio

$$\log(x^2+y^2) + \arctan(y/x) = C$$

3. EDO's exactas

Son las de la forma

$$\boxed{y' = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)},}$$

donde $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son funciones que satisfacen

$$f_y(x,y) = g_x(x,y). \tag{1}$$

En **notación diferencial** la EDO se escribe como

$$f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Lo que induce a buscar una función $H = H(x,y)$ tal que

$$f(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad g(x,y) = \frac{\partial H}{\partial y}.$$

Pues en ese caso

$$\mathrm{d}H(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial H}{\partial y}\mathrm{d}y = f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

Lo cual quiere decir que $H(x,y)$ será constante sobre las soluciones $y = y(x)$ de la ecuacón. De esta manera obtenemos una solución den forma impl'icita dada por

$$\boxed{H(x,y) = C}$$

Como sabemos del cáculo integral en varias variables las condiciones (1) nos aseguran la existencia de la función H al menos locálmente, que puede construirse mediante una integral curvilnea

$$H(x,y) = H(x_0,y_0) + \int_{\gamma(x,y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

siendo $\gamma(x,y)$ una curva que una (x_0,y_0) con (x,y).

El mt́odo directo de resolución consiste en calcular H y es el siguiente:

1. Se considera el sistema de EDP's para H
$$\frac{\partial H}{\partial x} = f(x,y), \quad \frac{\partial H}{\partial y} = g(x,y).$$
Se integra una de las dos como si fuera una EDO en la variable de derivación. Por ejemplo, tomando la primera
$$H(x,y) = \int f(x,y)\mathrm{d}x + C(y) = F(x,y) + C(y), \tag{2}$$
2. Se sustituye el resultado en la otra EDP
$$\frac{\partial F}{\partial y} + C'(y) = g(x,y).$$
Esta última ecuación debe reducirse a una EDO en la variable y para la función desconocida $C(y)$. El resultado se lleva a (2).

Ejemplo 17. *Sea la EDP*
$$y' = -\frac{2xy+1}{x^2+y}.$$
Escrita en notación diferencial
$$f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y = 0, \quad f(x,y) = 2xy+1, \quad g(x,y) = x^2+y.$$
Como se cumple (1), *la EDO es exacta. Procedemos con el cálculo de H.*
$$\frac{\partial H}{\partial x} = 2xy+1, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = x^2+y.$$
Integramos la primera respecto de x
$$H = x^2y + x + C(y).$$
Sustituimos en la segunda
$$x^2 + C'(y) = x^2 + y\,,\,, C'(y) = y.$$
Integramos esta última
$$C(y) = \frac{y^2}{2} + c,$$
y obtenemos
$$H(x,y) = x^2y + x + y^2/2 + c.$$
La solución en forma implícita es
$$x^2y + x + y^2/2 = C.$$
Despejando la variable y encontramos dos soluciones generales
$$y(x) = -x^2 + \sqrt{x^4 - 2x + C}, \quad y(x) = -x^2 - \sqrt{x^4 - 2x + C}.$$

3. Reducción a EDO's exactas. Factores integrantes

Una EDP no exacta de la forma

$$y' = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)},$$

Puede que se convierta en exacta multiplicando numerador y denominador por una función conveniente $\mu = \mu(x,y)$

$$y' = -\frac{\mu(x,y)f(x,y)}{\mu(x,y)g(x,y)}.$$

Tales funciones $\mu(x,y)$ se denominan **factores integrantes**. Por tanto deben satisfacer

$$(\mu\, f)_y = (\mu\, g)_x\, , , f\mu_y - g\mu_x + (f_y - g_x)\mu = 0. \tag{3}$$

Esta es una EDP, en general complicada, así que , salvo información adicional, se buscan soluciones particulares de la misma.empezando por las más simples:

$$\mu = \mu(x), \quad \mu = \mu(y), \quad \mu = \mu(x+y), \quad \mu = \mu(xy), \quad \mu = \mu(x^2), \quad \mu = \mu(y^2)\dots$$

Si se ha encontrado un factor integrante entonces hemos formulado nuestra EDO como una EDO exacta

$$y' = -\frac{\mu(x,y)f(x,y)}{\mu(x,y)g(x,y)},$$

y construimos H como solución de

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \mu(x,y)f(x,y), \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \mu(x,y)g(x,y),$$

para expresar la solución de la EDO en forma implícita $H(x,y) = C$.

Ejemplo 18. *Sea la EDP*

$$y' = \frac{(x-1)y + \operatorname{sen} y}{x + \cos y}.$$

En este caso

$$f(x,y) = (1-x)y - \operatorname{sen} y,\ g(x,y) = x + \cos y.$$

No es una EDO exacta, pero es fácil comprobar que podemos encontrar un $\mu(x)$ que satisface la ecuación (3)

$$-(x+\cos y)\mu_x - (x + \cos y)\mu = 0\, , , \mu_x + \mu = 0.$$

Podemos tomar $\mu = e^{-x}$ y buscamos $H(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial H}{\partial x} = e^{-x}\Big((1-x)y - \operatorname{sen} y\Big), \quad \frac{\partial H}{\partial y} = e^{-x}\Big(x + \cos y\Big).$$

Integramos la segunda de las EDP's con respecto a la variable y

$$H = e^{-x}\Big(xy + \operatorname{sen} y\Big) + C(x),$$

y sustituimos el resultado en la primera EDP

$$e^{-x}\Big(y - xy + \operatorname{sen} y\Big) + C'(x) = e^{-x}\Big((1-x)y - \operatorname{sen} y\Big) \Rightarrow C'(x) = 0.$$

Tomamos $C(x) = 0$ *y por tanto encontramos la solución implícita*

$$e^{-x}\Big(xy + \operatorname{sen} y\Big) = C.$$

TEMA 2

1. EDO's LINEALES (EDOL's)

Nociones generales

Definición 1. *Notación general : x= la variable independiente, $u = u(x)$= la función incógnita. Sus derivadas sucesivas $u', u'', \dots u^{(n)}$*

$$\left\{ \text{ EDOL de orden } n \ \right\} = \left\{ \ u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)u' + a_0(x)u = b(x) \ \right\}.$$

Las funciones $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$ y $b(x)$ pueden tomar valores reales o complejos y se suponen continuas en un intervalo abierto (acotado o no acotado) I en (R).

- Las funciones $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$ se denominan **coeficientes** de la EDOL.
- La función $b(x)$ se denomina **término independiente** de la EDOL.
- Si $b(x) = 0$ en todo $x \in I$ decimos que la EDOL es **homogénea**.
- Si $b(x)$ no es cero en todo $x \in I$ decimos que la EDOL es **inhomogénea**.
- Suponemos que la derivada de orden más alto $u^{(n)}$ no lleva ninguna función coeficiente en la EDO. Esta forma se denomina **forma normal**.

Ejercicio 1. *Las siguientes EDO's son lineales*

1. $u' - u = e^{2x}$.
2. $u'' + u = \mathrm{tag} x$.
3. $u'' - \frac{1}{x}u' + (1 + \frac{2}{x+1})u = 0$.
4. $u'' + (x + i\,\mathrm{sen} x)u = e^{ix}$

¿Son homogéneas? ¿En que intervalos abiertos son continuos los coeficientes?

Ejercicio 2. *¿Por qué las siguientes EDO's no son lineales?*

1. $u' - x\,u^2 = e^{2x}$.
2. $u'' + u = e^u$.
3. $u'' + \mathrm{sen}\, u = x$

Una EDOL fundamental

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+U(x)\Psi(x)=E\Psi(x)$$

Fig. La ecuación de Schrödinger para los autoestados de energía

Fig. El mundo lineal es mucho más fácil

Problemas de valores iniciales (PVI)

Consideramos el problema de valores iniciales (PVI) consistente en la EDOL

$$\boxed{u^{(n)}+a_{n-1}(x)u^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)u'+a_0(x)u=b(x),}$$

y las condiciones iniciales

$$\boxed{u(x_0)=u_0,\ u'(x_0)=u_1,\ \ldots,u^{(n-1)}(x_0)=u_{n-1}}$$

Comentarios

- El número de condiciones iniciales es el mismo que el orden de la EDOL.
- Los **datos iniciales** $u_0,\ldots,u_{n-1}$ son n números reales ó complejos arbitrarios.

Teorema 1. *(***TEU***)*

Dado un intervalo abierto I si se cumple que tanto los coeficientes $a_0(x),\ldots,a_{n-1}(x)$ como el término independiente $b(x)$ son funciones continuas, entonces para todo punto $x_0\in I$ y todo conjunto de datos iniciales $u_0,\ldots,u_{n-1}$ entonces

1. *Existe una única solución $u=u(x)$ del PVI.*

2. Esa solución está definida sobre todo el intervalo I.

Comentarios

- A diferencia del caso general (Teorema de Picard), la solución de una EDOL es GLOBAL. Es decir, es solución sobre todo el intervalo I.
- La solución $u(x)$ debe admitir derivadas continuas hasta el orden n en I.
- El teorema se aplica a EDOL's en forma normal.

En adelante supondremos que los coeficientes $a_0(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ y el término independiente $b(x)$ son funciones

Ejercicio 3. *Usar el TEU para probar que si se cumplen las dos condiciones*

1. $a_0(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ *y* $b(x)$ *son funciones con valores reales.*
2. *Los datos iniciales* $u_0, \ldots, u_{n-1}$ *son números reales.*

Entonces la solución $u(x)$ *es una función con valores reales.*

Ejercicio 4. *Determinar intervalos I lo más grandes posible para los PVI de las EDOL's lineales siguientes en los que se puede aplicar el TEU*

1. $u'' - u = x^2$
2. $u'' - xu' + \log x\, u = 0$.
3. $x^2\, u'' + x\, u' + (x^2 - m^2)u = 0$. *(Bessel).*
4. $(1 - x^2)\, u'' - 2x\, u' + l(l+1)\, u = 0$. *(Legendre)*

2. ESPACIOS LINEALES DE FUNCIONES Y OPERADORES DIFERENCIALES

Espacios lineales de funciones derivables

Definición 2. *Sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y $N = 0, 1, \ldots$ definimos*

$$C^N(I) = \{u : I \to \mathbb{C} \,|\, u,\, u', \ldots, u^{(N)} \textit{existen y son continuas en } I\}.$$

Comentarios

- Por las propiedades lineales de la derivación y de la propiedad de continuidad, el conjunto $C^N(I)$ es un espacio lineal sobre $\mathbb{C}$. Es decir:
  1. $c \in \mathbb{C}$, $u \in C^N(I) \Longrightarrow c\,u \in C^N(I)$
  2. $u, v \in C^N(I) \Longrightarrow u + v \in C^N(I)$
- El vector 0 en $C^N(I)$ es la función cero (la que se anula en todos los puntos de I).
- La dependencia lineal en $C^N(I)$ se define en la forma habitual de un espacio lineal : $u_1, u_2, \ldots, u_M \in C^N(I)$ forman un conjunto linealmente independiente si y solo si los únicos $c_1, \ldots, c_M \in \mathbb{C}$ tales que
$$c_1 u_1 + \cdots + c_M u_M = 0,$$
son
$$c_1 = \ldots = c_M = 0.$$
- Las bases vectoriales de los espacios $C^N(I)$ tienen un número infinito de elementos y son objetos matemáticos **inaccesibles** (nadie sabe como construir una).

Ejemplo 1. *Las funciones $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = \cos(2x)$, $u_3(x) = \operatorname{sen}^2 x$ son l.d. en cualquier $C^N(I)$ ya que*
$$1 - 2\operatorname{sen}^2 x - \cos(2x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Ejemplo 2. *Las funciones $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = x$, $u_3(x) = x^2, \ldots, u_n(x) = x^{n-1}$ son l.i. en cualquier $C^N(I)$ ya que si*
$$c_1 + c_2\, x + \cdots + c_n\, x^{n-1} = 0,$$
entonces el polinomio que forma el primer miembro se anula en todos los puntos de I. Pero al ser un polinomio de grado a lo sumo n, salvo que sea el polinomio cero, solo debería anularse en n o menos puntos. Luego debe ser el polinomio cero. Es decir $c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Teorema 2. *$u_1, u_2, \ldots, u_M$ conjunto linealmente dependiente en $\in C^N(I)$ (con $N \geq M - 1$)*
$$\Longrightarrow \begin{vmatrix} u_1(x) & \cdots & u_M(x) \\ u_1'(x) & \cdots & u_M'(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ u_1^{(M-1)}(x) & \cdots & u_{M-1}^{(M-1)}(x) \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in I.$$

Demostración:

La demostración es la siguiente: sea $x_0 \in I$, al ser $u_1, u_2, \ldots, u_M$ l.d. en $C^N(I)$ existirán $(c_1, \ldots, c_M) \neq (0, \ldots, 0)$
$$c_1 u_1 + \cdots + c_M u_M = 0,$$
lo cual quiere decir
$$c_1 u_1(x) + \cdots + c_M u_M(x) = 0, \forall x \in I.$$

Por tanto derivando repetidamente esta ecuación se obtiene

$$\left\{\begin{array}{c} c_1 u_1(x) + \cdots + c_M u_M(x) = 0 \\ c_1 u_1'(x) + \cdots + c_M u_M'(x) = 0 \\ \cdots \\ c_1 u_1^{(M-1)}(x) + \cdots + c_M u_M^{(M-1)}(x) = 0 \end{array}\right.$$

para todo $x \in I$. En particular

$$\left\{\begin{array}{c} c_1 u_1(x_0) + \cdots + c_M u_M(x_0) = 0 \\ c_1 u_1'(x_0) + \cdots + c_M u_M'(x_0) = 0 \\ \cdots \\ c_1 u_1^{(M-1)}(x_0) + \cdots + c_M u_M^{(M-1)}(x_0) = 0 \end{array}\right.$$

Por tanto $(c_1, \ldots, c_M)$ es una solución de un sistema de M ecuaciones lineales homogéneas con M incógnitas, y como $(c_1, \ldots, c_M) \neq (0, \ldots, 0)$, el determinante de los coeficientes de ese sistema debe ser cero. $\square$

Comentarios

- La función

$$W(u_!, \ldots, u_M)(x) = \left| \begin{array}{ccc} u_1(x) & \cdots & u_M(x) \\ u_1'(x) & \cdots & u_M'(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ u_1^{(M-1)}(x) & \cdots & u_{M-1}^{(M-1)}(x) \end{array} \right|$$

  se denomina **Wroonskiano** de las funciones $u_!, \ldots, u_M$.

- La implicación en el otro sentido ($\Longleftarrow$) es falsa.

Ejercicio 5. *Probar que* $u_1(x) = x^2$ *y* $u_2(x) = x\,|x|$ *son l.i. en* $I = (-1, 1)$ *y sin embargo*

$$W(u_1, u_2)(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Operadores diferenciales

Definición 3. *Sea* I *un intervalo abierto en* $\mathbb{R}$ *y* $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ *funciones continuas en* I *con* $a_n(x)$ *distinta de la función cero. La aplicación*

$$L \,:\, C^n(I) \to C^0(I), \quad Lu = a_n(x)\, D^n u + \ldots + a_1(x)\, Du + a_0(x) u,$$

donde denotamos $D^k u = u^{(k)}$*, se denomina* **operador diferencial** *de orden* n

Comentarios

- L es una aplicación lineal. Es decir:

  1. $c \in \mathbb{C}$, $u \in C^n(I) \Longrightarrow L(c\,u) = c\,Lu$.
  2. De forma más operativa, se tiene que dados números $c_1, \ldots, c_M$ y funciones $u_1, \ldots, u_M$

  $$L\Big(\sum_{k=1}^{M} c_k u_k\Big) = \sum_{k=1}^{M} c_k\, Lu_k.$$

  3. $u, v \in C^n(I) \Longrightarrow L(u+v) = Lu + Lv$.

- Los operadores diferenciales son objetos matemáticos básicos en la física cuántica. Por ejemplo, la energía de una partícula cuántica en una dimensión sometida a un campo de fuerzas con potencial $V = V(x)$ es descrita por el operador diferencial

  $$Hu = -\frac{\hbar^2}{2m} D^2 u + V(x) u,$$

  donde $\hbar$ es la constante de Planck y m la masa de la partícula.

Ejemplo 3. *Sea*

$$Lu = D^2 u - xDu + \log x\, u,$$

es un operador diferencial de orden 2 que define una aplicación lineal $L : C^2(I) \to C^0(I)$ *siendo* $I = (0, +\infty)$. *En particular*

$$L\mathrm{sen}\, x = -\mathrm{sen}\, x - x\cos x + \log x\, \mathrm{sen}\, x.$$

3. EDOL's HOMOGÉNEAS

El espacio $S^n(I)$ de soluciones

Una EDOL homogénea

$$u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0,$$

puede expresarse en la forma abreviada

$$Lu = 0,$$

siendo L el operador diferencial

$$L\,:\,C^n(I) \to C^0(I), \quad Lu = D^n u + a_{n-1}(x)D^{(n-1)}u + \ldots + a_1(x)\,Du + a_0(x)u.$$

Definición 4. *Sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ funciones continuas en I con $a_n(x)$ distinta de la función cero. Denotaremos $S^n(I)$ al conjunto de soluciones de la EDOL homogénea $Lu = 0$. Es decir*

$$S^n(I) = \{u \in C^n(I) \,|\, Lu = 0\}.$$

Comentarios

- $S^n(I)$ es un espacio lineal sobre $\mathbb{C}$ (**Principio de superposición**).
  1. $c \in \mathbb{C}$, $u \in S^n(I) \Longrightarrow Lu = 0 \Longrightarrow L(c\,u) = c\,Lu = c \cdot 0 = 0.$
  2. $u, v \in S^n(I) \Longrightarrow Lu = 0,\ Lv = 0 \Longrightarrow L(u+v) = Lu + Lv = 0 + 0 = 0.$
- La función $u(x) \equiv 0$ es solución de cualquier EDOL (**la solución trivial**).
- Los operadores diferenciales son objetos matemáticos básicos en la física cuántica.
- El espacio lineal $S^n(I)$ es muchísimo más simple que los espacios $C^n(I)$, como se comprueba en las propiedades siguientes.

Teorema 3. Fórmula de Abel

Sean $u_1, \ldots, u_n \in S^n(I)$ soluciones de una EDO homogénes de orden n, entonces su Wronskiano $W(x) = W(u_1, \ldots, u_n)(x)$ verifica

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(x)\mathrm{d}x}, \quad \forall x_0, x \in I. \tag{1}$$

Demostración:

Haremos la demostración solo para $n = 2$ (EDOL's de segundo orden) *Demostración:* Sean dos soluciones $u_1, u_2 \in S^n(I)$

$$u_i'' + a_1(x)u_i' + a_0(x)u_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Entonces

$$W(x) = u_1u_2' - u_1'u_2 \Longrightarrow W'(x) = u_1'u_2' + u_1u_2'' - u_1''u_2 + u_1'u_2'' = u_1u_2'' - u_1''u_2.$$

Usando la EDOL queda

$$W'(x) = -u_1\Big(a_1(x)u_2' + a_0(x)u_2\Big) + \Big(a_1(x)u_1' + a_0(x)u_1\Big)u_2 = -a_1(x)\,W(x).$$

Integrando entre x_0 y x encontramos (1). □

Bases vectoriales en $S^n(I)$

$\boxed{\text{Las bases vectoriales de } S^n(I) \text{ se denominan } \textbf{sistemas fundamentales de soluciones de la EDOL}}$.

Teorema 4. *Se verifica que*

1. $\dim S^n(I) = n$.
2. *Las n soluciones de los PVI siguientes (donde $x_0 \in I$)*

$$\left\{\begin{array}{c} Lu_1 = 0 \\ u_1(x_0) = 1 \\ u_1'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{c} Lu_2 = 0 \\ u_2(x_0) = 0 \\ u_2'(x_0) = 1 \\ \vdots \\ u_2^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{array}\right., \quad \ldots \left\{\begin{array}{c} Lu_n = 0 \\ u_n(x_0) = 0 \\ u_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ u_n^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{array}\right. .$$

forman una base vectorial de $S^n(I)$.

Demostración:

Dado que

$$W(x) = W(x_0) = \begin{vmatrix} u_1(x_0) & \cdots & u_n(x_0) \\ u_1'(x_0) & \cdots & u_n'(x_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

las funciones $u_1, \ldots, u_n$ son l.i. Por otra parte dada $v \in S^n(I)$ si denotamos

$$c_1 = v(x_0), \ldots, c_n = v^{(n-1)}(x_0).$$

Entonces v es solución del PVI

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u(x_0) = c_1 \\ u'(x_0) = c_2 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = c_n \end{cases}.$$

Pero es facil ver que también lo es la función

$$U(x) = c_1 u_1(x) + \cdots c_n u_n(x).$$

Entonces por el teorema de existencia y unicidad $v = U$ y por tanto v es combinación lineal de $u_1, \ldots, u_n$. Con lo cual

$$\mathrm{lin}\{u_1, \ldots, u_n\} = S^n(I).$$

□

Métodos para resolver EDOL's lineales homogéneas

Dada una EDOL homogénes $Lu = 0$ de orden n para determinar su espacio de soluciones $S^n(I)$ necesitamos n soluciones l.i. $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Entonces:

La solución general de una EDOL homogénea es de la forma

$$\boxed{u(x) = c_1\, u_1(x) + \cdots c_n\, u_n(x),}$$

siendo $c_1, \ldots, c_n$ constantes arbitrarias. Luego debemos encontrar una base del espacio $S^n(I)$.

1. El método de reducción del orden(ó de la segunda solución)

Supongamos que conocemos una solución $u_1(x) \not\equiv 0$ de nuestra EDOL homogénes $Lu = 0$. Entonces el cambio de variable dependiente

$$u(x) \to v(x), \quad u(x) = u_1(x)\, v(x),$$

convierte la EDOL original $Lu = 0$ en otra para $v'(x)$ de un orden una unidad menor, y por tanto más fcil de resolver. Lo demostraremos para orden $n = 2$. Sea la EDOL

$$u'' + a_1(x)\, u' + a_0(x)\, u = 0,$$

y supongamos que conocemos una solución no trivial $u_1(x) \not\equiv 0$

$$u_1'' + a_1(x)\, u_1' + a_0(x)\, u_1 = 0.$$

Haciendo el cambio de variable

$$u(x) = u_1(x)\, v(x),$$

se obtiene, que para que u sea solución debe suceder que

$$\begin{aligned}
&(u_1 v)'' + a_1(u_1 v)' + a_0(u_1 v) = 0 \Longrightarrow\\
&u_1 v'' + 2u_1' v' + u_1'' v + a_1(u_1 v' + u_1' v) + a_0 u_1 v = (u_1'' + a_1 u_1' + a_0 u_1)v + u_1 v'' + (2u_1' + a_1 u_1)v' = 0 \Longrightarrow\\
&u_1 v'' + (2u_1' + a_1 u_1)v' = 0.
\end{aligned}$$

Es decir v debe satisfacer la EDOL

$$v'' + \Big(2\frac{u_1'}{u_1} + a_1\Big)v' = 0\,,, \quad (\log v' + \log u_1^2)' = -a_1\,,, \quad \log(u_1^2 v')' = -a_1.$$

que es una EDOL de orden 1 para v'. Podemos resolverla inmediatamente. Hacemos una primera integración

$$v' = \frac{1}{u_1^2}\, e^{-\int^x a_1 \mathrm{d}x}.$$

Ahora otra integración nos dá (interpretando con cuidado las dos integraciones indefinidas)

$$v(x) = \int^x \mathrm{d}x \frac{1}{u_1^2}\, e^{-\int^x a_1 \mathrm{d}x}.$$

Un vez calculada v deshacemos el cambio y obtenemos una segunda solución de nuestra EDOL

$$u_2(x) = u_1(x) \int^x \mathrm{d}x \frac{1}{u_1^2}\, e^{-\int^x a_1 \mathrm{d}x}.$$

Ejercicio 6. *Probar que u_1 y u_2 son l.i. Por tanto forman un sistema fundamental de soluciones de la EDOL.*

Ejemplo 4. *Sea*

$$u'' + u = 0.$$

Tomemos

$$u_1(x) = \cos\, x.$$

En este caso $a_1(x) \equiv 0$, por tanto

$$u_2(x) = \cos\, x \int^x \mathrm{d}x \frac{1}{\cos^2 x} = \cos\, x \operatorname{tag} x = \operatorname{sen} x.$$

La solución general es

$$u(x) = c_1 \cos\, x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 5. *Sea*

$$x^2\, u'' + x\, u' - u = 0.$$

La pasamos a forma normal

$$u'' + \frac{1}{x}u' - \frac{1}{x^2}u = 0$$

Tomemos como solución (se comprueba que los es)

$$u_1(x) = x.$$

En este caso $a_1(x) = 1/x$*, por tanto*

$$u_2(x) = x \int^x \mathrm{d}x \frac{1}{x^2}\, e^{-\int^x \mathrm{d}x/x} = x \int^x \mathrm{d}x \frac{1}{x^2}\, e^{-\log x} = x \int^x \mathrm{d}x \frac{1}{x^3} = -\frac{1}{2\, x^2}.$$

La solución general es

$$u(x) = c_1\, x + c_2\, \frac{1}{x^2}.$$

Donde hemos absorbido en c_2 *un* $-1/2$ *de* $u_2(x)$*.*

2. El método del polinomio característico (EDOL's con coeficientes constantes)

Sea una EDOL homogénea en que los coeficientes a_k son constantes

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = 0.$$

Por simplicidad es conveniente escribir la ecuación con el operador diferencial asociado L

$$Lu = 0.$$

Busquemos soluciones de tipo exponencial

$$u(x) = e^{\lambda\, x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Dado que

$$De^{\lambda\, x} = \lambda\, e^{\lambda\, x},\ D^2 e^{\lambda\, x} = \lambda^2, \ldots, e^{\lambda\, x} D^k e^{\lambda\, x} = \lambda^k\, e^{\lambda\, x},$$

se obtiene

$$Le^{\lambda\, x} = p(\lambda)\, e^{\lambda\, x},$$

donde

Polinomio característico de la EDOL

$$\boxed{p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0}$$

Entonces $e^{\lambda x}$ es solución de la EDOL si solo si λ satsisface

$$p(\lambda) = 0.$$

Ejemplo 6. *Sea*

$$u'' - u' = 0.$$

En este caso

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda; \quad p(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0,\, 1.$$

Soluciones asociadas

$$u_1(x) \equiv 1, \quad u_2(x) = e^x.$$

Caso general

En el caso general al ser $p(\lambda)$ un polinomio de grado n admitirá una factorización de la forma

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}, \quad n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n,$$

donde $\lambda_1,\, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ son las raíces de p con sus multiplicidad $n_1, n_2, \ldots, n_s$. Veamos los casos que pueden darse:

1. Si λ_k es una raiz simple ($n_k = 1$), entonces determina una sola solución:

$$e^{\lambda_k x}.$$

2. Si λ_k es una raiz con multiplicidad $n_k > 1$, entonces determina las n_k soluciónes siguientes:

$$e^{\lambda_k x}, \quad x\, e^{\lambda_k x}, \cdots, x^{n_k - 1}\, e^{\lambda_k x}.$$

La demostración parte de la identidad

$$Le^{\lambda x} = p(\lambda)\, e^{\lambda x}.$$

Denotemos $D_\lambda = \partial/\partial\lambda$, entonces derivando respecto de λ la identidad se obtiene

$$D_\lambda^r Le^{\lambda x} = LD_\lambda^r e^{\lambda x} = L\Big(x^r e^{\lambda x}\Big).$$

Por otro lado

$$D_\lambda^r Le^{\lambda x} = D_\lambda^r\Big(p(\lambda)e^{\lambda x}\Big) = \sum_{l=0}^{r} \frac{r!}{l!(r-l)!}(D_\lambda^l p)(D_\lambda^{r-l} e^{\lambda x})$$

Si hacemos $\lambda = \lambda_k$ en esta ecuación y tenemos en cuenta que, al ser λ_k una raíz con multiplicidad n_k

$$(D_\lambda^l p)(\lambda_k) = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, n_k - 1 \Longrightarrow L\Big(x^r e^{\lambda x}\Big) = 0, \quad r = 0,\, 1, \ldots, n_k - 1.$$

Ejercicio 7. *Probar que*

$$e^{\lambda_k x}, \quad x\, e^{\lambda_k x}, \cdots, x^{n_k-1}\, e^{\lambda_k x}.$$

son funciones l.i. en todo $C^N(I)$.

Es fcil ver entonces que el método nos proporciona un sistema fundamental de soluciones de la EDOL homogénes con coeficientes constantes.

Raices complejas

Una raiz del polinomio característico puede ser compleja

$$\lambda_k = \gamma_k + i\,\omega_k, \quad \omega_k \neq 0; \quad e^{\lambda_k x} = e^{\gamma_k x}\Big(\cos(\omega_k x) + i\,\mathrm{sen}(\omega_k x)\Big),$$

incluso cuando los coeficientes a_0, a_1, $\ldots, a_{n-1}$ sean números reales. En este último caso se desea construir la solución general real. ¿Qué hacer entonces?

Si los coeficientes a_0, a_1, $\ldots, a_{n-1}$ son números reales, tomando el complejo conjugado

$$\overline{p(\lambda)} = p(\overline{\lambda}).$$

Luego si λ_k es raiz también lo sera $\overline{\gamma_k}$

$$p(\overline{\lambda_k}) = \overline{p(\lambda_k)} = \overline{0} = 0.$$

Es decir que las races complejas vienen en pares

$$\lambda_k = \gamma_k + i\,\omega_k, \quad , \overline{\lambda_k} = \gamma_k - i\,\omega_k.$$

Además como el espacio de soluciones $S^n(I)$ es un espacio lineal, para formar el sistema fundamental podemos tomar en lugar del par

$$x^m\, e^{\lambda_k x}, \quad x^m\, e^{\overline{\lambda_k} x},$$

el par de combinaciones lineales

$$x^m\, e^{\gamma_k x}\cos(\omega_k x) = \frac{1}{2}\Big(x^m\, e^{\lambda_k x} + x^m\, e^{\overline{\lambda_k} x}\Big), \quad x^m\, e^{\gamma_k x}\mathrm{sen}(\omega_k x) = \frac{1}{2i}\Big(x^m\, e^{\lambda_k x} - x^m\, e^{\overline{\lambda_k}}\Big).$$

Ejemplo: EDOL's de orden $n = 2$

Para la EDOL homogénes de orden 2 con coeficientes constantes y reales

$$u'' + a_1\, u' + a_0\, u = 0, \quad a_0,\, a_1 \in \mathbb{R},$$

el polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0.$$

Sus raices son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\Big(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4\,a_0}\Big).$$

Podemos distinguir los dos siguientes casos:

1. Hay una única raíz λ_0, que por tanto será doble y real

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2.$$

   Esto sucede si $a_0 = -a_1^2/4$, con lo que $\lambda_0 = -a_1/2$. Entonces determina dos soluciones linealmente independientes de la EDOL

$$e^{\lambda_0\, x}, \quad x\, e^{\lambda_0\, x}.$$

   La solución general se escribe

$$u(x) = c_1\, e^{\lambda_0\, x} + c_2\, x\, e^{\lambda_0\, x}.$$

2. Hay dos races λ_1 y λ_2 distintas, que determinan el par de soluciónes linealmente independientes siguientes:

$$e^{\lambda_1\, x}, \quad e^{\lambda_2\, x}.$$

   La solución general se escribe

$$u(x) = c_1\, e^{\lambda_1\, x} + c_2\, e^{\lambda_2\, x}.$$

   Solo hay dos posibilidades: ambas raices λ_1 y λ_2 son reales ($a_1^2 - 4\, a_0 > 0$) ó bién ambas son complejas ($a_1^2 - 4\, a_0 < 0$) y conjugadas una de la otra

$$\lambda_1 = \gamma + i\, \omega, \quad \lambda_2 = \gamma - i\, \omega, \quad (\omega \neq 0).$$

   En este último caso podemos escribir

$$e^{\lambda_1\, x} = e^{\gamma\, x}\Big(\cos(\omega x) + i\, \mathrm{sen}(\omega x)\Big), \quad e^{\lambda_2\, x} = e^{\gamma\, x}\Big(\cos(\omega x) - i\, \mathrm{sen}(\omega x)\Big).$$

   También podemos tomar como base del espacio de soluciones el par de funciones reales:

$$e^{\gamma\, x}\, \cos(\omega x), \quad e^{\gamma\, x}\, \mathrm{sen}(\omega x),$$

   y la solución general admite el desarrollo

$$u(x) = C_1\, e^{\gamma\, x}\, \cos(\omega x) + C_2\, e^{\gamma\, x}\, \mathrm{sen}(\omega x).$$

3. EDOL's de Euler

So aquellas EDOL's homogéneas de la forma (adviértase que no es forma normal):

$$x^n\, u^{(n)} + a_{n-1}\, x^{n-1}\, u^{(n-1)} + \cdots + a_1\, x\, u' + a_0 u = 0.$$

Hay dos formas de resolverlas:

1. Mediante el cambio de variable independiente

$$x \to t, \quad x = e^t,$$

las derivadas se transforman como

$$
\begin{aligned}
&D_t u = (D_x u)\,(D_t x) = (D_x u)\, e^t = x\, D_x u,\\
&D_t^2 u = (D_t x)(D_x u) + x\, D_t D_x u = x\, D_x u + x^2 D_x^2 u \Rightarrow\\
&x^2 D_x^2 u = D_t^2 u - D_t u,
\end{aligned}
$$

continuando el proceso, todos los términos $x^k D_x^k u$ se convierten en sumas de derivadas $D_t^l u$ con coeficientes constantes. Así que la EDOL se convierte en una EDOL con coeficientes constantes.

2. Se buscan soluciones de la forma

$$u = x^\lambda.$$

Dado que

$$x^k D_x^k = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)\, x^\lambda.$$

Para que x^λ cumpla la EDO se encuentra que

$$L x^\lambda = p(\lambda) x^\lambda = 0 \Longleftrightarrow p(\lambda) = 0,$$

donde $p(\lambda)$ es un polinomio de grado n, que podrá factorizarse

$$p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}, \quad n_1+n_2+\cdots+n_s = n,$$

siendo λ_1, $\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ las raíces de p con sus multiplicidad $n_1, n_2, \ldots, n_s$. Veamos los casos que pueden darse:

a) Si λ_k es una raiz simple ($n_k = 1$), entonces determina una sola solución:

$$x^{\lambda_k}.$$

b) Si λ_k es una raiz con multiplicidad $n_k > 1$, entonces determina las n_k soluciónes siguientes:

$$x^{\lambda_k}, \quad (\log\, x)\, x^{\lambda_k}, \ldots, (\log\, x)^{n_k-1}\, x^{\lambda_k}$$

La demostración se basa en la identidad

$$D_\lambda^r L x^\lambda = L D_\lambda^r x^\lambda = L((\log x)^r x^\lambda)$$

Por otro lado

$$D_\lambda^r L x^\lambda = D_\lambda^r \Big(p(\lambda) x^\lambda\Big)$$

Si hacemos $\lambda = \lambda_k$ en esta ecuación y tenemos en cuenta que, al ser λ_k una raz con multiplicidad n_k

$$(D_\lambda^l p)(\lambda_k) = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, n_k - 1 \Longrightarrow L\Big(x^r e^{\lambda\, x}\Big) = 0, \quad r = 0,\, 1, \ldots, n_k - 1,$$

se demuestra que

$$L((\log x)^r x^{\lambda_k}) = 0, \quad r = 0, 1, \ldots, n_k - 1.$$

Ejemplo 7. *Sea la EDO de Euler:*

$$2\,x^2\,u'' + x\,u' - 15\,u = 0.$$

Sustituyendo $u = x^\lambda$ *se obtiene*

$$p(\lambda) = 2\,\lambda\,(\lambda - 1) + \lambda - 15,$$

cuyas raices son

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -3/2,$$

y dán lugar a las soluciones

$$u_1(x) = x^3, \quad u_2 = \frac{1}{x^{3/2}}.$$

4. EDOL's INHOMOGÉNEAS

El conjunto de soluciones

Como dijimos al principio de este capítulo una EDOL inhomogénea es de la forma

$$u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)u' + a_0(x)u = b(x), \quad b(x) \not\equiv 0. \tag{2}$$

Puede expresarse en la forma abreviada

$$Lu = b,$$

siendo L el operador diferencial

$$Lu = D^n u + a_{n-1}(x)D^{(n-1)}u + \ldots + a_1(x)\, Du + a_0(x)u.$$

Denominaremos EDOL **homogénea asociada** a la EDOL inhomogénea (2) a la EDOL

$$u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0.$$

En forma abreviada

$$Lu = 0.$$

Supongamos que conocemos una solución particular cualquiera $u_p(x)$. Es decir $Lu_p = b$. Entonces para cualquier otra solución $Lu = b$, se tiene que

$$L(u - u_p) = Lu - Lu_p = b - b = 0.$$

Por tanto $u - u_p$ es una solución de la EDOL homogénes asociada. Podemos así enunciar que

La solución general de una EDOL inhomogénea es de la forma

$$\boxed{u(x) = u_{\text{part}}(x) + c_1\, u_1(x) + \cdots c_n\, u_n(x),}$$

siendo $u_{\text{part}}(x)$ una solución particular cualquiera de la EDOL inhomogénea, y $c_1\, u_1(x) + \cdots c_n\, u_n(x)$ la solución general de la EDOL homogénes asociada.

Luego para determinar el conjunto de soluciones de una EDOL inhomogénea debemos hacer dos cosas:

1. Resolver la EDOL homogénea asociada.

2. Encontrar una solución particular $u_{\text{part}}(x)$ de la EDOL inhomogénea.

La sección anterior trató la resolución de EDOL's homogéneas, veamos que podemos decir del cálculo de $u_{\text{part}}(x)$.

Métodos para determinar $u_{\rm part}(x)$

1. El método de variación de constantes

Si hemos resuelto la la EDOL homogénea asociada y conocemos su solución general

$$c_1\, u_1(x) + \cdots c_n\, u_n(x),$$

el método de variación de constantes consiste en buscar una $u_{\rm part}(x)$ de la forma

$$u_{\rm part}(x) = c_1(x)\, u_1(x) + \cdots c_n(x)\, u_n(x),$$

donde $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ son funciones desconocidas. Para ello se sustituye esta expresón en la EDOL inhomogénea y se impone no solo que sea solución, sino también una serie de condiciones a las funciones $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$. Concretamente se exige el sistema

$$\left\{\begin{array}{c} c_1'(x)\, u_1(x) + \cdots c_n'(x)\, u_n(x) = 0, \\ c_1'(x)\, u_1'(x) + \cdots c_n'(x)\, u_n'(x) = 0, \\ \vdots \\ c_1'(x)\, u_1^{(n-1)}(x) + \cdots c_n'(x)\, u_n^{(n-1)}(x) = b(x), \end{array}\right.$$

Las funciones $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$ pueden obtenerse de este sistema lineal dado que el determinante de sus coeficientes es el Wronskiano

$$W(u_1, \ldots, u_n)(x),$$

que no se anula en ningún punto $x \in I$.

Solo probaremos el resultado para el caso $n = 2$. Busquemos una solución de

$$u_{\rm part}'' + a_1(x)\, u_{\rm part}' + a_0(x)\, u_{\rm part} = b(x),$$

de la forma

$$u_{\rm part}(x) = c_1(x)\, u_1(x) + c_2(x)\, u_2(x),$$

donde

$$u_i'' + a_1(x)\, u_i' + a_0(x)\, u_i = 0, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Procedemos como sigue:

$$u_{\rm part}' = c_1\, u_1' + c_2\, u' + (c_1'\, u_1 + c_2'\, u_2),$$

si imponemos que

$$c_1'\, u_1 + c_2'\, u_2 = 0, \tag{4}$$

entonces

$$u_{\rm part}' = c_1\, u_1' + c_2\, u_2' \Rightarrow u_{\rm part}'' = c_1\, u_1'' + c_2\, u_2'' + (c_1'\, u_1' + c_2'\, u_2'). \tag{5}$$

Si exigimos ahora que $Lu_{\text{part}} = b$, teniendo en cuenta (5) y (3)

$$\begin{aligned} Lu_{\text{part}} &= c_1\, u_1'' + c_2\, u_2'' + (c_1'\, u_1' + c_2'\, u_2') + a_1(c_1\, u_1' + c_2\, u_2') + a_0(c_1 u_1 + c_2 u_2) \\ &= c_1\, Lu_1 + c_2\, Lu_2 + c_1'\, u_1' + c_2'\, u_2' = c_1'\, u_1' + c_2'\, u_2'. \end{aligned}$$

basta imponer

$$c_1'\, u_1' + c_2'\, u_2' = b \tag{6}$$

Es decir $c_1(x)$ y $c_2(x)$ deben satisfacer el sistema de dos ecuaciones lineales

$$\begin{cases} c_1'\, u_1 + c_2'\, u_2 = 0 \\ c_1'\, u_1' + c_2'\, u_2' = b \end{cases}$$

Resolviendo por la fórmula de Cramer del álgebra lineal

$$c_1' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 0 & u_2 \\ b & u_2' \end{vmatrix} = -\frac{u_2\, b}{W},$$

$$c_2' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ u_2' & b \end{vmatrix} = \frac{u_1\, b}{W}.$$

donde

$$W \equiv W(u_1, u_2) = u_1\, u_2' - u_1'\, u_2..$$

Integrando ahora

$$c_1 = -\int \mathrm{d}x \frac{u_2\, b}{W}, \quad c_2 = \int \mathrm{d}x \frac{u_1\, b}{W}.$$

Finalmente, la expresión de u_{part} queda (siendo cuidadoso con las integrales)

$$u_{\text{part}}(x) = -u_1(x) \int \mathrm{d}x \frac{u_2\, b}{W} + u_2(x) \int \mathrm{d}x \frac{u_1\, b}{W}.$$

Ejemplo 8. *Sea*

$$u'' - u = x^2\, e^x.$$

En este caso

$$u_1 = e^x, \quad u_2 = e^{-x} \to W = -2, \quad c_1 = \frac{x^3}{6}, \quad c_2 = \Big(-\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \Big) e^{2x}.$$

Así que

$$u_{\text{part}}(x) = \Big(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \Big) e^x.$$

2. El método de los coeficientes indeterminados

Solo se aplica a las EDOL's con coeficientes constantes

Sea una EDOL inhomogénea en que los coeficientes a_k son constantes

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = b(x), \tag{7}$$

y el término independiente es de la forma

$$b(x) = e^{\lambda_0 x} P(x), \quad P(x) = b_p\, x^p + \cdots + b_1\, x + b_0, \quad \lambda_0 \in \mathbb{C}, \quad b_p \neq 0. \tag{8}$$

En ese caso podemos encontrar una solución particular $u_{\text{part}}(x)$ de (7) de una manera simple, sin recurrir a integraciones. La forma de esa solución la proporciona el siguiente teorema, que usa el polinomio característico de la EDOL homogénea asociada a (7)

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Teorema 5. *Hay dos situaciones distintas dependiendo de si λ_0 es o no raiz de $p(\lambda)$:*

1. *Si $p(\lambda_0) \neq 0$, entonces existe una solución de (7) de la forma*

$$u_{\text{part}}(x) = e^{\lambda_0 x} Q(x), \quad Q(x) = c_p\, x^p + \cdots + c_1\, x + c_0. \tag{9}$$

2. *Si $p(\lambda_0) \neq 0$, entonces existe una solución de (7) de la forma*

$$u_{\text{part}}(x) = e^{\lambda_0 x} Q(x), \quad Q(x) = x^m\, (c_p\, x^p + \cdots + c_1\, x + c_0), \tag{10}$$

donde m es la multiplicidad de λ_0 como raiz de $p(\lambda)$

Demostración:

Busquemos una solución de la forma

$$u_{\text{part}}(x) = e^{\lambda_0 x}\tilde{Q}(x),$$

donde $\tilde{Q}(x)$ es un polinomio incógnita. Apliquemos la regla de Leibnitz para la derivada de un producto

$$D^r\left(e^{\lambda_0 x}\tilde{Q}(x)\right) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} D^{r-k}\left(e^{\lambda_0 x}\right) D^k\tilde{Q}(x) = e^{\lambda_0 x} \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \lambda_0^{r-k}\, D^k\tilde{Q}(x).$$

Sustituyendo estas expresiones en (7), el primer miembro nos queda

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda_0\, x} \sum_{r=0}^{n} a_r \sum_{k=0}^{r} \left(\begin{array}{c} r \\ k \end{array} \right) \lambda_0^{r-k}\, D^k \tilde{Q}(x) \\
&= e^{\lambda_0\, x} \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{r=k}^{n} \frac{r!}{(r-k)!k!}\, a_r \lambda_0^{r-k} \Big) D^k \tilde{Q}(x) \\
&= e^{\lambda_0\, x} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \Big(\sum_{r=k}^{n} r(r-1)\cdots(r-k+1)\, a_r \lambda_0^{r-k} \Big) D^k \tilde{Q}(x) \\
&= e^{\lambda_0\, x} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} p^{(k)}(\lambda_0) D^k \tilde{Q}(x), \quad \text{en el caso 1} \\
&= e^{\lambda_0\, x} \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k!} p^{(k)}(\lambda_0) D^k \tilde{Q}(x), \quad \text{en el caso 2}
\end{aligned}$$

donde para el caso 2 hemos tenido en cuenta que

$$p(\lambda_0) = 0,\, p'(\lambda_0), \ldots, p^{(m-1)}(\lambda_0) = 0.$$

Simplificando el factor exponencial en los dos miembros de (7) encontramos una ecuación de la forma

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} p^{(k)}(\lambda_0) D^k \tilde{Q}(x) = P(x), \quad \text{en el caso 1,}$$

y

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k!} p^{(k)}(\lambda_0) D^k \tilde{Q}(x) = P(x), \quad \text{en el caso 2.}$$

Estas ecuaciones son igualdades entre polinomios en x. Usando las formas (9) y (10) para $\tilde{Q}(x)$, se demuestra que identificando coeficientes de potencias de x en las ecuaciones obtenemos un sistema lineal de $p+1$ ecuaciones para las $p+1$ incógnitas $c_0, c_1, \ldots c_p$ (**los coeficientes indeterminados**). □

Términos independientes $b(x)$ con factores oscilatorios

Dado que el parámero λ_0 en la expresión $b(x) = e^{\lambda_0\, x} P(x)$ del término independiente puede ser un número complejo

$$\lambda_0 = \gamma + i\,\omega, \quad \omega \neq 0; \quad e^{\lambda_0 x} = e^{\gamma\, x}\Big(\cos(\omega\, x) + i \operatorname{sen}(\omega\, x) \Big),$$

nos permite también resolver EDOL's

$$u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = b(x), \tag{11}$$

tales que

1. Todos los coeficientes $a_0,\, a_1,\, \ldots, a_{n-1}$ son números reales.

2. El término independiente es de la forma

$$b(x) = e^{\gamma x} \left\{ \begin{array}{c} \cos(\omega x) \\ \text{ó} \\ \operatorname{sen}(\omega x) \end{array} \right\} P(x), \quad P(x) = b_p x^p + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_p \neq 0.$$

con $b_0, \ldots, b_p \in \mathbb{R}$.

Para ello aplicamos el método de coeficientes indeterminados a la EDOL

$$v^{(n)} + a_{n-1} v^{(n-1)} + \cdots + a_1 v' + a_0 v = e^{\lambda_0 x} P(x). \tag{12}$$

para calcular una solución v_{part} de (13). Tomando entonces parte real o imaginaria en

$$v_{\text{part}}^{(n)} + a_{n-1} v_{\text{part}}^{(n-1)} + \cdots + a_1 v'_{\text{part}} + a_0 v_{\text{part}} = e^{\lambda_0 x} P(x), \tag{13}$$

encontramos inmediatamente que

$$u_{\text{part}} = \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{Re} v_{\text{part}}(x) \\ \text{ó} \\ \operatorname{Im} v_{\text{part}}(x) \end{array} \right\},$$

verifican (11) con

$$b(x) = e^{\gamma x} \left\{ \begin{array}{c} \cos(\omega x) \\ \text{ó} \\ \operatorname{sen}(\omega x) \end{array} \right\} P(x).$$

Ejemplo 9. *Sea*

$$u'' - 3 u' + 2 u = \cos x.$$

Aplicamos el el método de coeficientes indeterminados a

$$v'' - 3 v' + 2 v = e^{i x}. \tag{14}$$

Debemos buscar una solución de la forma

$$v = e^{i x} c.$$

Sustituyendo en (14) *y simplificando el factor* $e^{i x}$ *nos queda*

$$(1 - 3 i) c = 1,, \ c = \frac{1 + 3 i}{10},, \ v = \frac{1 + 3 i}{10} e^{i x}.$$

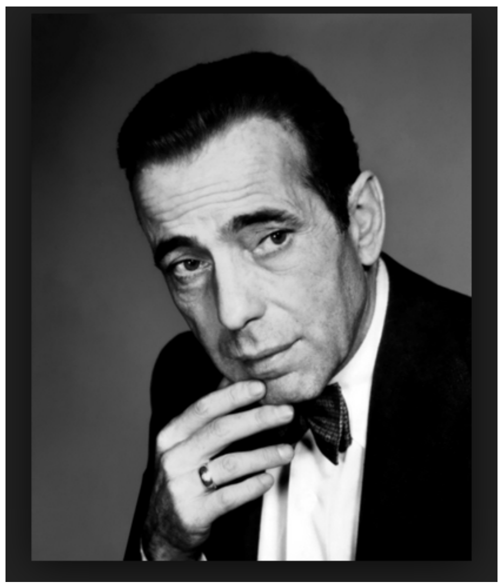
Por tanto

$$u(x) = \operatorname{Re} v(x) = \frac{1}{10} (\cos x - 3 \operatorname{sen} x).$$

TEMA 3

1. SISTEMAS DE EDO's LINEALES

"Siempre nos quedará el álgebra lineal"



Nociones generales

Definición 1. *Notación general : $x=$ la variable independiente,*

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \text{ la función incógnita.}$$

Su derivada

$$\boldsymbol{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

Se denomina **sistema de EDO's lineales de primer orden y de dimensión** n *a un sistema de la forma*

$$\boxed{\boldsymbol{y}' = A(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x),}$$

siendo

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

De manera equivalente, el sistema se escribe en componentes como

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} y_1' = a_{11}(x)\,y_1 & + \cdots + & a_{1n}(x)\,y_n & + & b_1(x) \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)\,y_1 & + \cdots + & a_{nn}(x)\,y_n & + & b_n(x) \end{array} \right.$$

Las funciones $a_{ij}(x)$ y $b_i(x)$ pueden tomar valores reales o complejos y se supondremos que son continuas en un intervalo abierto (acotado o no acotado) I en $\mathbb{R}$.

- Las soluciones del sistema en el intervalo I son funciones vectoriales $\boldsymbol{y} : I \to \mathbb{C}^n$ con n componentes derivables.
- Las funciones $a_{ij}(x)$ se denominan **coeficientes** del sistema.
- Las funciones $b_i(x)$ se denominan **términos independientes** del sistema.
- Si $\boldsymbol{b}$ es la función cero ($\boldsymbol{b}(x) = \mathbf{0}$ en todo $x \in I$) decimos que el sistema es **homogéneo**.
- Si $\boldsymbol{b}$ no es la función cero decimos que el sistema es **inhomogéneo**.

Sin disponer por el momento de un método de cáculo de soluciones, veamos un ejemplo en que podemos llegar hasta el final

Ejemplo 1. *Sea el sistema de dimensión 2*

$$\boldsymbol{y}' = A(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x),$$

siendo

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En componentes se escribe como

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_1 + y_2 + x, \\ y_2' = y_2 \end{array} \right.$$

Podemos resolver la segunda ecuación obteniendo

$$y_2 = C_2\,e^x.$$

Sustituimos ahora el resultado en la primera ecuación y queda de la forma

$$y_1' = y_1 + C_2\, e^x + x,$$

que es una EDO lineal para y_1*. Resolvemos primero la homogénea asociada*

$$y_{1h} = C_1\, e^x,$$

y luego aplicamos variación de constantes para buscar una solución particular

$$y_{1p} = C(x)\, e^x, ,\ C'e^x + Ce^x = Ce^x + C_2e^x + x, ,\ C' = C_2 + xe^{-x}.$$

Luego

$$C(x) = C_2x - (x+1)e^{-x}, ,\ y_{1p} = C_2xe^x - (x+1).$$

que nos lleva a la solución para y_1

$$y_1 = (C_1 + C_2x)\, e^x - (x+1).$$

Ejercicio 1. *Resolver el sistema de dimensión 2*

$$\boldsymbol{y}' = A(x)\, \boldsymbol{y},$$

siendo

$$A(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \operatorname{sen} x & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. *Considerar una EDOL de orden* n

$$u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)u' + a_0(x)u = b(x),$$

y probar que mediante el cambio de variables

$$y_1 = u, \quad y_2 = u', \ldots, y_n = u^{(n-1)},$$

es equivalente al sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \vdots \qquad \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -a_0(x)y_1 - a_1(x)y_2 - \cdots - a_{n-1}(x)y_n + b(x). \end{cases}$$

Es decir, mediante el cambio de variables transformamos soluciones de la EDOL en soluciones de un sistema lineal y recíprocamente.

Ejercicio 3. *Considerar las ecuaciones del movimiento de una partícula en un campo electromagnético constante*

$$m\ddot{\vec{x}} = q\,\vec{E} + q\,\dot{\vec{x}} \times \vec{B}.$$

Convertirlas en un sistema de EDO's lineales de primer orden para $\vec{x}$ *y* $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$*.*

Problema de valores iniciales para sistemas de EDO's limeales

Consideramos el problema de valores iniciales (PVI) consistente en

$$\boxed{\boldsymbol{y}' = A(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x), \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0,}$$

Se verifica el siguiente teorema de existencia y unicidad:

Teorema 1. *(***TEU***)*
Dado un intervalo abierto I si se cumple que tanto los coeficientes $a_{ij}(x)$ como los términos independiente $b_i(x)$ son funciones continuas, entonces para todo punto $x_0 \in I$ y todo conjunto de datos iniciales $\boldsymbol{y}_0$ en $\mathbb{C}^n$

1. *Existe una única solución $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x)$ del PVI.*
2. *Esa solución está definida sobre todo el intervalo I.*

Comentarios

- A diferencia del caso general (Teorema de Picard), la solución de un sistema lineal de EDO's es GLOBAL. Es decir, es solución sobre todo el intervalo I.
- La solución $\boldsymbol{y}(x)$ debe admitir primera derivadas continua en I.
- Como veremos más adelante todas las soluciones de un sistema lineal de EDO's de dimensión n pueden englobarse en una **solución general** de la forma

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots c_n\boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{y}_p,$$

donde $\{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n\}$ son n soluciones linealmente independiente del sistema homogéneo asociado

$$\boldsymbol{y}' = A(x)\,\boldsymbol{y},$$

é $\boldsymbol{y}_p$ una solución particular cualquiera.

Ejercicio 4. *Usar el TEU para probar que si se cumplen las dos condiciones*

1. *Tanto los coeficientes $a_{ij}(x)$ como los términos independiente $b_i(x)$.*
2. *El dato inicial es un vector real $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Entonces la solución $\boldsymbol{y}(x)$ es una función con valores vectoriales reales.

2. SISTEMAS de EDO's LINEALES HOMOGÉNEAS

El espacio $\mathbb{S}_n(I)$ de soluciones

Definición 2. *Sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Denotaremos $\mathbb{S}_n(I)$ al conjunto de soluciones del sistema de EDO's lineales de dimensión n homogéneo*

$$\boldsymbol{y}' = A(x)\,\boldsymbol{y}.$$

Es decir

$$\mathbb{S}_n(I) = \{\boldsymbol{y} : I \to \mathbb{C}^n \,|\, \boldsymbol{y}' = A(x)\,\boldsymbol{y}\}.$$

Comentarios

- Con las operaciones de producto de un nḿuero por una función vectorial y la suma de funciones vectoriales, $\mathbb{S}_n(I)$ es un espacio lineal sobre $\mathbb{C}$ (**Principio de superposición**).

  1. $c \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{S}_n(I) \Longrightarrow \boldsymbol{y}' = A\,y \Longrightarrow (c\,\boldsymbol{y})' = c\,\boldsymbol{y}' = c\,A\boldsymbol{y} = A(c\boldsymbol{y})$.
  2. $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathbb{S}_n(I) \Longrightarrow by_i' = A\,y_i\,(i = 1, 2) \Longrightarrow (\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)' = \boldsymbol{y}_1' + \boldsymbol{y}_2' = A\boldsymbol{y}_1 + A\boldsymbol{y}_2 = A(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)$.

- La función $\boldsymbol{y}(x) \equiv \boldsymbol{0}$ (es decir $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{0}, \forall x \in I$) siempre es solución de cualquier SEDOL homogéneo (**la solución trivial**).

- Un conjunto de funciones $\{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$ es linealmente dependiente en $\mathbb{S}_n(I)$ si existen números $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ no todos cero tales que

  $$c_1\boldsymbol{y}_1 + \ldots + c_m\boldsymbol{y}_m = \boldsymbol{0}.$$

  Es decir

  $$c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \ldots + c_m\boldsymbol{y}_m(x) = \boldsymbol{0}, \quad \forall x \in I.$$

Bases vectoriales en $\mathbb{S}_n(I)$

Teorema 2. *Se verifica que*

1. $\dim \mathbb{S}_n(I) = n$.

2. *Las n soluciones de los PVI siguientes (donde $x_0 \in I$)*

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{y}_1' = A(x)\,\boldsymbol{y}_1, \\ \\ \boldsymbol{y}_1(x_0) = \boldsymbol{e}_1, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{y}_2' = A(x)\,\boldsymbol{y}_2. \\ \\ \boldsymbol{y}_2(x_0) = \boldsymbol{e}_2, \end{array}\right. \quad \ldots \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{y}_n' = A(x)\,\boldsymbol{y}_1. \\ \\ \boldsymbol{y}_n(x_0) = \boldsymbol{e}_n, \end{array}\right.$$

donde $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ *es la base canónica de* $\mathbb{C}^n$

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

forman una base vectorial de $\mathbb{S}_n(I)$*.*

Demostración:

La hacemos en dos apartados:

1. $\{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$ son linealmente independientes. Si existieran números $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ no todos cero tales que

   $$c_1\boldsymbol{y}_1 + \ldots + c_m\boldsymbol{y}_m = \mathbf{0}.$$

   En particular

   $$c_1\boldsymbol{y}_1(x_0) + \ldots + c_m\boldsymbol{y}_m(x_0) = \mathbf{0}.$$

   Pero por las condiciones iniciales, esto significa que

   $$c_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + c_m\boldsymbol{e}_m = \mathbf{0},$$

   Pero esto no es posible dado que $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$

2. $\mathrm{lin}\,\{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m\} = \mathbb{S}_n(I)$. Dada una función $\boldsymbol{y}(x)$ en $\mathbb{S}_n(I)$, se cumple que $\boldsymbol{y}' = A(x)\,\boldsymbol{y}$. Por otra parte denotando

   $$\boldsymbol{y}_0 \equiv y(x_0).$$

   Se verifica el PVI

   $$\boldsymbol{y}' = A(x)\,\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0.$$

   Ahora bién descomponiendo $\boldsymbol{y}_0$ en la base canónica de $\mathbb{C}^n$

   $$\boldsymbol{y}_0 = c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots c_n\boldsymbol{e}_n,$$

   Se comprueba inmediatamente que la función

   $$\tilde{\boldsymbol{y}} = c_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots c_n\boldsymbol{y}_n,$$

   satisface el mismo PVI, con la misma condición inicial

   $$\tilde{\boldsymbol{y}}' = A(x)\,\tilde{\boldsymbol{y}}, \quad \tilde{\boldsymbol{y}}(x_0) = \boldsymbol{y}_0.$$

   Luego por el TEU

   $$\boldsymbol{y} = \tilde{\boldsymbol{y}} = c_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots c_n\boldsymbol{y}_n,$$

□

Matrices fundamentales

Definición 3. *Dado un sistema homogéneo*

$$\boldsymbol{y}' = A(x)\boldsymbol{y}, \tag{1}$$

de dimensión n , se denomina **sistema matricial asociado** *a la ecuación matricial*

$$Y' = A(x)\,Y \tag{2}$$

siendo $Y = Y(x)$ una función con valores matriciales

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

Es decir, en componentes

$$y'_{ij} = \sum_k A_{ik}\, y_{kj}.$$

El sistema matricial (2) es una forma conveniente de tratar el sistema de EDO's homogénero (4).

Teorema 3. *Se verifica que*

$$Y' = A(x)\,Y,$$

si y solo si los vectores columna que forman la matriz Y

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{y}_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix},$$

satisfacen el sistema (4). Además dado un vector fijo cualquiera $\boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$\boldsymbol{y} \equiv Y(x)\,\boldsymbol{c} \text{ satisface el sistema homogénero } \boldsymbol{y}' = A(x)\,\boldsymbol{y} \tag{3}$$

*D*emostración

Si escribimos el sistema matricial de la forma equivalente siguiente indicando las columnas de las matrices como

$$\Big(\boldsymbol{y}'_1\Big|\boldsymbol{y}'_2\Big|\cdots\Big|\boldsymbol{y}'_n\Big) = \Big(A(x)\,\boldsymbol{y}_1\Big|A(x)\,\boldsymbol{y}_2\Big|\cdots A(x)\,\boldsymbol{y}_n\Big).$$

Es evidente la primera afirmación del enunciado. En cuanto a la segunda afirmación

$$\boldsymbol{y}' = Y'(x)\,\boldsymbol{c} = A(x)\,Y(x)\,\boldsymbol{c} = A(x)\,\boldsymbol{y}.$$

□

Definición 4. *Se denomina* **matriz fundamental** *a cualquier matriz* $Y(x)$ *cuyas columnas* $Y(x) = \left(\boldsymbol{y}_1 \middle| \boldsymbol{y}_2 \middle| \cdots \middle| \boldsymbol{y}_n\right)$ *sean soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo* $\boldsymbol{y}' = A(x)\,\boldsymbol{y}$. *Es decir tales que formen una base de* $\mathbb{S}_n(I)$. *Una matriz fundamental de denomina* **matriz fundamental canónica en** x_0 *si* $Y(x_0) = I$.

Teorema 4. *Dada una matriz* $Y = Y(x)$ *solución del sistema matricial* (2)*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $Y(x)$ *es una matriz fundamental.*
2. $\left|Y(x)\right| \neq 0, \quad \forall x \in I$
3. $\left|Y(x_0)\right| \neq 0$ *en algún* $x_0 \in I$

*D*emostración

$1 \Longrightarrow 2$

Si $\left|Y(x_0)\right| = 0$ en algún $x_0 \in I$, entonces los vectores columna de $Y(x_0)$ son linealmente dependientes en $\mathbb{C}^n$ y por tanto existieran números $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ no todos cero tales que En particular

$$c_1\boldsymbol{y}_1(x_0) + \ldots + c_n\boldsymbol{y}_n(x_0) = \mathbf{0}.$$

Pero esto significa que la función

$$\boldsymbol{y}(x) \equiv c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \ldots + c_n\boldsymbol{y}_n(x),$$

satisface el PVI

$$\boldsymbol{y}' = A(x)\,\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \mathbf{0},$$

Al igual que la función $\mathbf{0}$. Por el TEU se cumple entonces que

$$\boldsymbol{y}(x) \equiv c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \ldots + c_n\boldsymbol{y}_n(x) = \mathbf{0}, \quad \forall x \in I.$$

Es decir, los vectores columna de $Y(x)$ serían linealmente dependientes, lo cual contradice la afirmación 1.

Obviamente $2 \Longrightarrow 3$. Veamos finalmente que $3 \Longrightarrow 1$. Si la afirmación 1 fuera falsa entonces los vectores columna de $Y(x)$ serían linealmente dependientes en $\mathbb{S}_n(I)$, así que existen números $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ no todos cero tales que En particular

$$c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \ldots + c_n\boldsymbol{y}_n(x) = \mathbf{0}, \quad \forall x \in I.$$

En particular

$$c_1\boldsymbol{y}_1(x_0) + \ldots + c_n\boldsymbol{y}_n(x_0) = \mathbf{0}.$$

Luego los vectores columna de $Y(x_0)$ serían linealmente dependientes en $\mathbb{C}^n$ y por el teorema de Rouche $\left|Y(x_0)\right| = 0$. Contadicción con 3. $\Box$

Propiedades

1. Si $Y(x)$ es una matriz fundamental canónica en x_0 entonces la solución del PVI

$$\boldsymbol{y}' = A(x)\,\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0,$$

   vine dada por

$$\boldsymbol{y} = Y(x)\,\boldsymbol{y}_0.$$

   (La demostración se sigue de la afirmación (3) y de que $\boldsymbol{y}(x_0) = Y(x_0)\,\boldsymbol{y}_0 = I\,\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{y}_0$.)

2. Si $Y(x)$ es una matriz fundamental entonces también lo es $Y(x)P$ para cualquier matriz no singular P.
   (Obvio ya que $\Big|Y(x)P\Big| = \Big|Y(x)\Big|\Big|P\Big| \neq 0$.)

3. Si $Y(x)$ es una matriz fundamental entonces $Y(x)Y(x_0)^{-1}$ es una matriz fundamental canónica en x_0 . (Obvio).

RESUMEN

Hemos visto que la solución general de un sistema homogéneo

$$\boldsymbol{y}' = A(x)\boldsymbol{y}, \tag{4}$$

de dimensión n puede expresarse de dos formas una vez conocida una base $\{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$ de $\mathbb{S}_n(I)$:

1. Forma vectorial

$$\boxed{\boldsymbol{y}(x) = c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \ldots + c_n\boldsymbol{y}_n(x),}$$

siendo $c_1, \ldots, c_n$ constantes arbitrarias.

2. Forma con la matriz fundamental

$$\boxed{\boldsymbol{y} = Y(x)\,\boldsymbol{c},}$$

siendo

$$Y(x) = \Big(\boldsymbol{y}_1\Big|\boldsymbol{y}_2\Big|\cdots\Big|\boldsymbol{y}_n\Big), \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Además hemos probado que la solución del PVI

$$\boldsymbol{y}' = A(x)\,\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0,$$

vine dada por

$$\boldsymbol{y} = Y(x)\,\boldsymbol{y}_0.$$

siendo $Y(x)$ la matriz fundamental canónica en x_0.

Ejemplo 2. *Sea el sistema homogéneo de dimensión 2*

$$\boldsymbol{y}' = A(x)\,\boldsymbol{y},$$

siendo

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En componentes se escribe como

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = y_2 \end{cases}$$

Podemos resolver la segunda ecuación obteniendo

$$y_2 = c_2\, e^x.$$

Sustituimos ahora el resultado en la primera ecuación y queda de la forma

$$y_1' = y_1 + c_2\, e^x,$$

que es una EDO lineal para y_1. Resolvemos primero la homogénea asociada

$$y_{1h} = c_1\, e^x,$$

y luego aplicamos variación de constantes para buscar una solución particular

$$y_{1p} = c(x)\, e^x, ,\; c' e^x + c e^x = c e^x + c_2 e^x, ,\; c' = c_2.$$

Luego

$$c(x) = c_2 x, ,\; y_{1p} = c_2 x e^x.$$

que nos lleva a la solución para y_1

$$y_1 = (c_1 + c_2 x)\, e^x.$$

Es decir, hemos obtenido la siguiente solución del sistema

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} (c_1 + c_2\, x)\, e^x \\ c_2\, e^x \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

La base de soluciones asociada es

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} x e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

La matrix fundamental es

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x & x e^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix}.$$

Métodos para resolver sistemas de EDO's lineales homogéneas con coeficientes constantes

Estudiaremos solamente el caso en que la matriz de coeficientes $A(x)$ es constante.

$$\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}.$$

En este caso consideramos que el intervalo en que consideramos el sistema es toda la recta $I = \mathbb{R}$.

1. El método de vectores propios

Valores propios y vectores propios de una matriz

Sea A una matriz $n \times n$ compleja (en general). Recordemos algunas nociones fundamentales del lgebra lineal.

Definición 5. *Un número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$ es un* **valor propio** *de A si existe algún vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ distinto del cero ($\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$) tal que*

$$A\,v = \lambda\,\boldsymbol{v}. \tag{5}$$

En ese caso decimos que $\boldsymbol{v}$ es un vector propio asociado al valor propio λ.

Comentarios

- El conjunto de vectores propios asociados a un valor propio λ, junto con el vector cero, que siempre cumple (5), forman un espacio lineal sobre $\mathbb{C}$

  $$V_\lambda = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \big| A\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}\}.$$

  Se denomina **multiplicidad geométrica** s de un valor propio λ al número de vectores propios linealmente independientes que tiene asociados. Es decir

  $$s = \dim V_\lambda.$$

  También se dice

  $$s = 1,\ \lambda \text{ valor propio simple;} \quad s \geq 2,\ \lambda \text{ valor propio degenerado.}$$

- Los autovalores de una matriz se determinan calculando los ceros del **polinomio característico** de A

  $$p(\lambda) = \Big|A - \lambda\,I\Big| = (-1)^n \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}.$$

  Para cada autovalor λ_i, el número entero m_i de denomina **multiplicidad algebraica** de λ_i. En general las multiplicidades geométrica y algebraica de un autovalor son distintas.

- Una matriz A es diagonalizable si existe una base de $\mathbb{C}^n$ formada por vectores propios de A. Hay dos casos importantes en que esto sucede

  1. A tiene n valores propios distintos ($m_i = 1$ para todo λ_i).
  2. La matriz A es autoadjunta ($\bar{a}_{ij} = a_{ji}$ para todo par i, j)

Vectores propios y soluciones

Teorema 5. *Dado un sistema $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$ si $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ es un vector propio de A asociado a un valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces*

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{\lambda\,x}\,\boldsymbol{v},$$

es solución de $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$.

Demostración: Muy simple

$$\boldsymbol{y}' = e^{\lambda\,x}\,\lambda\,\boldsymbol{v} = e^{\lambda\,x}\,A\,\boldsymbol{v} = A\Big(e^{\lambda\,x}\,\boldsymbol{v}\Big) = A\,\boldsymbol{y}.$$

□

Si A es diagonalizable el resultado anterior nos proporciona un método de solución del sistema $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$, ya que si $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ formada por vectores propios de A asociados con valores propios respectivos $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ (que pueden repetirse), las soluciones

$$\boldsymbol{y}_1 = e^{\lambda_1\,x}\,\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{y}_n = e^{\lambda_n\,x}\,\boldsymbol{v}_n,$$

forman una base del espacio de soluciones $\mathbb{S}_n(I)$ ya que

$$Y(x) = \Big(\boldsymbol{y}_1\Big|\boldsymbol{y}_2\Big|\cdots\Big|\boldsymbol{y}_n\Big),$$

satisface

$$\Big|Y(x)\Big| = \det\Big(\boldsymbol{y}_1\Big|\boldsymbol{y}_2\Big|\cdots\Big|\boldsymbol{y}_n\Big) = \exp\Big((\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)x\Big)\det\Big(\boldsymbol{v}_1\Big|\boldsymbol{v}_2\Big|\cdots\Big|\boldsymbol{v}_n\Big) \neq 0.$$

2. El método de la exponencial matricial

Definición 6. *Dada una matriz cuadrada M real o compleja, su exponencial se define como la suma de la serie*

$$e^M = I + M + \frac{1}{2}M^2 + \cdots + \frac{1}{n!}M^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{M^n}{n!}.$$

Puede probarse que esta serie es convergente en el espacio de matrices.

Ejemplo 3. *Si la matriz M es tal que $M^r \equiv 0$ para algún entero positivo r (**matriz nilpotente**), entonces*

$$M^{r+1} = M^{r+2} = \cdots = 0,$$

así que

$$e^M = I + M + \frac{1}{2}M^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}M^{k-1}.$$

Eso sucede con

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = 0,$$

que implica

$$e^M = I + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 6. *La matriz*

$$Y(x) = e^{(x-x_0)\,A},$$

es una matriz fundamental del sistema

$$\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y},$$

que es canónica en x_0.

*D*emostración Dado que

$$e^{(x-x_0)\,A} = I + (x-x_0)\,A + \frac{1}{2}(x-x_0)^2\,A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(x-x_0)^n\,A^n + \cdots,$$

si derivamos respecto de x término a término la serie (lo cual puede probarse que puede hacerse)

$$\left(e^{(x-x_0)\,A}\right)' = A + A^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}\,A^n + \cdots = A\,e^{(x-x_0)\,A}.$$

Es decir

$$Y' = A\,Y.$$

Ello prueba que Y satisface el sistema matricial. Además, aplicando la identidad $\left|e^M\right| = \exp\left(Tr\,M\right)$ es obvio que $\left|Y(x)\right| \neq 0$. Por tanto, el teorema 4 nos dice que Y es una matriz fundamental. Finalmente es claro que

$$Y(x_0) = e^0 = I.$$

□

Ejercicio 5. *Considerar el sistema*

$$\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinar e^{xA}.

Polinomio característico de la EDOL

$$\boxed{p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0}$$

Caso general

En el caso general al ser $p(\lambda)$ un polinomio de grado n admitirá una factorización de la forma

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}, \quad n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n,$$

donde $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ son las raíces de p con sus multiplicidad $n_1, n_2, \ldots, n_s$. Veamos los casos que pueden darse:

1. Si λ_k es una raiz simple ($n_k = 1$), entonces determina una sola solución:

$$e^{\lambda_k x}.$$

2. Si λ_k es una raiz con multiplicidad $n_k > 1$, entonces determina las n_k soluciónes siguientes:

$$e^{\lambda_k x}, \quad x\, e^{\lambda_k x}, \cdots, x^{n_k-1}\, e^{\lambda_k x}.$$

La demostración parte de la identidad

$$Le^{\lambda\, x} = p(\lambda)\, e^{\lambda\, x}.$$

Denotemos $D_\lambda = \partial/\partial\lambda$, entonces derivando respecto de λ la identidad se obtiene

$$D_\lambda^r L e^{\lambda\, x} = L D_\lambda^r e^{\lambda\, x} = L\Big(x^r e^{\lambda\, x}\Big).$$

Por otro lado

$$D_\lambda^r L e^{\lambda\, x} = D_\lambda^r\Big(p(\lambda) e^{\lambda\, x}\Big) = \sum_{l=0}^{r} \frac{r!}{l!(r-l)!}(D_\lambda^l p)(D_\lambda^{r-l} e^{\lambda\, x})$$

Si hacemos $\lambda = \lambda_k$ en esta ecuación y tenemos en cuenta que, al ser λ_k una raz con multiplicidad n_k

$$(D_\lambda^l p)(\lambda_k) = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, n_k - 1 \Longrightarrow L\Big(x^r e^{\lambda\, x}\Big) = 0, \quad r = 0,\ 1, \ldots, n_k - 1.$$

Ejercicio 6. *Probar que*

$$e^{\lambda_k x}, \quad x\, e^{\lambda_k x}, \cdots, x^{n_k-1}\, e^{\lambda_k x}.$$

son funciones l.i. en todo $C^N(I)$*.*

Es fcil ver entonces que el método nos proporciona un sistema fundamental de soluciones de la EDOL homogénes con coeficientes constantes.

Raices complejas

Una raiz del polinomio característico puede ser compleja

$$\lambda_k = \gamma_k + i\,\omega_k, \quad \omega_k \neq 0; \quad e^{\lambda_k x} = e^{\gamma_k x}\Big(\cos(\omega_k x) + i \operatorname{sen}(\omega_k x)\Big),$$

incluso cuando los coeficientes a_0, a_1, $\ldots, a_{n-1}$ sean números reales. En este último caso se desea construir la solución general real. ¿Qué hacer entonces?

Si los coeficientes a_0, a_1, $\ldots, a_{n-1}$ son números reales, tomando el complejo conjugado

$$\overline{p(\lambda)} = p(\overline{\lambda}).$$

Luego si λ_k es raiz también lo sera $\overline{\gamma_k}$

$$p(\overline{\lambda_k}) = \overline{p(\lambda_k)} = \overline{0} = 0.$$

Es decir que las races complejas vienen en pares

$$\lambda_k = \gamma_k + i\,\omega_k, \quad , \overline{\lambda_k} = \gamma_k - i\,\omega_k.$$

Además como el espacio de soluciones $S^n(I)$ es un espacio lineal, para formar el sistema fundamental podemos tomar en lugar del par

$$x^m\, e^{\lambda_k x}, \quad x^m\, e^{\overline{\lambda_k} x},$$

el par de combinaciones lineales

$$x^m\, e^{\gamma_k x} \cos(\omega_k x) = \frac{1}{2}\Big(x^m\, e^{\lambda_k x} + x^m\, e^{\overline{\lambda_k} x}\Big), \quad x^m\, e^{\gamma_k x} \mathrm{sen}(\omega_k x) = \frac{1}{2i}\Big(x^m\, e^{\lambda_k x} - x^m\, e^{\overline{\lambda_k}}\Big).$$

FÓRMULA de PUTZER

El cálculo de la matriz exponencial e^{xA} puede ser complicado en general. Nos contentaremos con dejar sin demostración una fórmula de gran utilidad:

Sea A una matriz $n \times n$ y sean sus autovalores diferentes λ_1' (con multiplicidad m_1), λ_2' (con multiplicidad m_2),...,λ_k' (con multiplicidad m_k), siendo $m_1 + \cdots m_k = n$. Entonces

$$e^{x\,A} = r_1\, I + r_2\Big(A - \lambda_1 I\Big) + r_3\Big(A - \lambda_1 I\Big)\Big(A - \lambda_2 I\Big) + \cdots + r_n\Big(A - \lambda_1 I\Big)\Big(A - \lambda_1 I\Big)\cdots\Big(A - \lambda_{n-1} I\Big),$$

donde hemos formado una lista $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ tomandoprimero λ_1' (m_1 veces seguidas) , luego λ_2' (m_2 veces seguidas), hasta λ_k' (m_k veces seguidas). Los coeficientes r_i son funciones de x que se obtienen resolviendo las EDO's

$$\begin{cases} r_1' = \lambda_1 r_1, \quad r_1(0) = 1, \quad (r_1(x) = e^{\lambda_1 x}) \\ r_2' = \lambda_2 r_2 + r_1, \quad r_2(0) = 0, \\ \vdots \qquad \vdots \\ r_{i+1}' = \lambda_{i+1} r_{i+1} + r_i, \quad r_{i+1}(0) = 0, \\ \vdots \\ r_n' = \lambda_n r_n + r_{n-1}, \quad r_n(0) = 0. \end{cases}$$

Obsérvese el lugar en donde aparece λ_n en todo el proceso.

Caso $n = 2$

Para matrices 2×2 la fórmula de Putzer es especialmente simple

$$e^{x\,A} = r_1\, I + r_2\Big(A - \lambda_1 I\Big),$$

donde

$$\begin{cases} r_1(x) = e^{\lambda_1 x} \\ r_2' = \lambda_2 r_2 + e^{\lambda_1 x} \quad r_2(0) = 0. \end{cases}$$

La EDO para r_2 es lineal de primer orden con un término independiente $e^{\lambda_1 x}$. La resolvemos por el método de variación de constantes

$$\begin{array}{l} r_{2,h} = C\, e^{\lambda_2 x}, \text{ solución de la homogénea;} \quad r_{2,p} = C(x)\, e^{\lambda_2 x}, \text{ solución particular;} \\ C'\, e^{\lambda_2 x} + C\lambda_2\, e^{\lambda_2 x} = \lambda_2 C\, e^{\lambda_2 x} + e^{\lambda_1 x} \Longrightarrow C' = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \end{array}$$

Lo que, teniendo en cuenta la condición inicial $r_2(0) = 0$ nos lleva a

$$\begin{cases} C(x) = \frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}}{\lambda_1-\lambda_2}, \quad \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \\ C(x) = x, \quad \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r_2(x) = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2, x}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \\ r_2(x) = x\, e^{\lambda_1 x}, \quad \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

Por tanto

$$\begin{cases} e^{x\,A} = e^{\lambda_1 x}\, I + \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2, x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \Big(A - \lambda_1 I \Big), \quad \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \\ e^{x\,A} = e^{\lambda_1 x}\, I + x\, e^{\lambda_1 x} \Big(A - \lambda_1 I \Big), \quad \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

4. EDOL's INHOMOGÉNEAS

El conjunto de soluciones

Como dijimos al principio de este capítulo una EDOL inhomogénea es de la forma

$$u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)u' + a_0(x)u = b(x), \quad b(x) \not\equiv 0. \tag{6}$$

Puede expresarse en la forma abreviada

$$Lu = b,$$

siendo L el operador diferencial

$$Lu = D^n u + a_{n-1}(x)D^{(n-1)}u + \ldots + a_1(x)\, Du + a_0(x)u.$$

Denominaremos EDOL **homogénea asociada** a la EDOL inhomogénea (6) a la EDOL

$$u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0.$$

En forma abreviada

$$Lu = 0.$$

Supongamos que conocemos una solución particular cualquiera $u_p(x)$. Es decir $Lu_p = b$. Entonces para cualquier otra solución $Lu = b$, se tiene que

$$L(u - u_p) = Lu - Lu_p = b - b = 0.$$

Por tanto $u - u_p$ es una solución de la EDOL homogénes asociada. Podemos así enunciar que

La solución general de una EDOL inhomogénea es de la forma

$$\boxed{u(x) = u_{\text{part}}(x) + c_1\, u_1(x) + \cdots c_n\, u_n(x),}$$

siendo $u_{\text{part}}(x)$ una solución particular cualquiera de la EDOL inhomogénea, y $c_1\, u_1(x) + \cdots c_n\, u_n(x)$ la solución general de la EDOL homogénes asociada.

Luego para determinar el conjunto de soluciones de una EDOL inhomogénea debemos hacer dos cosas:

1. Resolver la EDOL homogénea asociada.
2. Encontrar una solución particular $u_{\text{part}}(x)$ de la EDOL inhomogénea.

La sección anterior trató la resolución de EDOL's homogéneas, veamos que podemos decir del cálculo de $u_{\text{part}}(x)$.

Métodos para determinar $u_{\text{part}}(x)$

1. El método de variación de constantes

Si hemos resuelto la la EDOL homogénea asociada y conocemos su solución general

$$c_1\, u_1(x) + \cdots c_n\, u_n(x),$$

el método de variación de constantes consiste en buscar una $u_{\text{part}}(x)$ de la forma

$$u_{\text{part}}(x) = c_1(x)\, u_1(x) + \cdots c_n(x)\, u_n(x),$$

donde $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ son funciones desconocidas. Para ello se sustituye esta expresón en la EDOL inhomogénea y se impone no solo que sea solución, sino también una serie de condiciones a las funciones $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$. Concretamente se exige el sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)\, u_1(x) + \cdots c_n'(x)\, u_n(x) = 0, \\ c_1'(x)\, u_1'(x) + \cdots c_n'(x)\, u_n'(x) = 0, \\ \vdots \\ c_1'(x)\, u_1^{(n-1)}(x) + \cdots c_n'(x)\, u_n^{(n-1)}(x) = b(x), \end{cases}$$

Las funciones $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$ pueden obtenerse de este sistema lineal dado que el determinante de sus coeficientes es el Wronskiano

$$W(u_1, \ldots, u_n)(x),$$

que no se anula en ningún punto $x \in I$.

Solo probaremos el resultado para el caso $n = 2$. Busquemos una solución de

$$u_{\text{part}}'' + a_1(x)\, u_{\text{part}}' + a_0(x)\, u_{\text{part}} = b(x),$$

de la forma

$$u_{\text{part}}(x) = c_1(x)\, u_1(x) + c_2(x)\, u_2(x),$$

donde

$$u_i'' + a_1(x)\, u_i' + a_0(x)\, u_i = 0, \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

Procedemos como sigue:

$$u_{\text{part}}' = c_1\, u_1' + c_2\, u' + (c_1'\, u_1 + c_2'\, u_2),$$

si imponemos que

$$c_1'\, u_1 + c_2'\, u_2 = 0, \tag{8}$$

entonces

$$u_{\text{part}}' = c_1\, u_1' + c_2\, u_2' \Rightarrow u_{\text{part}}'' = c_1\, u_1'' + c_2\, u_2'' + (c_1'\, u_1' + c_2'\, u_2'). \tag{9}$$

Si exigimos ahora que $Lu_{\text{part}} = b$, teniendo en cuenta (9) y (7)

$$\begin{aligned} Lu_{\text{part}} &= c_1\, u_1'' + c_2\, u_2'' + (c_1'\, u_1' + c_2'\, u_2') + a_1(c_1\, u_1' + c_2\, u_2') + a_0(c_1 u_1 + c_2 u_2) \\ &= c_1\, Lu_1 + c_2\, Lu_2 + c_1'\, u_1' + c_2'\, u_2' = c_1'\, u_1' + c_2'\, u_2'. \end{aligned}$$

basta imponer

$$c_1'\, u_1' + c_2'\, u_2' = b \tag{10}$$

Es decir $c_1(x)$ y $c_2(x)$ deben satisfacer el sistema de dos ecuaciones lineales

$$\begin{cases} c_1'\, u_1 + c_2'\, u_2 = 0 \\ c_1'\, u_1' + c_2'\, u_2' = b \end{cases}$$

Resolviendo por la fórmula de Cramer del álgebra lineal

$$c_1' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 0 & u_2 \\ b & u_2' \end{vmatrix} = -\frac{u_2\, b}{W},$$

$$c_2' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ u_2' & b \end{vmatrix} = \frac{u_1\, b}{W}.$$

donde

$$W \equiv W(u_1, u_2) = u_1\, u_2' - u_1'\, u_2..$$

Integrando ahora

$$c_1 = -\int \mathrm{d}x \frac{u_2\, b}{W}, \quad c_2 = \int \mathrm{d}x \frac{u_1\, b}{W}.$$

Finalmente, la expresión de u_{part} queda (siendo cuidadoso con las integrales)

$$u_{\text{part}}(x) = -u_1(x) \int \mathrm{d}x \frac{u_2\, b}{W} + u_2(x) \int \mathrm{d}x \frac{u_1\, b}{W}.$$

Ejemplo 4. *Sea*

$$u'' - u = x^2\, e^x.$$

En este caso

$$u_1 = e^x, \quad u_2 = e^{-x} \to W = -2, \quad c_1 = \frac{x^3}{6}, \quad c_2 = \Big(-\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \Big) e^{2x}.$$

Así que

$$u_{\text{part}}(x) = \Big(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \Big) e^x.$$

Debemos buscar una solución de la forma

$$v = e^{i\,x}\, c.$$

Sustituyendo en (**??**) y simplificando el factor $e^{i\,x}$ nos queda

$$(1 - 3\,i)c = 1,, \ c = \frac{1 + 3\,i}{10},, \ v = \frac{1 + 3\,i}{10}\, e^{i\,x}.$$

Por tanto

$$u(x) = \operatorname{Re} v(x) = \frac{1}{10}(\cos\, x - 3\,\operatorname{sen} x).$$

PARTE 2: FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Fig. Cauchy

TEMA 1: FUNCIONES ANALÍTICAS

1. NÚMEROS COMPLEJOS Y FUNCIONES

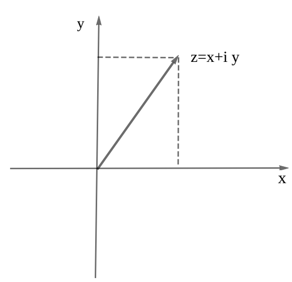
El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos

Definición 1.

$$\Big\{ \text{ Números complejos } \Big\} = \Big\{ \text{ Conjunto de puntos } z = x + i\,y \text{ del plano con dos operaciones: } \Big\}$$

Dados $z = x + i\,y$, $z' = x' + i\,y'$

- **SUMA:** $z + z' = (x + x') + i\,(y + y')$.
- **PRODUCTO:** $zz' = (xx' - yy') + i\,(xy' + yx')$.
- Es como manejar símbolos de números reales, agrupando los términos proporcionales a i, y sustituyendo
$$i^2 = -1.$$
Todas las propiedades habituales: conmutativa, asociativa, distributiva se verifican.
- Dado $z = x + i\,y$, se denomina parte real de z a $\operatorname{Re} z = x$ y parte imaginaria de z a $\operatorname{Im} z = y$.
- El conjunto de los números complejos se denota $\mathbb{C}$. Las operaciones anteriores lo dotan de la estructura de CUERPO.



Números complejos.

Definición 2. **COMPLEJO CONJUGADO** $\overline{z}$ *de* $z = x + i\,y$

$$\overline{z} = x - i\,y.$$

Es simplemente cambiar de signo la parte imaginaria de z

Propiedades

1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
3. $\overline{z_1\,z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.
4. $x = \operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2\,i}$.

Definición 3. **MÓDULO** *de de* $z = x + i\,y$

$$|z| = +\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Es simplemente la longitud de z *como vector del plano.*

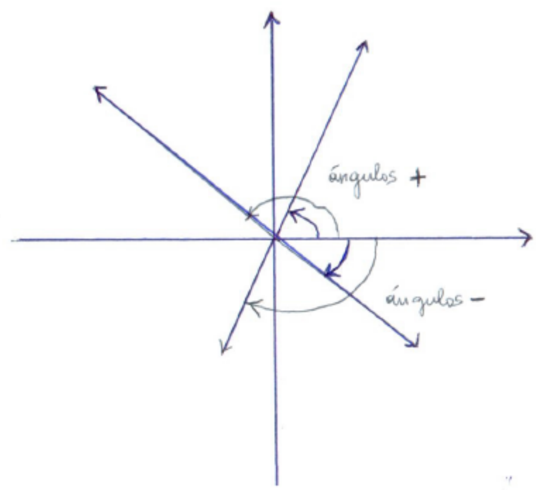
Propiedades

1. $|z|^2 = z\overline{z}$
2. $|\overline{z}| = |z|$.
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_| + |z_2|$.
4. $|z_1\,z_2| = |z_1|\,|z_2|$.
5. $x = \operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2\,i}$.

Definición 4. **ARGUMENTO** *de* $z \neq 0$*, es el conjunto* $\operatorname{Arg} z$ *de todos los ángulos orientados (con signo) que forma* z *con el semieje real positivo.*

Propiedades

1. Conocido uno de los argumentos θ de $z \neq 0$, construimos todos mediante el conjunto
$$\operatorname{Arg} z = \{\theta,\, \theta \pm 2\pi,\, \theta \pm 4\pi,\, \theta \pm 6\pi, \ldots\}.$$
2. Dado un número real θ_0, se define la **DETERMINACIÓN** del argumento entre θ_0 y $\theta_0 + 2\pi$ como la función que asigna a cada z no nulo su único argumento $\theta(z)$ que verifica
$$\theta_0 \leq \theta(z) < \theta_0 + 2\pi.$$
Es decir, el argumento que está en el intervalo $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$. Se denomina **DETERMINACIÓN PRINCIPAL** $\theta_p(z)$ la que varía en el intervalo $[-\pi, \pi)$



La determinación principal del argumento.

Definición 5. *Se denomina* **SISTEMA DE COORDENADAS POLARES** *del plano complejo* $\mathbb{C}$ *al par* (r, θ) *siendo* $r = |z|$ *y* $\theta = \theta(z)$ *cualquier función determinación del argumento. Por tanto*

$$z = x + i\,y, \begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Forma trigonométrica de un número complejo

Definición 6. *Dado* $\theta \in \mathbb{R}$ *se define*

$$e^{i\,\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta, \tag{1}$$

con lo cual un número complejo $z \neq 0$ *se puede escribir en la* **forma trigonométrica**

$$z = r\,e^{i\,\theta},$$

siendo θ *cualquiera de sus argumentos.*

Propiedades

1. La definición (1) no es un capricho, si usamos la serie de Taylor de la exponencial, es natural definir
$$\begin{aligned} e^{i\,\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$
2. $\left|e^{i\,\theta}\right| = 1.$
3. $e^{i\,\theta_1} e^{i\,\theta_2} = e^{i\,(\theta_1+\theta_2)}.$
4. $\frac{1}{e^{i\,\theta}} = e^{-i\,\theta} = \overline{e^{i\,\theta}}$
5. $e^{i\,\theta} = 1 \Longleftrightarrow \theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \ldots.$
6. Producto en coordenadas polares :
$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\,\theta_1} r_2 e^{i\,\theta_2} = r_1 r_2 e^{i\,(\theta_1+\theta_2)}.$$
7. Potencias $z^n = r^n\, e^{i\,n\,\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\,\theta))$ (Fórmula de De Moivre).
8. El significado del producto $z\, e^{i\alpha}$ es el de girar z un ángulo α.

Ejercicio 1. *Hacer las demostraciones de las propiedades 2)-5) anteriores.*

Otras operaciones con números complejos

Hemos visto las operaciones de suma y producto de números complejos. Veamos otras operaciones importantes, que se simplifican usando coordenadas polares.

COCIENTE de dos números complejos z_1 y $z_2 \neq 0$.
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{z_2\,\overline{z_2}} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Es decir, **Se multiplican numerador y denominador por el conjugado del denominador**. De esta forma el último denominador es un número real por el cual se dividen las partes real e imaginaria del numerador. Usando coordenadas polares queda

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\,\theta_1}}{r_2 e^{i\,\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\,(\theta_1 - \theta_2)}.$$

RAÍCES n-ÉSIMAS de un número complejo. Todo número complejo $z \neq 0$ posee n raíces n-ésimas distintas. Sea $w = \rho e^{i\,\alpha}$ una raíz n-ésima de $z = r\,e^{i\,\theta}$

$$w^n = z = r\,e^{i\,\theta} \Longleftrightarrow \rho^n e^{i\,n\,\alpha} = r\,e^{i\,\theta}.$$

Tomando módulos queda

$$\rho^n = r \Longleftarrow \rho = \sqrt[n]{r}$$

Volviendo a la ecuación anterior obtenemos

$$e^{i\,n\,\alpha} = e^{i\,\theta} \Longrightarrow e^{i\,(\theta - n\,\alpha)} = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

- Es obvio que solo hay n raices distintas correspondientes a $k = 0, 1, \ldots, n-1$, ya que la correspondiente a un valor $k+1$ se obtiene de la correspondiente al valor k girando esta un ´ngulo $2\pi/n$. Al incrementar k en n unidades volvemos al mismo sitio.

- Las races tienen el mismo módulo y dos de ellas consecutivas están espaciadas un ángulo $2\pi/n$. Por tanto forman un políbono regular de n lados.

RAÍCES CUADRADAS (forma alternativa) de un número complejo.

$$w^2 = z, \quad w = a + i\,b, \quad z = x + i\,y.$$

$$a^2 - b^2 + i\,2ab = x + i\,y \iff a^2 - b^2 = x, \quad 2\,ab = y \Longrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 4\,a^2 b^2 = (a^2 + b^2)^2 = x^2 + y^2.$$

Por tanto se obtiene el sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = x, \\ a^2 + b^2 = +\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Luego , para $y \neq 0$, (nótese que $2ab = sgn(y)|y|$)

$$w = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + i\,sgn(y) \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Las funciones elementales

Definición 7. EXPONENCIAL. *Dado $z = x + i\,y$, se define*

$$e^z = e^x\,e^{i\,y} = e^x \Big(\cos y + i \operatorname{sen} y \Big).$$

Propiedades

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\, e^{z_2}$.
2. $\left|e^z\right| = e^x$, $\text{Arg}e^z = y + 2k\pi\,(k = 0, \pm 1, \ldots)$

Definición 8. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS. *Se definen*

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2\,i}, \quad \cos\, z = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2}, \quad \tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}.$$

Definición 9. FUNCIONES HIPERBÓLICAS. *Se definen*

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \cosh\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \tanh z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}.$$

Ejercicio 2. *Probar las identidades:*

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1,$$
$$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1,$$
$$\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z, \quad \cos(iz) = \cosh\, z,$$
$$\operatorname{sen}(z+u) = \operatorname{sen} z\, \cos u + \cos z \operatorname{sen} u.$$

Ejercicio 3. *Probar que*

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x\, \cosh y + i\, \cos x \operatorname{senh} y.$$

Definición 10. LOGARITMOS. *Dado* $z \neq 0$*, se define el conjunto* $\log z$ *de logaritmos de* z *como*

$$\log z = \{u \in \mathbb{C} \,|\, e^u = z\}.$$

Propiedades

1. $\log z = \{\ln r + i\theta \,|\, r = |z|,\, \theta \in \text{Arg}\, z\} = \{\ln r + i(\theta + 2k\pi)\,(k = 0, \pm 1, \ldots)\}$
2. $\log(z_1 z_2) = \{u_1 u_2 \,|\, u_1 \in \log z_1,\, u_2 \in \log z_2\}$

Demostración: Solo haremos la de 1). Sea $u = a + i\, b \in \log z$, entonces

$$z = e^u = e^a e^{ib} \longrightarrow r = |z| = e^a, \quad \text{Arg}\, z = b + 2k\pi\,(k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Es decir

$$a = \ln r, \quad b \in \text{Arg}\, z.$$

□

Cuando usemos funciones logaritmo debemos introducir alguna **DETERMINACIÓN** del argumento entre θ_0 y $\theta_0 + 2\pi$ para algún θ_0 dado

$$\log_{\theta_0} z = \ln r + i\theta(z), \quad \theta_0 \leq \theta(z) < \theta_0 + 2\pi.$$

Es decir, el argumento que tomamos para z está en el intervalo $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$. Se denomina **DETERMINACIÓN PRINCIPAL** del logaritmo $\log_p z$ a la que usa la determinación principal $\theta_p(z)$ que varía en el intervalo $[-\pi, \pi)$

Definición 11. POTENCIAS COMPLEJAS. *Dados* $z \neq 0$ *y* u*, se define el conjunto* z^u *como*

$$z^u = e^{u\, \log z} = \{e^{uw} \,|\, w \in \log z\}.$$

2. FUNCIONES ANALÍTICAS

Funciones $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Consideraremos funciones $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donde Ω es una región (un abierto conexo no vacio) del plano $\mathbb{C}$. Es decir funciones de dos variables reales (x, y) y dos componentes reales $u(x, y)$ y $v(x, y)$

$$f(x, y) = u(x, y) + i\, v(x, y).$$

Denotaremos $\mathrm{Re} f = u$ é $\mathrm{Im} f = v$ a las componentes de f.

Todo lo que sabemos sobre cálculo de funciones de varias variables y varias componentes se aplica: continuidad, derivabilidad, derivadas parciales respecto de x é y... Operacionalmente lo único que debemos pensar es en tratar a i como una constante.

En muchas ocasiones emplearemos la notación de **variable compleja** $f = f(z)$ en lugar de la de $f = f(x, y)$. Aunque en general solo deberíamos usarla para cierta clase de funciones (**las funciones analíticas** que veremos pronto.

$f(x,y)$	$u(x,y)$	$v(x,y)$
z	x	y
z^2	$x^2 - y^2$	$2xy$
e^z	$e^x \cos y$	$e^x \operatorname{sen} y$
$\operatorname{sen} z$	$\operatorname{sen} x \cosh y$	$\cos x \operatorname{senh} y$
$\log_p z$	$\ln r$	θ_p
$\overline{z}$	x	$-y$
$\lvert z\rvert^2$	$x^2 + y^2$	0

Recordemos la definición de las derivadas parciales en un punto $z_0 = x_0 + iy_0$ del plano:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}. \tag{2}$$

Ejemplo 1. *Sea $f(x, y) = z^2 = (x^2 - y^2) + i\, 2xy$. Entonces*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + i\, 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + i\, 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2\, i.$$

Funciones analíticas

Definición 12. *Dada $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 = x_0 + i\, y_0 \in \Omega$, que denotaremos $f = f(z)$, decimos que f admite derivada $f'(z)$ respecto de z en el punto z_0 si existe el límite*

$$f'(z_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Si existe $f'(z_0)$ en todo punto $z_0 \in \Omega$ se dice que f es analítica en Ω.

Hay que observar las siguientes peculiaridades de esta nueva noción de derivada.

- El límite $z \to z_0$ que aparece es el límite respecto de sucesiones de puntos del plano z que pueden tender al punto z_0 en todas las direcciones posibles.

- Tanto el númerador como el denominador del cociente de incrementos son números complejos. Esto se aprecia mejor si escribimos ese cociente con la notación (x, y) para los puntos del plano.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(x_0, y_0) = \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{x + iy - x_0 - iy_0}.$$

Propiedades

1. Si existe $f'(a)$ entonces f es continua en a.

2. Se cumplen las propiedades habituales de las derivadas con las operaciones algebraicas:

$$\Big(a\, f(z) + b\, g(z)\Big)' = a\, f'(z) + b\, g'(z), \quad \forall a, b \in \mathbb{C}.$$

$$\Big(f(z)g(z)\Big)' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \quad \Big(f(z)/g(z)\Big)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}, \ (g(z) \neq 0).$$

3. Se cumple la **REGLA DE LA CADENA**. Dada una función $f(z)$ que es composición

$$f(z) = h(g(z))$$

de dos funciones derivables $g(z)$ y $h(w)$, entonces también es derivable $f(z)$ y se cumple

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z) = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}w}(g(z))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}(z).$$

4. Se cumple el teorema de la función inversa en los términos siguientes: Dada una función $w = w(z)$ analítica con derivada continua $w' = w'(z)$, definida sobre una región Ω de $\mathbb{C}$, si en un punto $z_0 \in \Omega$ la derivada $w'(z_0)$ es distinta de cero, entonces existe función inversa $z = z(w)$ localmente alrededor de $w_0 = w(z_0)$ y
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}(w_0) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(z_0)}.$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

En este punto hay dos preguntas obvias:

1. ¿Como sabemos si una función es derivable respecto de z en un punto?

2. ¿ Como se calcula la derivada respecto de z?

Ambas preguntas las responde el Teorema siguiente:

Teorema 1. *Sea* $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *y* $z_0 = x_0 + i\, y_0 \in \Omega$. *Entonces:*

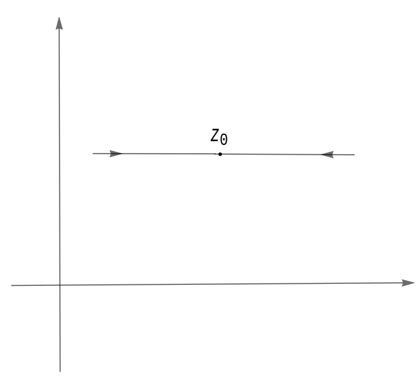
$$\exists f'(z_0) \iff \begin{cases} 1) f \text{ es diferenciable en } z_0. \\ \\ 2) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -i\, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \end{cases}$$

Además en ese caso
$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -i\, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Comentario: *Una condición suficiente para que f sea diferenciable en z_0 es que existan $\partial f / \partial x$ y $\partial f / \partial y$ y sean continuas en un abierto que contenga a z_0.*

Demostración Solo comentaremos el papel que juega la segunda condición que imponemos en el enunciado. Es simplemente la exigencia de que el cálculo de $f'(z_0)$ mediante límites del cociente incremental a través de las dos direcciones ilustradas en las figuras a) y b) debe dar el mismo resultado. Así si usamos sucesiones como las de la figura a)

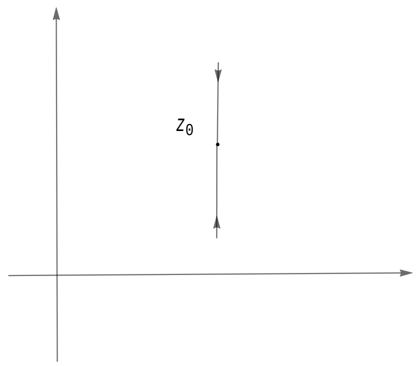
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x, y_0) \to (x_0, y_0)} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x + iy_0 - x_0 - iy_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$



a) Límites $z \to z_0$ con $y = y_0$.

Sin embargo, si usamos sucesiones como las de la figura b) se obtiene

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{(x_0,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{x_0+iy-x_0-iy_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{i}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} = -i\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$



b) Límites $z \to z_0$ con $x = x_0$.

Conclusión fundamental

Para que f sea analítica debe satisfacer la ecuación diferencial :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = -i\,\frac{\partial f}{\partial y}}$$

De forma equivalente, en términos de las partes real é imaginaria de f :

$$\boxed{u_x = v_y, \quad u_y = -v_x}$$

Ambas formulaciones se conocen como ecuaciones de Cauchy-Riemann

La notación $f = f(z)$

Hemos dicho anteriormente que la notación general para funciones $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es $f = f(x,y)$, y que la notación $f = f(z)$ solo es realmente apropiada para las funciones analíticas. La razón es que una función general $f = f(x,y)$ dá lugar a una expresión que depende en general de z y de $\overline{z}$ ya que al sustituir x é y debemos usar

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\overline{z}}{2\,i},$$

lo cual nos va a conducir a una expresión de la forma $f = f(z,\overline{z})$, salvo que se anule la derivada respecto de $\overline{z}$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\Big),$$

lo cual sucede cuando f es analítica. Es decir, podemos escribir otra formulación de las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z,\overline{z})=0}$$

Ejemplo 2. *La función*

$$f(z,\overline{z})=|z|^2=z\overline{z},$$

no es analítica ern ningún dominio del plano ya que

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z,\overline{z})=z\neq 0,\quad \forall z\neq 0.$$

Funciones analíticas elementales

POLINOMIOS. La función $f(z)=1$ es analítica en todo $\mathbb{C}$ ya que su derivada existe y vale

$$\frac{\mathrm{d}1}{\mathrm{d}z}(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1-1}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} 0 = 0.$$

La función $f(z)=z$ es también analítica en todo $\mathbb{C}$ ya que su derivada existe y vale

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z}(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} 1 = 1.$$

Por la Propiedad 2 de las funciones analíticas, tomando potencias de z y combinaciones lineales obtenemos funciones que son también analíticas en todo $\mathbb{C}$: que son los polinomios

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

Ademas usando la fórmula de la derivada del producto se obtiene

$$P'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_1.$$

FUNCIONES RACIONALES. Como los polinomios son funciones analíticas en todo $\mathbb{C}$, por la Propiedad 2 de las funciones analíticas un cociente de polinomios

$$R(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)},$$

es una función analítica en todo $\mathbb{C}$ salvo, quizás, en los ceros a del denominador $P_2(a)=0$. Ademas usando la fórmula de la derivada de un cociente se obtiene

$$R(z)' = \frac{P_1'(z)P_2(z) - P_1(z)P_2'(z)}{P_2(z)^2},\ (P_2(z)\neq 0).$$

EXPONENCIAL. Dado $z = x + i\,y$, la exponencial se define como

$$e^z = e^x\, e^{i\,y} = e^x\Big(\cos y + i \operatorname{sen} y\Big).\Big)$$

Es claro que las partes real e imaginaria de e^z son funciones de clase C^∞ en todo el plano. Además

$$\frac{\partial e^z}{\partial x} = \frac{\partial e^x}{\partial x}\Big(\cos y + i \operatorname{sen} y\Big) = e^x\Big(\cos y + i \operatorname{sen} y\Big) = e^z,$$

$$\frac{\partial e^z}{\partial y} = e^x \frac{\partial}{\partial y}\Big(\cos y + i \operatorname{sen} y\Big) = e^x\Big(-\operatorname{sen} y + i\ \cos y\Big) = -i\, e^z,$$

Luego se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en todo $\mathbb{C}$, Así, e^z es analítica en todo $\mathbb{C}$ y

$$(e^z)' = e^z.$$

Si componemos la exponencial con otra función analítica y aplicamos la regla de la cadena, se obtiene la fórmula de derivación usual:

$$\left(e^{f(z)}\right)' = f'(z)\, e^{f(z)}.$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS e HIPERBÓLICAS. Parrtiendo de las propiedades de la función exponencial , es inmediato probar que

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2\,i}, \quad \cos\, z = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2},$$

y

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \cosh\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},$$

son también analíticas en todo $\mathbb{C}$ y sus derivadas son

$$(\operatorname{sen} z)' = \cos z, \quad (\cos\, z)' = -\operatorname{sen} z,$$

$$(\operatorname{senh} z)' = \cosh z, \quad (\cosh\, z)' = \operatorname{senh} z.$$

FUNCIÓN LOGARITMO Cuando usamos una función logaritmo debemos usar alguna determinación del argumento. Por ejemplo la llamada determinación principal del logaritmo $\log_p z$ usa la determinación principal del argumento $\theta_p(z)$ que varía en el intervalo $[-\pi, \pi)$

$$\log_p z = \ln r + i\theta_p(z), \quad -\pi \leq \theta(z) < \pi.$$

De esta forma la función deja de ser continua en el semieje real negativo $-\infty < x \leq 0$, luego por la Propiedad 1 de las funciones analíticas $\log_p z$ no es analítica en el semieje real negativo $-\infty < x \leq 0$. Sin embargo en el resto del plano es analítica pues existe su derivada. Para probarlo usemos el teorema de la función inversa (Propiedad 4 de las funciones analíticas) denotando

$$w(z) = e^z, \quad z(w) = \log_p w.$$

Entonces

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\log_p w}{\mathrm{d}w} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}.$$

Renombrando las variables, vemos que $\log_p z$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ y que

$$(\log_p z)' = \frac{1}{z}.$$

POTENCIAS COMPLEJAS. Para usar una función potencia compleja debemos usar alguna determinación del logaritmo . Por ejemplo la llamada determinación principal del logaritmo $\log_p z$. De esta forma definimos

$$(z^u)_p = e^{u\,\log_p z}, \quad u \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Usando la la Propiedad 3 de las funciones analíticas y la regla de la cadena, vemos que $(z^u)_p$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ y

$$(z^u)_p' = \frac{u}{z}\, e^{u\,\log_p z} = u\, e^{(u-1)\,\log_p z} = u\,(z^{u-1})_p.$$

Funciones armónicas

Definición 13. *Sea una función $u = u(x,y)$ de clase C^2 con valores reales $u : \Omega \to \mathbb{R}$, decimos que es ARMÓNICA en Ω si satisface la ecuación de Laplace*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x,y) \in \Omega.$$

Teorema 2. *Si $f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es una función analítica en Ω, entonces sus partes real $u = u(x,y)$ é imaginaria $v = v(x,y)$ son funciones aremónicas en Ω*

Demostración: Como veremos posteriormente si $f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es una función analítica en Ω entonces es de clase C^∞ en Ω. Por tanto si consideramos las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x,$$

y derivamos sucesivamente, obtenemos

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0.$$

□

Definición 14. *Dos funciones armónicas $u(x,y)$ y $v(x,y)$ se denominan* **armónicas conjugadas** *en Ω si $f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica en Ω.*

Cálculo de la conjugada armónica.

Dada una función arm´nica $u = u(x,y)$ para calcular su función armónica conjugada $v = v(x,y)$ se procede de la forma siguiente:

1. Se impone que las funciones u y v satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann, que pueden considerarse como un sistema de ecuaciones diferenciales para la función desconocida v

$$\begin{cases} v_y = u_x \\ v_x = -u_y \end{cases}$$

2. Integramos una de las dos ecuaciones, por ejemplo la primera de ellas:

$$v(x,y) = \int \mathrm{d}y\, u_x(x,y) + C(x) = V(x,y) + C(x), \quad (V(x,y) \equiv \int \mathrm{d}y\, u_x(x,y)).$$

3. Sustituimos este resultado en al otra ecuación para determinar la función $C(x)$

$$V_x(x,y) + C'(x) = -u_y(x,y).$$

Ejemplo 3. *Calcular la función armónica conjugada de*

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy.$$

Adviértase que u es armónica. En este caso

$$v_y = u_x = 2x + 2y \Longrightarrow v(x,y) = 2xy + y^2 + C(x).$$

Imponiendo la segunda ecuación ($v_x = -u_y$), nos queda

$$2y + C'(x) = 2y - 2x \Longrightarrow C(x) = -x^2 \Longrightarrow v(x,y) = 2xy + y^2 - x^2.$$

Es decir

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy + i(2xy + y^2 - x^2) = (1-i)\, z^2.$$

<u>TEMA 2: EL TEOREMA DE CAUCHY</u>

1. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Integrales sobre arcos, cadenas y ciclos

Definición 1. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua sobre la región Ω del plano $\mathbb{C}$.*

$$f(x, y) = u(x, y) + i\, v(x, y).$$

LLamaremos **arco** γ *en el plano a toda aplicación (***parametrización** *del arco)*

$$z : [a, b] \to \Omega \subset \mathbb{C}, \quad z(t) = x(t) + i\, y(t),$$

tal que (ver Fig.1)

1. *$z = z(t)$ es continua en $[a, b]$.*
2. *La derivada $z'(t)$ existe y es continua en el interior de $[a, b]$ salvo en un número finito de valores $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ en los que existen los límites laterales de $z'(t)$, aunque con valores finitos distintos. Asímismo los límites laterales de $z'(t)$ en los extremos a y b deben existir y ser finitos. Los puntos $z_{in} = z(a)$ y $z_{fin} = z(b)$ se denominan puntos inicial y final de γ, respectílamente.*

Se define

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \int_a^{t_1} f(z(t))\, z'(t)\, \mathrm{d}t + \cdots + \int_{t_n}^b f(z(t))\, z'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Cada integral se efectúa sobre el integrando siguiente considerado como función de t

$$\begin{aligned} f(z(t))\, z'(t) &= \Big(u(x(t), y(t)) + i\, v(x(t), y(t))\Big)\Big(x'(t) + i\, y'(t)\Big) \\ &= \Big(u(x(t), y(t))\, x'(t) - v(x(t), y(t))\, y'(t)\Big) + i\, \Big(u(x(t), y(t))\, y'(t) + v(x(t), y(t))\, x'(t)\Big). \end{aligned}$$

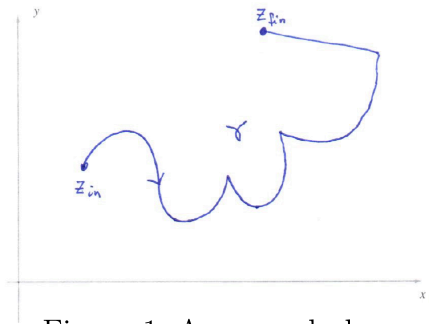


Figura 1: Arco en el plano.

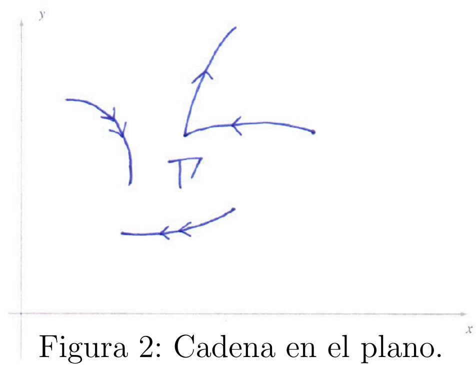


Figura 2: Cadena en el plano.

Dado un conjunto de arcos $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, denominaremos **cadena** *a cualquier expresión simbólica del tipo (ver Fig.2)*

$$\Gamma = k_1\gamma_1 + \cdots + k_n\gamma_n,$$

donde $k_1, \ldots, k_n$ son enteros positivos o negativos. Se define

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = k_1 \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + k_n \int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Diremos que Γ es un **ciclo** *si es una cadena formada por arcos $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ cerrados (ver Fig.3). En ese caso denotaremos la integral como*

$$\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Ejemplo 1. *$\gamma \equiv$ Intervalo entre z_1 y z_2 (ver Fig.4)*

$$z(t) = z_1 + t\,(z_2 - z_1), \quad t \in [0,1].$$

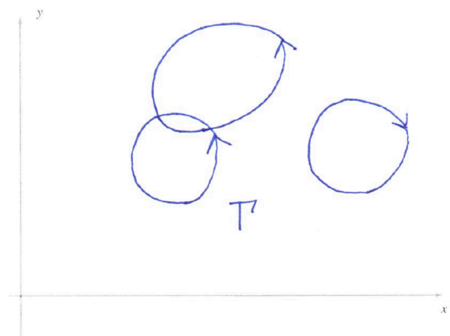


Figura 3: Ciclo en el plano.

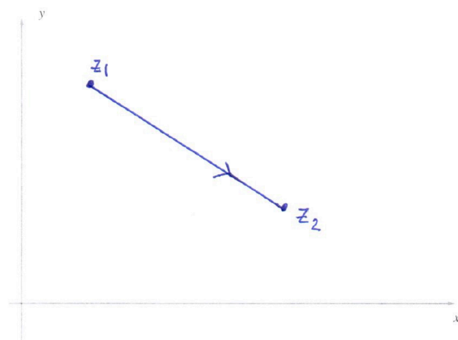


Figura 4: Intervalo.

Ejemplo 2. $\gamma \equiv$ *Círcunferencia centrada en* a *y radio* r *orientada* $+$ *(ver Fig.5)*

$$z(t) = a + r\,e^{i\,t}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

En adelante se denotara $\gamma = c(a, r)$.

Ejemplo 3. *Sea* γ *el arco de la Fig. 6 con parametrización*

$$z(t) = \begin{cases} t, \quad t \in [0,1] \\ 1 + i(t-1), \quad t \in [1,2] \end{cases}$$

Entonces

$$\int_\gamma e^z\,\mathrm{d}z = \int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t + \int_1^2 e^{1+i(t-1)}\,i\,\mathrm{d}t = e^t\Big|_0^1 + i\,e^{1-i}\,\frac{e^{it}}{i}\Big|_1^2 = e - 1 + e^{1-i}\,(e^{2i} - e^i).$$

Ejemplo 4. *Sean las integrales*

$$I_n = \oint_{c(z_0,r)} (z - z_0)^n\,\mathrm{d}z, \quad n = 0, \pm 1, \pm 1, \ldots.$$

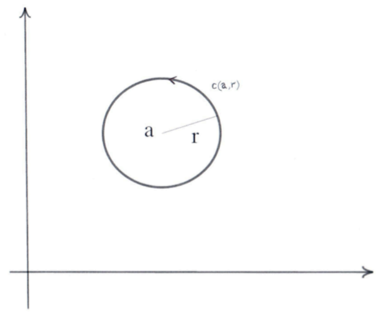


Figura 5: Circunferencia.

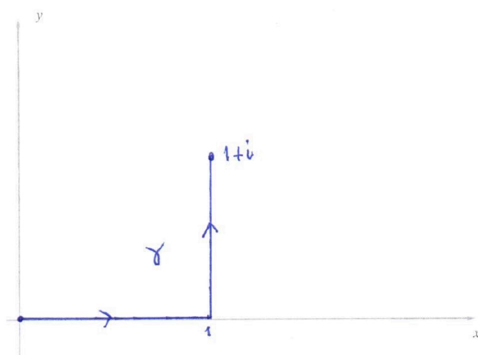


Figura 6: Arco.

Entonces:

$$I_n = \int_0^{2\pi} r^n\, e^{i\,n\,t}\, i\, r\, e^{i\,t} \mathrm{d}t = i\, r^{n+1} \frac{e^{i\,(n+1)\,t}}{i\,(n+1)}\Big|_0^{2\pi} = 0, \quad n \neq -1,$$

$$I_{-1} = \oint_{c(z_0,r)} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = i \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\,\pi\, i.$$

Propiedades

1. Linealidad:

$$\int_\Gamma (a\, f(z) + b\, g(z))\, \mathrm{d}z = a \int_\Gamma f(z)\, \mathrm{d}z + b \int_\Gamma g(z)\, \mathrm{d}z, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

2. Si denotamos $-\gamma$ al arco opuesto de γ (es decir si γ se parametriza con $z_\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, su opuesto lo hace con parametrización $z_{-\gamma}(t) \equiv z(a + b - t)$, $t \in [a, b]$)

$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

3. La integral no depende de la parametrización de γ elegida $z(t)\,(t \in [a, b])$ ó $\widetilde{z}(s)\,(s \in [c, d])$ con

$$z(t) = \widetilde{z}(s(t)),$$

$$s = s(t), \quad s : [a, b] \to [c, d], \quad s'(t) > 0,\, \forall t \in [a, b].$$

4. Se define la suma y resta de cadenas

$$\Gamma = k_1\gamma_1 + \cdots + k_n\gamma_n, \quad \Gamma' = k'_1\gamma'_1 + \cdots + k'_m\gamma'_m,$$

en la forma obvia

$$\Gamma \pm \Gamma' = k_1\gamma_1 + \cdots + k_n\gamma_n \pm k'_1\gamma'_1 \pm \cdots \pm k'_m\gamma'_m,$$

Las integrales respectivas satisfacen

$$\int_{\Gamma\pm\Gamma'} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \pm \int_{\Gamma'} f(z)\,\mathrm{d}z$$

5. **Teorema fundamental del Cálculo** Si $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica con derivada continua f' y $\gamma \subset \Omega$ entonces

$$\int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z = f(z_{fin}) - f(z_{in}).$$

6. **Independencia del camino** Si $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua, entonces

$$\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \quad \forall\,\Gamma\,\text{ciclo en }\Omega \iff \text{Existe } g \text{ analítica tal que f=g' en } \Omega$$

7. **Independencia del camino**. El enunciado 5) equivale a (ver Fig. 7)

$$\oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z, \text{ para todo par de arcos } \gamma_1 \text{ y } \gamma_2 \text{ con los mismos extremos en } \Omega.$$

Demostración 1), 2), 3) y 4) se deducen inmediatamente de las propiedades de las integrales de funciones reales que aparecen al descomponer el integrando $f(z(t))\,z'(t)$ en parte real e imaginaria. El Teorema fundamental del Cálculo se deduce de

$$\int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f'(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f(z(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = f(z(b)) - f(z(a)).$$

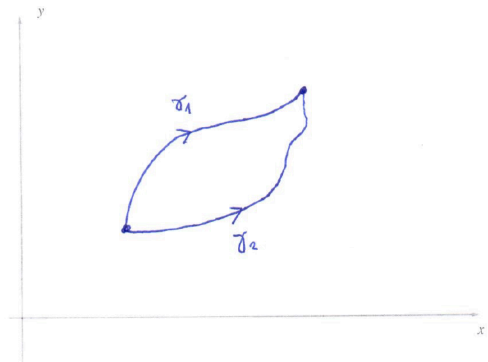


Figura 7: Arcos con los mismos extremos.

Donde hemos usado la identidad

$$\frac{\mathrm{d}f(z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f'(z)\,x' + i\,f'(z)\,y' = f'(z)\,z',$$

en que tenemos en cuenta las ecuaciones $f' = f_x = -i\,f_y$.

En cuanto a 6), la implicación $\Longleftarrow$ es consecuencia inmediata de 5) y omitimos la demostración del resto.

Ejemplo 5. *Sea γ un arco cualquiera que comience en $z = -1$ y acabe en $z = 1$*

$$\int_\gamma (z^3+3)\,\mathrm{d}z = \Big(\frac{z^4}{4} + 3z\Big)\Big|_{z=-1}^{1} = -6, \quad \int_\gamma e^z\,\mathrm{d}z = e^z\Big|_{z=-1}^{z=1} = e - e^{-1}.$$

Integración con respecto a la longitud de arco

Definición 2. *Dada $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua sobre la región Ω del plano $\mathbb{C}$.*

$$f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y).$$

y un arco γ con parametrización

$$z : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}, \quad z(t) = x(t) + i\,y(t).$$

Se define

$$\int_\gamma f(z)\,|\mathrm{d}z| = \int_a^b f(z(t))\,|z'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

donde

$$|z'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Propiedades

1. Linealidad:
$$\int_\gamma (a\, f(z) + b\, g(z))\, |\mathrm{d}z| = a \int_\gamma f(z)\, |\mathrm{d}z| + b \int_\gamma g(z)\, |\mathrm{d}z|, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

2. Si denotamos $-\gamma$ al arco opuesto de γ
$$\int_{-\gamma} f(z)\, |\mathrm{d}z| = \int_\gamma f(z)\, |\mathrm{d}z|.$$

3. La integral no depende de la parametrización de γ elegida.

4. Desigualdad fundamental:
$$\Big| \int_\gamma f(z)\, |\mathrm{d}z| \Big| \leq \int_\gamma f(z)\, |\mathrm{d}z|$$
En particular si $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \gamma$ entonces
$$\Big| \int_\gamma f(z)\, |\mathrm{d}z| \Big| \leq M\, \mathrm{l}(\gamma),$$
siendo $\mathrm{l}(\gamma)$ la longitud de γ.

Demostración Se deducen inmediatamente de las propiedades de las integrales de funciones reales que aparecen al descomponer el integrando $f(z(t))\, |z'(t)|$ en parte real e imaginaria.

2. EL TEOREMA DE CAUCHY

Indice de un ciclo respecto de un punto

Definición 3. *Sea* Γ *un ciclo y* $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$*. Se denomina índice de* Γ *respecto del punto* a

$$n(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z-a}.$$

Representa el núero de vueltas con signo que dá Γ **alrededor de** a.

Conjunto interior de un ciclo

Definición 4. *Dado un ciclo* Γ *en el plano* $\mathbb{C}$*, llamaremos* **interior de** Γ *al conjunto*

$$\operatorname{Int}\Gamma = \{a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \;\Big|\; n(\Gamma, a) \neq 0\}$$

Es decir, son los puntos sobre los que Γ dá alguna vuelta *(ver Figs. 8 y 9).*

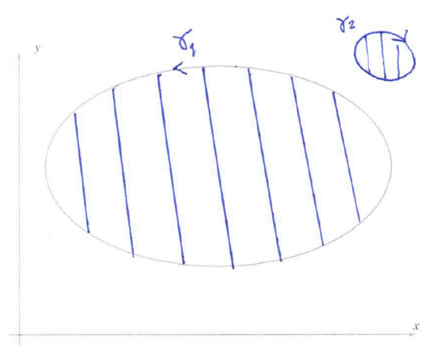


Figura 8: Interior de un ciclo $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

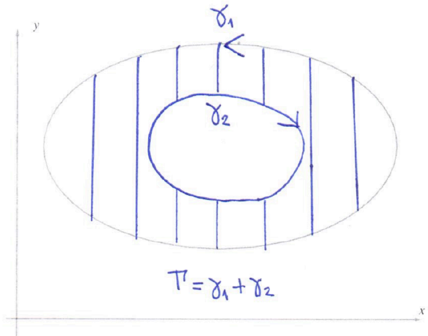


Figura 9: Interior de un ciclo $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

Definición 5. *Una región* Ω *se dice que es un conjunto* **simplemente conexo** *cuando*

$$\mathrm{Int}\,\Gamma \subset \Omega \; \textit{para todo ciclo } \Gamma \textit{ en } \Omega.$$

Es decir Ω *es un abierto conexo sin huecos rodeables.*

TEOREMA de CAUCHY.

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en Ω. Entonces se verifica

$$\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \quad \text{para todo ciclo tal que } \mathrm{Int}\,\Gamma \subset \Omega.$$

Demostración. Haremos una demostración parcial para ciclos Γ que sean fronteras de conjuntos $K \subset \Omega$ cerrados y acotados (ver Fig. 10) y suponiendo que f es de clase C^1. Es obvio para tales ciclos que

$$\mathrm{Int}\,\Gamma = K \subset \Omega.$$

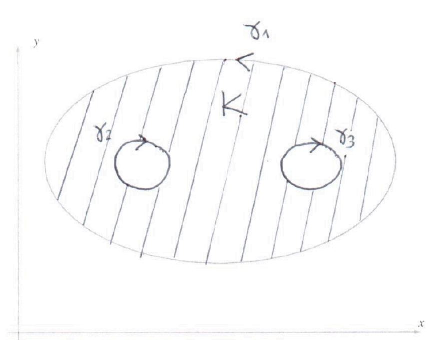


Figura 10: Conjunto K y su frontera $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$.

Además, desarrollando la integral

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}\,z &= \oint_{\Gamma}\Big(u(x,y)+i\,v(x,y)\Big)\Big(\mathrm{d}\,x+i\,\mathrm{d}\,y\Big)\\ &= \oint_{\Gamma}\Big(u(x,y)\,\mathrm{d}\,x-v(x,y)\,\mathrm{d}\,y\Big)+i\,\oint_{\Gamma}\Big(v(x,y)\,\mathrm{d}\,x+u(x,y)\,\mathrm{d}\,y\Big),\end{aligned}$$

como suma de dos integrales curvilínenas en el plano y dado que Γ es la frontera de un conjuntos K del plano. Aplicando a ambas integrales la fórmula de Green

$$\oint_{\Gamma}\Big(P(x,y)\,\mathrm{d}\,x+Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y\Big)=\iint_K\Big(Q(x,y)_x-P(x,y)_y\Big)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,$$

vemos que por las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}\,z=\iint_K\Big(-v_x-u_y\Big)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y+i\,\iint_K\Big(u_x-v_y\Big)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=0$$

□

CONSECUENCIAS

Del Teorema de Cauchy se deduce inmediatamente que dada $f:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analítica en Ω:

C1) Si dos ciclos Γ_1 y Γ_2 tales que $\mathrm{Int}\,(\Gamma_1-\Gamma_2)\subset\Omega$ (ver Fig. 11), entonces

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z=\oint_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

C2) Si Ω es simplemente conexo

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z=0,\quad \text{para todo ciclo en } \Omega.$$

Además existe $g=g(z)$ analítica en Ω tal que $f=g'$ en Ω.

Demostración:

Para probar C2), recordar que como vimos anteriormente si $f:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es continua, entonces

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z=0,\quad \forall\,\Gamma\,\text{ciclo en }\Omega\iff \text{Existe } g \text{ analítica tal que f=g' en } \Omega$$

□

3. LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY (FIC)

Teorema 1. *Sea* $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *analítica en* Ω *y* γ *un arco cerrado simple orientado + en* Ω *tal que* $\mathrm{Int}\,\gamma \subset \Omega$ *(ver Fig. 11). Entonces*

$$f(a) = \frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z, \quad \forall\, a \in \mathrm{Int}\,\gamma.$$

Demostración: Dado $a \in \mathrm{Int}\,\gamma$, consideremos la función

$$g(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z-a}, \quad z \in \Omega' \equiv \Omega \setminus \{a\}.$$

que es analítica en Ω'. Consideremos una circunferencia $c(a,r)$ tal que $c(a,r) \subset \mathrm{Int}\,\gamma$ y denotemos

$$\Gamma \equiv \gamma - c(a,r).$$

Es claro que $\mathrm{Int}\,\Gamma \subset \Omega'$, luego por el TC

$$\oint_{\Gamma} g(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma} g(z)\,\mathrm{d}z - \oint_{c(a,r)} g(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{1}$$

Ahora bién al ser $g(z)$ y, por tanto, $|g(z)|$ continuas sobre $c(a,r)$, existe algún $z_r \in c(a,r)$ tal que $|g(z_r| = Max_{c(a,r)}|g(z)|$. Por tanto

$$\left| \oint_{c(a,r)} g(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \oint_{c(a,r)} |g(z)|\,|\mathrm{d}z| \leq |g(z_r)|\,l(c(a,r)) = 2\pi\,|g(z_r)|\,r = 2\pi|g(z_r)(z_r - a)| = 2\pi|f(z_r) - f(a)|.$$

Luego, al ser f continua en a, cuando $r \to 0$, $z_r \to a$ y $f(z_r) \to f(a)$. Por tanto

$$\oint_{c(a,r)} g(z)\,\mathrm{d}z \to 0, \quad r \to 0.$$

Entonces (1) implica

$$\oint_{\gamma} g(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z - \oint_{\gamma} \frac{f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 0,$$

Luego

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = f(a) \oint_{\gamma} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\,\pi\,i.$$

□

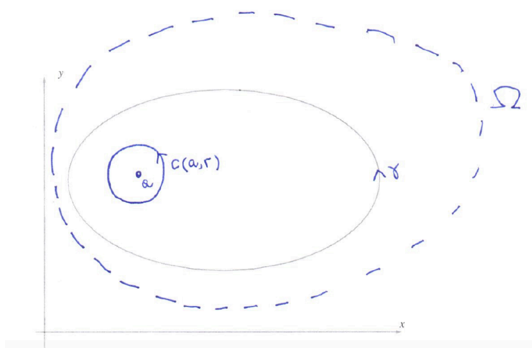


Figura 11: FIC.

INTERPRETACIÓN

La ffórmula integral de Cauchy (FIC) debe entenderse como la expresión de la solución de las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - i\,\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Estas soluciones son las funciones analíticas. Si escribimos la FIC en la forma

$$f(z) = \frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u, \quad \forall\, z \in \operatorname{Int}\gamma, \tag{2}$$

nos proporciona la forma de $f(z)$ en el interior de γ conociendo su forma $f|_\gamma = f(u)$ sobre γ: Es la solución de las ecuaciones de Cauchy-Riemann con la condición de contorno $f|_\gamma = f(u)$.

CONSECUENCIAS

A partir de la FIC en la forma (2), si derivamos respecto de z la integral, se puede demostrar que puede hacerse derivando primero el integrando, teniendo en cuenta que

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\frac{1}{u-z} = \frac{k!}{(u-z)^{k+1}},$$

se deduce

Teorema 2. *Si $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en Ω , entonces admite todas las derivadas superiores f'', f''', … respecto de z en Ω. Además si γ un arco cerrado simple orientado + en Ω tal que* $\operatorname{Int}\gamma \subset \Omega$, *entonces*

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\,\pi\,i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,\mathrm{d}z, \quad \forall\, a \in \operatorname{Int}\gamma, k = 1\,,2\,\ldots.$$

Ejercicio 1. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en Ω y $c(a,r)$ una circunferencia en Ω tal que* $\operatorname{Int} c(a,r) \subset \Omega$. *Probar las denominadas* desigualdades de Cauchy

$$\left|f^{(k)}(a)\right| \leq \frac{k!}{r^k}\,M, \quad M \equiv Max_{c(a,r)}|f(z)|, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Ejercicio 2. *Probar que si $f(z)$ es analítica en todo el plano $\mathbb{C}$ y está acotada (existe M tal que $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \mathbb{C}$, entonces*

$$f(z) \equiv Constante.$$

TEMA 3: DESARROLLOS EN SERIE

1. SERIES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Sucesiones y series

Recordatorio de límites $\lim_{n\to\infty} z_n$ de sucesiones

Una sucesión $(z_n = x_n + i\, y_n)_{n=1}^{\infty}$ de números complejos es una sucesión de puntos del plano. La definición de límite es la conocida

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \iff \lim_{n\to\infty} |z_n - a| = 0,$$

que es a su vez equivalente a (siendo $a = a_1 + i\, a_2$)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a_1, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = a_2.$$

Una sucesión se denomina **convergente** si tiene límite, en caso contrario diremos que es divergente. Una sucesión es convergente si y solo si verifica la condición **de Cauchy**

$$\forall \epsilon > 0\, \exists n_0 = n_0(\epsilon)\,|\, n, m > n_0 \Longrightarrow |z_n - z_m| < \epsilon.$$

Todas las propiedades del límite de sucesiones de puntos del plano se aplican. Además

$$\lim_{n\to\infty} (z_n\, z'_n) = (\lim_{n\to\infty} z_n)\,(\lim_{n\to\infty} z'_n),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{z'_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} z_n}{\lim_{n\to\infty} z'_n},$$

cuando el límite del denominador sea distinto de cero.

Ejemplo 1. *La sucesión*

$$z_n = e^{i/n} = \cos(1/n) + i\,\mathrm{sen}(1/n),$$

es convergente con límite

$$\lim_{n\to\infty} e^{i/n} = \cos(0) + i\,\mathrm{sen}(0) = 1.$$

Series $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$

Definición 1. *El símbolo de serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots$$

denota el límite

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

donde $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *es la* **sucesión de sumas parciales**

$$s_n \equiv z_1 + z_2 + \cdots + z_n.$$

Cuando exista este límite diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *es* **convergente** *y en caso contrario que la serie es* **divergente** *.*

Propiedades

P1) Condición necesaria de convergencia: $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ convergente $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

P2) Convergencia absoluta: $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ convergente ($\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ convergente).

P3 Criterio del cociente: Sea $c \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}$

$$\begin{cases} 0 \leq c < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ converge absolutamente} \\ \\ c > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ divergente} \end{cases}$$

P4 Criterio de la raíz: Sea $r \equiv \lim_{n\to\infty} |z_n|^{1/n}$

$$\begin{cases} 0 \leq r < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ converge absolutamente} \\ \\ r > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ divergente} \end{cases}$$

Demostración: P1) Usar $z_n = s_n - s_{n-1}$. P2) Usar el Criterio de Cauchy y la desigualdad

$$|z_m + z_{m+1} + \cdots z_n| \leq |z_m| + |z_{m+1}| + \cdots |z_n|.$$

P3) y P4) se deducen de P2) y de los criterios del cociente y de la raiz para la convergencia de las series de términos reales positivos. □

Ejemplo 2. *Un tipo de series muy importante en este curso es* **la serie geométrica de razón compleja** $u \in \mathbb{C}$ *y término inicial* $a \neq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\, u^n = a + a\, u + a\, u^2 + \cdots .$$

Podemos calcular la suma parcial $s_n = a + a\, u + a\, u^2 + \cdots + a\, u^n$ *teniendo en cuenta que*

$$s_n\, u = a\, u + a\, u^2 + \cdots + a\, u^{n+1} \Longrightarrow s_n - s_n\, u = a - a\, u^{n+1} \Longrightarrow s_n = \frac{a - a\, u^{n+1}}{1-u},\ (u \neq 1).$$

Si $|u| \geq 1$ *es obvio que el término general* $au^n \not\to 0$ *luego la serie diverge. Si* $|u| < 1$ *es claro que* $s_n \to a/(1-u)$. *En resumén:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\, u^n = a + a\, u + a\, u^2 + \cdots = \begin{cases} \dfrac{a}{1-u}, & \textit{si } |u| < 1 \\ \textit{Divergente si } |u| \geq 1 \end{cases}$$

La suma de una serie geométrica convergente es el primer término dividido por uno menos la razón.

Ejemplo 3. *Las series* **telescópicas** *son de la forma:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n) = (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots .$$

Es evidente que

$$s_n = u_{n+1} - u_1.$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n) = \left(\lim_{n\to\infty} u_n \right) - u_1.$$

Ejemplo 4. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\,n},$$

es divergente ya que es geométrica de razón e^i *con*

$$\left| e^i \right| = 1.$$

Ejemplo 5. *Apliquemos el criterio del cociente a la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\,n}}{n!}, \quad \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \frac{|\exp i(n+1)|}{|\exp(i\,n)|} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \to 0, \quad c = 0.$$

Por tanto es convergente absolutamente.

Ejemplo 6. *Apliquemos el criterio de la raiz a la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n}, \quad |z_n|^{1/n} = \frac{|1+i|}{n^{1/n}} \to \sqrt{2}, \quad r = \sqrt{2} > 1.$$

Por tanto es divergente.

2. SERIES DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Series $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ de funciones

Convergencia puntual y uniforme

Definición 2. *Sea una sucesión de funciones $f_n : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ definidas sobre una misma región Ω del plano $\mathbb{C}$. Se dice que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$:*

1. **Converge puntualmente** *en un subconjunto C de Ω si existe una función $S = S(z)$, tal que para cada $z_0 \in C$ la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ converge al valor $S(z_0)$. Es decir, dado $z_0 \in C$*

   $\forall \epsilon > 0$ *existe un entero positivo N,* **que dependerá de** *z_0, tal que si $n > N$ se verifica que*

$$\left| S(z_0) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z_0) \right| < \epsilon.$$

   En otras palabras

$$\lim_{n\to\infty} \left| S(z_0) - s_n(z_0) \right| = 0, \quad \forall z_0 \in C,$$

   donde denotamos

$$s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z),$$

   a las sumas parciales de la serie de funciones. En ese caso se dice que la función $S = S(z)$ es la función suma de la serie y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = S(z)$.

2. **Converge uniformemente** *en un subconjunto C de Ω si existe una función $S = S(z)$, tal que*

   $\forall \epsilon > 0$ *existe un entero positivo N tal que si $n > N$ entonces*

$$\left| S(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \right| < \epsilon, \quad \forall z \in C.$$

   En otras palabras

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Sup}_{z\in C} \left| S(z) - s_n(z) \right| = 0,$$

   Es claro que si la serie converge uniformemente en un conjunto C, entonces también lo hace en todo subconjunto $C_0 \subset C$.

Ejemplo 7. *La serie de funciones con términos $f_n(z) = z^n$ definidos sobre todo $\mathbb{C}$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

es una serie geométrica para cada valor z de razón igual a z. Por tanto converge puntualmente en el conjunto

$$D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\},$$

a la función suma

$$S(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Además la serie diverge fuera de D.

Para examinar la convergencia uniforme, tomamos las sumas parciales

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z},$$

Se tiene que

$$\Big|S(z) - s_n(z)\Big| = \Big|\frac{z^{n+1}}{1-z}\Big| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|}.$$

Consideremos esta expresión en un disco cerrado

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq r\},$$

con $r < 1$. Para $z \in C_r$ se cumple $|1-z| \geq 1-r$ y $|z|^{n+1} \leq r^{n+1}$, con lo cual

$$\Big|S(z) - s_n(z)\Big| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

Con lo cual

$$\mathrm{Sup}_{z\in C_r}|S(z) - s_n(z)\Big| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r},$$

Como $r^{n+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Sup}_{z\in C_r}|S(z) - s_n(z)\Big| = 0,$$

luego la serie converge uniformemente en C_r.

Propiedades

P1) Convergencia uniforme en $C \Longrightarrow$ Convergencia puntual en C.

P2) La función suma de una serie de funciones continuas que converge uniformemente en C es también continua en C.

P3) Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ de funciones continuas que converge uniformemente en C, si Γ es una cadena contenida en C entonces

$$\int_\Gamma \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

P4) Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ de funciones analíticas en una región Ω, si la serie converge uniformemente en cada disco cerrado C contenido en Ω entonces

1. La función suma de la serie es también analítica en Ω.
2. La serie de derivadas $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ converge uniformemente en cada disco cerrado C contenido en Ω y

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z).$$

Esta propiedad es básica para construir funciones analíticas mediante series.

El criterio de los Mayorantes de Weierstrass

Un método fundamental para determinar donde converge uniformemente una serie de funciones está basado en el siguiente resultado

Teorema 1. *Si existen* mayorantes M_n *de los términos de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *sobre un conjunto* C

$$\Big|f_n(z)\Big| \leq M_n, \quad \forall z \in C,$$

y se cumple que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *de los mayorantes es convergente, entonces la serie de funciones* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *converge uniformemente en* C.

Ejemplo 8. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\,z},$$

converge uniformemente en el conjunto

$$C = \{z \in \mathbb{C} \,|\, x = \operatorname{Re} z \geq x_0\}, \quad x_0 > 0.$$

Esto es consecuencia de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *de mayorantes en* C

$$\Big|e^{-nz}\Big| = e^{-nx} \leq e^{-nx_0} = M_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n = \frac{e^{-x_0}}{1-e^{-x_0}}.$$

Ejemplo 9. *La función zeta de Riemann se define como la suma de la serie*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z},$$

cuyos términos $1/n^z = e^{-z \log n}$ *son funciones analíticas en todo* $\mathbb{C}$. *Dado que*

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \left| e^{-z \ln n} \right| = e^{-x \ln n} = \frac{1}{n^x},$$

y que para $x > 1$ *la serie* armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

es convergente, es claro que para todo disco cerrado C *contenido en el semiplano* $\Omega = \{z \,|\, x > 1\}$ *existe* $x_0 > 1$ *tal que*

$$x > x_0, \quad \forall z \in C,$$

así que

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| \leq \frac{1}{n^{x_0}} \equiv M_n, \quad \forall z \in C,$$

y al ser convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *de los mayorantes, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ *es uniformemente convergente en* C.

En consecuencia la función zeta de Riemann $\zeta(z)$ *es una función analítica en el semiplano*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,|\, x > 1\}.$$

3. SERIES DE TAYLOR

Definición 3. *Una* **serie de Taylor** *centrada en un punto* $a \in \mathbb{C}$ *es una serie de potencias con exponente positivo de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = a_0 + a_1 (z-a) + a_2 (z-a)^2 + \cdots .$$

Teorema 2. Teorema de Abel: *Dada una serie de Taylor* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ *centrada en un punto* $a \in \mathbb{C}$, *entonces existe un* $R \geq 0$ (**radio de convergencia de la serie**) *tal que*

1. *La serie converge en el interior del disco abierto* (**disco de convergencia**)

$$D(a, R) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-a| < R\},$$

y diverge fuera (para $|z-a| > R$*)*

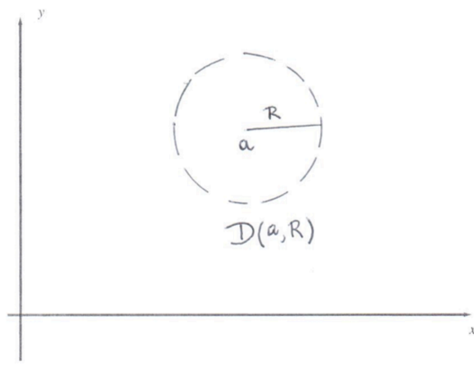


Figura 1: Disco de convergencia.

2. La serie converge uniformemente en todo disco cerrado contenido en $D(a,R)$

Demostración: Haremos la demostración suponiendo que existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \equiv l$$

1). Si aplicamos el criterio del cociente:

$$\text{Serie absolutamente convergente (Divergente) si } \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}\,(z-a)^{n+1}|}{|a_n\,(z-a)^n|} < 1 (> 1)$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}\,(z-a)^{n+1}|}{|a_n\,(z-a)^n|} = l\,|z-a|,$$

Así que el disco de convergencia es $D(a,R)$ con $R = 1/l$. Es decir

$$R = 1\Big/ \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

De igual forma se demuestra que

$$R = 1\Big/ \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n},$$

si existe el límite del denominador.
2) Veamos que la serie converge uniformemente en cualquier disco cerrado

$$C_r = \{z \in C \,|\, |z-a| \leq r\} \text{ con } r < R,$$

y por tanto lo hará también en todo disco cerrado contenido en $D(a,R)$.

Sea r_0 intermedio $r < r_0 < R$, entonces si $z \in C_r$

$$|a_n (z-a)^n| = |a_n| r_0^n \frac{|z-z_0|^n}{r_0^n} \leq |a_n| r_0^n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n. \tag{1}$$

Además como $r_0 < R$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_0^n$ es convergente pues aplicando el criterio del cociente a esta serie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}| r_0^{n+1}}{|a_n| r_0^n} = \frac{r_0}{R} < 1.$$

Como consecuencia el término general $|a_n| r_0^n$, que debe tender a cero, está acotado. Es decir existe $M > 0$ tal que

$$|a_n| r_0^n \leq M, \, \forall n.$$

Volviendo entonces a (1)

$$|a_n (z-a)^n| \leq |a_n| r_0^n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \equiv M_n, \, \forall z \in C_r.$$

Pero al ser $r/r_0 < 1$, la serie de mayorantes $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ es convergente (es una serie geométrica de razón r/r_0) . De donde se deduce el enunciado. □

Consecuencias

Usando la propiedad P4) de la convergencia uniforme de funciones analíticas y el teorema de Abel, se obtiene que dada una serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ con disco de convergencia $D(a, R)$, entonces

1. La función suma de la serie es analítica en el disco de convergencia $D(a, R)$.

2. Las series de derivadas de cualquier orden convergen uniformemente en cada disco cerrado de $D(a, R)$ y las derivadas de la suma de la serie verifican

$$\begin{aligned} S^{(k)}(z) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n\Big)^{(k)} &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n (z-a)^{n-k} \\ &= k!\, a_k + (k+1)!\, a_{k+1} (z-a) + \cdots . \end{aligned}$$

En particular se deduce que los coeficientes de la serie satisfacen la relación de Taylor

$$a_k = \frac{1}{k|} S^{(k)}(a), \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Desarrollos en serie de Taylor de funciones analíticas

Como vimos en el Cápitulo 2:

Si $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en Ω , entonces admite todas las derivadas superiores f'', f''', ... respecto de z en Ω. Además si γ un arco cerrado simple orientado $+$ en Ω tal que $\mathrm{Int}\,\gamma \subset \Omega$, entonces

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\,\pi\,i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,\mathrm{d}z, \quad \forall\, a \in \mathrm{Int}\,\gamma, k = 1\,, 2\,\ldots.$$

Probaremos ahora que :

Teorema 3. Teorema de Taylor. *Si $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica en Ω y $a \in \Omega$, entonces f admite un desarrollo de Taylor centrado en a dado por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-a)^n, \quad a_n \equiv \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

cuyo disco de convergencia es el mayor disco abierto $D(a, R)$ contenido en Ω (ver Fig.2)

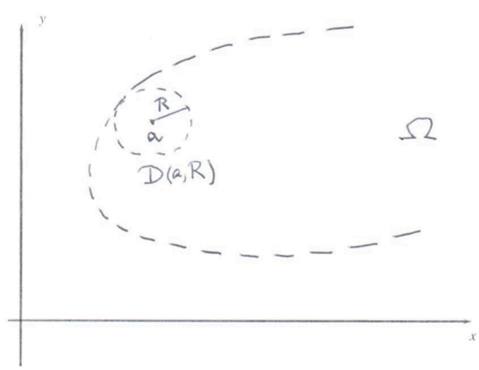


Figura 2: Disco de convergencia de la series de Taylor.

Demostración: Sea $z \in D(a, R)$ y consideremos una circunferencia $c(a, r)$ con radio $r < R$ tal que (ver Fig. 3)

$$z \in \mathrm{Int}\, c(a, r).$$

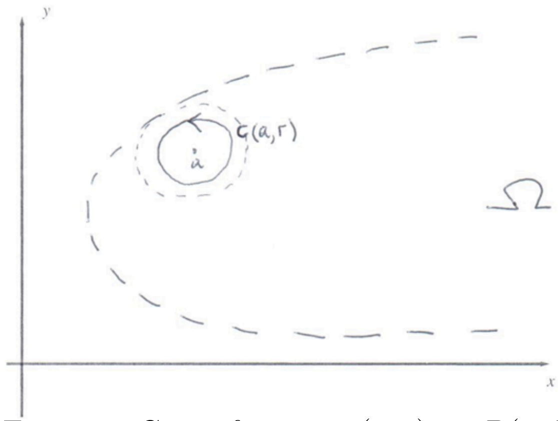


Figura 3: Circunferencia $c(a,r)$ en $D(a,R)$.

Por la FIC

$$f(z) = \frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_{c(a,r)} \frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u.$$

Tomemos ahora el factor $1/(u-z)$ del integrando como la suma de la serie geométrica

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-a-(z-a)} = \frac{1/(u-a)}{1-\frac{z-a}{u-a}} = \frac{1}{u-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(u-a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}.$$

Como $u \in c(a,r)$ y $z \in \operatorname{Int} c(a,r)$, la razón de esta serie satisface

$$\left|\frac{z-a}{u-a}\right| = \frac{|z-a|}{|u-a|} < 1.$$

Luego, como serie de funciones dependientes de u, la serie converge y además uniformemente sobre $c(a,r)$ dado que tenemos mayorantes

$$\left|\frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}\right| \le M_n \equiv \frac{r^n}{R^{n+1}}, \quad u \in c(a,r); \quad \sum_{n\ge 0} M_n < \infty.$$

Por tanto

$$f(z) = \frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_{c(a,r)}\frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_{c(a,r)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}\,f(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_{c(a,r)}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}u\Big)(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

Donde hemos aplicado las FIC para las derivadas $\square$

Series de Taylor de funciones básicas

Calculando directamente las derivadas sucesivas correspondientes y mirando los dominios de analiticidad, se encuentran inmediatamente los siguientes desarrollos de Taylor y sus radios de convergencia.

1. La serie geométrica:
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad R = 1.$$
2. La exponencial:
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad R = +\infty.$$
3. Funciones trigonométricas:
$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\, z^{2n-1}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n}; \quad R = +\infty.$$
4. El logaritmo:
$$\log_p(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, z^n, \quad R = 1.$$
5. Potencias no enteras
$$\Big((1+z)^\alpha\Big)_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, z^n, \quad R = 1.$$

Ejemplo 10. *Los primeros términos de* $(\sqrt{1+z})_p$ *son:*
$$(\sqrt{1+z})_p = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^3}{8} + \cdots$$

Cálculo de series de Taylor

Para determinar series de Taylor de funciones elementales construidas a partir de las funciones básicas, sin tener que calcular los coeficientes derivando, debemos usar algunas estrategias como las siguientes:

1. Para cocientes de funciones analíticas en un punto a
$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad h(a) \neq 0.$$
   Si conocemos los desarrollos del nńumerador y del denominador
$$g(z) = a_0 + a_1\,(z-a) + a_2\,(z-a)^2 + \cdots\,, \quad h(z) = b_0 + b_1\,(z-a) + b_2\,(z-a)^2 + \cdots\,,$$

Para calcular el de $f(z)$

$$f(z) = c_0 + c_1\,(z-a) + c_2\,(z-a)^2 + \cdots\,,$$

se identifican coeficientes en la ecuación

$$a_0 + a_1\,(z-a) + a_2\,(z-a)^2 + \cdots = \Big(b_0 + b_1\,(z-a) + b_2\,(z-a)^2 + \cdots\Big)\Big(c_0 + c_1\,(z-a) + c_2\,(z-a)^2 + \cdots\Big),$$

obteniendo ecuaciones para los coeficientes desconocidos c_0, $c_1, \ldots$

$$a_0 = b_0\,c_0, \quad a_1 = b_0\,c_1 + b_1\,c_0, \quad \ldots.$$

2. Para una composición de funciones analíticas

$$f(z) = g(h(z)),$$

tales que $h(z)$ es analítica en $z = a$ y $g(w)$ en $b = h(a)$

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-a)^n, \quad g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(w-b)^n, \quad b = h(a) = a_0.$$

Se sustituye en $g(w)$ la variable w por el desarrollo de $h(z)$ y se agrupan términos en potencias de $(z-a)$

$$\begin{aligned} f(z) &= b_0 + b_1\Big(a_1\,(z-a) + a_2\,(z-a)^2 + \cdots\Big) + b_2\Big(a_1\,(z-a) + a_2\,(z-a)^2 + \cdots\Big)^2 + \cdots \\ &= b_0 + b_1\,a_1\,(z-a) + (b_1\,a_2 + b_2\,a_1^2)\,(z-a)^2 + \cdots \end{aligned}$$

Ceros de funciones analíticas

Si $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica en Ω y se anula $f(a) = 0$ en un punto $a \in \Omega$, entonces si consideramos su serie de Taylor en a
pueden ocurrir dos casos

1. Todas las derivadas en a se anulan y por tanto la serie de Taylor tiene por suma la función cero. En ese caso la función es idénteramente cero en Ω

2. Existe alguna derivada de orden mínimo dado m tal que $f^{(m)}(a)$ en a, que no es cero, siendo cero todas las anteriores

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0, \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Entonces se dice que a es un **cero de orden** m de $f(z)$. La serie de Taylor en ese caso es

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n\,(z-a)^n = (z-a)^m\,g(z), \quad g(z) \equiv \sum_{n=m}^{\infty} a_n\,(z-a)^{n-m}, \quad a_n \equiv \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

La función $g(z)$ es analítica en el disco de convergencia de la serie, luego es continua allí. Por tanto, como $g(a) = a_m = f^{(m)}(a)/k! \neq 0$, la función $g(z)$ no se anulara en algún disco suficientemente pequeño alrededor de a. Así a es un cero aislado. Es decir

$\boxed{\textbf{Los ceros de funciones analíticas son puntos aislados}.}$

La regla de l'Hôpital

Sean dos funciones analí $f = f(z)$ y $g = g(z)$ en un abierto conexo Ω y $a \in \Omega$ un cero de ambas $f(a) = g(a) = 0$, de orden p para f y orden q para g. Dado que

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n \, (z-a)^n = a_p \, (z-a)^p + \cdots \, , \quad a_n \equiv \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

$$g(z) = \sum_{n=q}^{\infty} b_n \, (z-a)^n = b_q \, (z-a)^q + \cdots \, , \quad b_n \equiv \frac{g^{(n)}(a)}{n!},$$

Se obtiene que el límite indeterminado

$$l = \lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)},$$

viene dado por

$$l = \begin{cases} 0, & \text{si } p > q \\ \frac{a_p}{b_q}, & \text{si } p = q \\ \infty, & \text{si } p < q \end{cases}$$

4. SERIES DE LAURENT

Definición 4. *Una* **serie de Laurent** *centrada en un punto $a \in \mathbb{C}$ es una serie de potencias con exponente positivo ó/y negativo de de la forma*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-a)^n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-a)^n.$$

Es decir es una suma de dos series, una con potencias de exponente negativo y otra con potencias de exponente positivo. La serie de Laurent se dice convergente en un punto cuando lo son simultaneamente las dos series.

Teorema 4. *Dada una serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-a)^n$ centrada en un punto $a \in \mathbb{C}$, entonces existe una corona abierta centrada en a (***corona de convergencia de la serie***) (ver Fig.)*

$$C(a; R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, R_1 < |z-a| < R_2\},$$

tal que

1. *La serie converge en el interior de la corona y diverge fuera (para $|z-a| < R_1$ ó $|z-a| > R_2$)*
2. *La serie converge uniformemente en todo disco cerrado*

$$D_c(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-z_0| \leq r\} \text{ contenido en } C(a; R_1, R_2).$$

Desarrollos en serie de Laurent de funciones analíticas

Probaremos que :

Teorema 5. Teorema de Laurent.*Si $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica en Ω y $C(a; R_1, R_2)$ es una corona abierta contenida en Ω, entonces f admite un desarrollo de Laurent convergente en dicha corona, de la forma*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-a)^n,$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_{c(a,r)} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}u, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

siendo el radio r de la circunferencia $c(a,r)$ tal que $R_1 < r < R_2$ (ver Fig. 4).

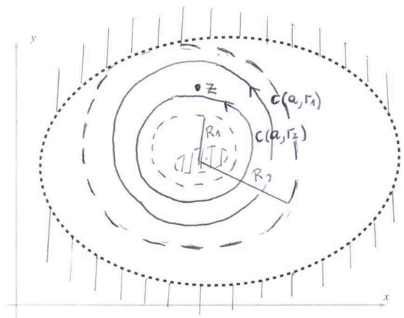


Figura 4: Circunferencias $c(a, r_i)$.

Demostración: Sea $z \in C(a; R_1, R_2)$ y consideremos dos circunferencias $c(a, r_i)$ $(i = 1, 2)$ como se indica en Fig. . Definamos la cadena

$$\Gamma \equiv c(a, r_1) - c(a, r_2).$$

Es claro que

$$z \in \operatorname{Int}\Gamma \subset \Omega.$$

Dado que $\mathfrak{n}(\Gamma, z) = 1$, por la FIC

$$f(z) = \frac{1}{2\,\pi\, i} \oint_{\Gamma} \frac{f(u)}{u - z}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{2\,\pi\, i} \oint_{c(a,r_1)} \frac{f(u)}{u - z}\, \mathrm{d}u - \frac{1}{2\,\pi\, i} \oint_{c(a,r_2)} \frac{f(u)}{u - z}\, \mathrm{d}u. \tag{2}$$

Tomemos ahora el factor $1/(u - z)$ del integrando como la suma de una serie geométrica. Podemos escribirlo de dos formas diferentes:

1. Si $u \in c(a, r_1)$

   $$\Big|\frac{z - a}{u - a}\Big| = \frac{|z - a|}{|u - a|} < 1$$

   Luego podemos desarrollar según la serie

   $$\frac{1}{u - z} = \frac{1}{u - a - (z - a)} = \frac{1/(u - a)}{1 - \frac{z-a}{u-a}} = \frac{1}{u - a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(u - a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(u - a)^{n+1}}.$$

   Como consecuencia

   $$\frac{1}{2\,\pi\, i} \oint_{c(a,r_1)} \frac{f(u)}{u - z}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{2\,\pi\, i} \oint_{c(a,r_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(u - a)^{n+1}}\, f(u)\, \mathrm{d}u$$

   $$= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2\,\pi\, i} \oint_{c(a,r_1)} \frac{f(u)}{(u - a)^{n+1}}\, \mathrm{d}u\Big)(z - a)^n.$$

2. Si $u \in c(a, r_2)$
$$\Big|\frac{u-a}{z-a}\Big| = \frac{|u-a|}{|z-a|} < 1.$$
Podemos así desarrollar
$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-a-(z-a)} = -\frac{1/(z-a)}{1-\frac{u-a}{z-a}} = -\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(u-a)^n}{(z-a)^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(u-a)^n}{(z-a)^{n+1}}.$$
por tanto
$$-\frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_{c(a,r_2)}\frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_{c(a,r_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(u-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\,f(u)\,\mathrm{d}u$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_{c(a,r_2)} f(u)\,(u-a)^n\,\mathrm{d}u\Big)\frac{1}{(z-a)^{n+1}}.$$

LLevando ambos desarrollos de las integrales a (2) y teniendo en cuenta que ambas integrales no varían al cambiar las circunferencias $c(a, r_i)$ por una circunferencia $c(a, r)$ tal que $R_1 < r < R_2$, se sigue el resultado

Como $u \in c(a, r)$ y $z \in \operatorname{Int} c(a, r)$, la razón de esta serie satisface
$$\Big|\frac{z-a}{u-a}\Big| = \frac{|z-a|}{|u-a|} < 1.$$
Luego la serie converge y además uniformemente sobre $c(a, r)$ como serie de funciones dependientes de u, dado que tenemos mayorantes
$$\Big|\frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}\Big| \leq M_n \equiv \frac{r^n}{R^{n+1}}, \quad u \in c(a, r); \quad \sum_{n\geq 0} M_n < \infty.$$
□

Ejemplo 11. *Una función puede ser analítica en varias coronas centradas en un mismo punto a, y así poseer varios desarrollos de Laurent en ese punto. Por ejemplo*
$$f(z) = \frac{1}{z-b}, \quad b \neq a,$$
es analítica en las dos coronas
$$C(a; 0, |b-a|), \quad C(a; |b-a|, \infty).$$
Podemos desarrollar en la forma
$$f(z) = \frac{1}{z-b} = \frac{1}{z-a+a-b} = \frac{1/(a-b)}{1-\frac{z-a}{b-a}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}, \quad z \in C(a; 0, |b-a|),$$
o bién
$$f(z) = \frac{1}{z-b} = \frac{1}{z-a+a-b} = \frac{1/(z-a)}{1-\frac{b-a}{z-a}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b-a)^n}{(z-a)^{n+1}}, \quad z \in C(a; |b-a|, \infty).$$

Ejemplo 12. *Como las series de Laurent son series de funciones analíticas que convergen uniformemente en cada disco cerrado de sus coronas de convergencia, pueden derivarse término a término. De esta forma a partir del ejemplo anterior deducimos nuevos desarrollos de Laurent*

$$\frac{1}{(z-b)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(z-a)^{n-1}}{(b-a)^{n+1}}, \quad \frac{1}{(z-b)^3} = -\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \frac{(z-a)^{n-2}}{(b-a)^{n+1}}, \ldots \quad z \in C(a; 0, |b-a|),$$

o bién

$$\frac{1}{(z-b)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{(b-a)^n}{(z-a)^{n+2}}, \quad \frac{1}{(z-b)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \frac{(b-a)^n}{(z-a)^{n+3}}, \ldots \quad z \in C(a; |b-a|, \infty).$$

5. SINGULARIDADES AISLADAS Y RESIDUOS

Definición 5. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica en Ω y $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f tal que existe una corona*

$$C(a; 0, R) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z-a| < R\} \subset \Omega.$$

entonces f admite un desarrollo de Laurent convergente en dicha corona, de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \, (z-a)^n,$$

Se denomina **residuo de f en la singularidad** *a al coeficiente a_{-1} de ese desarrollo:*

$$a_{-1} \equiv \operatorname{Res}(f, a).$$

Definición 6. *Hay tres casos tipos distintos de singularidades aisladas:*

1. Singularidad evitable: *La serie de Laurent no tiene términos con potencias de exponente negativo ($a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$). Entonces $f(z)$ tiene un desarrollo en serie de Taylor en el disco abierto $D(a, R)$*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z-a)^n,$$

y por tanto define una función analítica en $D(a, R)$. En este caso

$$\operatorname{Res}(f, a) = 0.$$

2. Polo de orden $p \geq 1$: *La serie de Laurent no tiene términos con potencias de exponente más negativo que $-p$*

$$a_{-(p+1)} = a_{-(p+2)} = \cdots = 0, \quad a_{-p} \neq 0.$$

Entonces $f(z)$ tiene un desarrollo en serie de Laurent de la forma

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z-a)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z-a)^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-a)^n, \quad z \in C(a;0,R),$$

y por tanto $(z-a)^p\,f(z)$ define una función analítica en $D(a,R)$ con desarrollo de Taylor

$$(z-a)^p\,f(z) = a_{-p} + a_{-p+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}\,(z-a)^{p-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-a)^{n+p}, \quad z \in D(a,R).$$

Se deduce por tanto que si a es un polo de orden p de $f(z)$, entonces

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to a} \frac{\mathrm{d}^{p-1}}{\mathrm{d}z^{p-1}}\Big((z-a)^p\,f(z)\Big).$$

3. Singularidad esencial: *La serie de Laurent tiene infinitos términos con potencias de exponente negativo.*

Ejercicio 1. *Probar que dado un cociente de funciones analíticas*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}.$$

1. *Si a es un cero de $h(z)$ de orden $n \geq 0$ y $g(a) \neq 0$, entonces a es un polo de orden n de $f(z)$.*
2. *Si a es un cero de $h(z)$ de orden $n \geq 0$ y es también un cero de orden $m \geq 0$ de $g(z)$, entonces a es un polo de orden $n-m$ de $f(z)$. (singularidad evitable si $n=m$)*

Ejercicio 2. *Probar que dado un cociente de funciones analíticas*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}.$$

Si a es un cero simple de $h(z)$ y $g(a) \neq 0$, entonces

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

TEMA 4: INTEGRACIÓN POR RESIDUOS

1. EL TEOREMA DE LOS RESIDUOS

Una de las aplicaciones del análisis de funciones de variable compleja es un método de integración muy potente, que permite calcular varias clases de integrales definidas sobre intervalos finitos o infinitos de la recta real. Se basa en el siguiente resultado:

Teorema 1. Teorema de los residuos*: Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en Ω y sea γ un arco cerrado simple orientado positivamente contenido en Ω. Si f es analítica en* $\mathrm{Int}\gamma$ *salvo en un conjunto de singularidades aisladas $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ (ver fig.1), entonces*

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

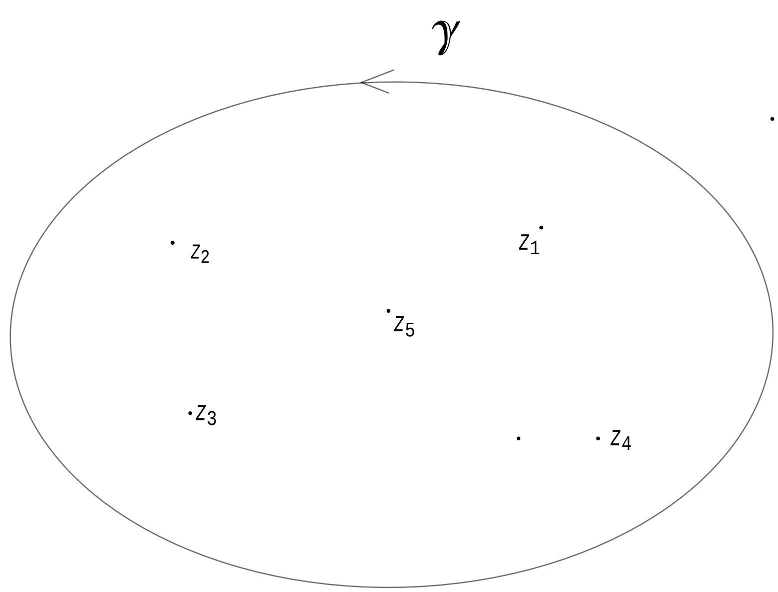


Figura 1: El arco γ.

Demostración: Tomemos una circunferencia orientada positivamente $c(z_k, r_k)$ centrada en cada singularidad aislada z_k como se indica en la figura (ver fig.2).

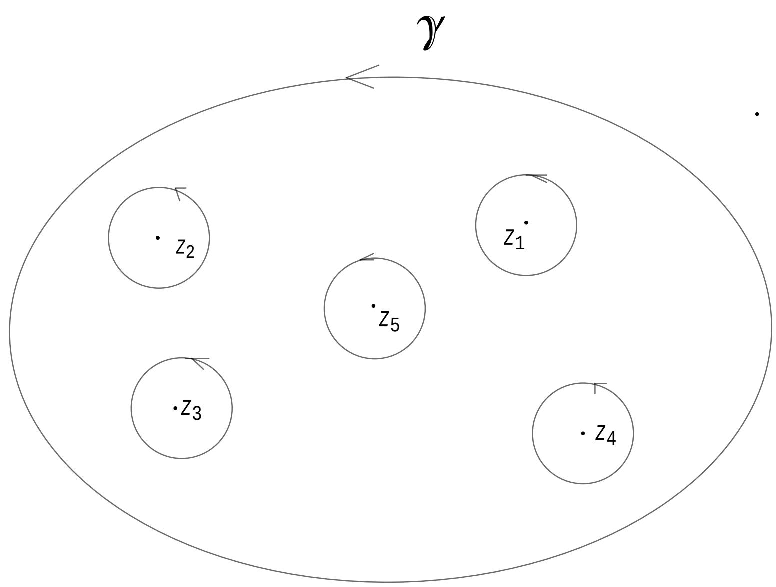


Figura 2: El γ y las circunferencias $c(z_k, r_k)$.

Denotemos

$$\Gamma = \gamma - \sum_{k=1}^{n} c(z_k, r_k).$$

Como f es analítica en IntΓ, por el teorema de Cauchy

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Pero

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{n} \oint_{c(z_k, r_k)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Por tanto

$$\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{c(z_k, r_k)} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{1}$$

Alrededor de casa singularidad z_k la función f admite un desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(k)}\,(z - z_k)^n,$$

válido en alguna corona $C(z_k, 0, R_k)$. Tomando cada circunferencia $c(z_k, r_k)$ contenida en la corona $C(z_k, 0, R_k)$ $(r_k < R_k)$. Entonces como la serie converge unifórmemente sobre $c(z_k, r_k)$, tenemos que

$$\oint_{c(z_k,r_k)} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(k)} \oint_{c(z_k,r_k)} (z - z_k)^n \mathrm{d}z.$$

Pero todas las integrales de las potencias se anulan salvo la correspondiente a $n = -1$ que vale $2\pi i$, por lo tanto

$$\oint_{c(z_k,r_k)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\, a_{-1}^{(k)} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k),$$

y usando ahora (1) se concluye el enunciado. □

Comentarios

1. En el enunciado del teorema se supone que γ un arco cerrado simple orientado positivamente. Obviamente en el caso de que estuviera orientado negativamente entonces el resultado es

$$\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

2. Recordemos que para calcular el residuo de $f(z)$ en un polo a de orden p se utiliza la fórmula

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to a} \frac{\mathrm{d}^{p-1}}{\mathrm{d}z^{p-1}} \Big((z-a)^p\, f(z) \Big).$$

Así para polos simples:

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z\to a} \Big((z-a)\, f(z) \Big),$$

y para polos dobles

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z\to a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \Big((z-a)^2\, f(z) \Big).$$

Es también útil recordar que dado un cociente de funciones analíticas

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

si a es un cero simple de $h(z)$ y $g(a) \neq 0$, entonces

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Ejemplo 1. *Apliquemos el teorema a las integrales siguientes:*

1.
$$\oint_{c(0,1)} e^{1/z}\,\mathrm{d}z,$$
La única singularidad del integrando en el interior de $c(0,1)$ *es* $z=1$*, luego*
$$\oint_{c(0,1)} e^{1/z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\mathrm{Res}\Big(e^{1/z},1\Big) = 2\pi i.$$

2.
$$\oint_{c(i,1)} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z,$$
La única singularidad del integrando en el interior de $c(i,1)$ *es* $z=i$*, luego*
$$\oint_{c(i,1)} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\mathrm{Res}\Big(\frac{1}{z^2+1},i\Big) = 2\pi i\frac{1}{2i} = \pi.$$

3.
$$\oint_{c(0,8)} \tan z\,\mathrm{d}z.$$
Las singularidades de $\tan z = \sin z/\cos z$ *son los ceros de* $\cos z$ *que vienen dados por*
$$z_k = (2k+1)\pi/2,\ k = 0, \pm 1, \ldots.$$
y determinan polos simples de $\tan z$*. Los residuos correspondientes son*
$$\mathrm{Res}(\tan z, z_k) = \frac{\sin z_k}{-\sin z_k} = -1.$$
En el interior de $c(0,8)$ *solo están seis de ellos:* $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$ *y* $\pm 5\pi/2$*. Por tanto*
$$\oint_{c(0,8)} \tan z\,\mathrm{d}z = -12\,\pi i.$$

2. CÁLCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

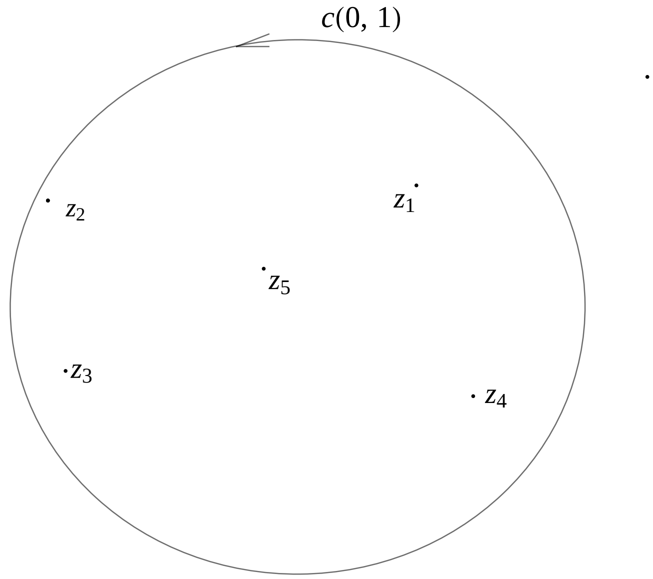


Figura 3: Arco de integración para integrales de tipo I.

Tipo I

Son las de la forma

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \mathrm{sen}\theta)\, \mathrm{d}\theta,$$

donde el integrando $R(\cos\theta, \mathrm{sen}\theta)$ es una función racional de $\cos\theta$ y $\mathrm{sen}\theta$ que es regular sobre el intervalo de integración $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Considerando la circunferencia unidad $c(0, 1)$ parametrizada según

$$z(\theta) = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

podemos escribir

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\Big(z(\theta) + \frac{1}{z(\theta)}\Big), \quad \mathrm{sen}\theta = \frac{1}{2i}\Big(z(\theta) - \frac{1}{z(\theta)}\Big),$$

y la integral se convierte en

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \mathrm{sen}\theta)\, \mathrm{d}\theta = \oint_{c(0,1)} f(z)\, \mathrm{d}z, \tag{2}$$

donde

$$f(z) = R\Big(\frac{1}{2}\Big(z(\theta) + \frac{1}{z(\theta)}\Big), \frac{1}{2i}\Big(z(\theta) - \frac{1}{z(\theta)}\Big)\Big)\,\frac{1}{iz},$$

es una función racional en z y regular sobre $c(0,1)$. Aplicando el teorema de los residuos (ver fig.3) a (2)

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \mathrm{sen}\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i \sum_{|z_k|<1} \mathrm{Res}(f, z_k),$$

donde la suma se extiende a todas las singularidades z_k de $f(z)$ en el interior de $c(0,1)$.

Ejemplo 2. *Apliquemos el método a las integrales siguientes:*

1.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2 + \cos\theta}.$$

Se transforma en

$$I = \oint_{c(0,1)} \frac{\mathrm{d}z/iz}{2 + (z + z^{-1})/2} = -i \oint_{c(0,1)} \frac{2\mathrm{d}z}{z^2 + 4z + 1}.$$

El integrando tiene singularidades en las soluciones de $z^2 + 4z + 1 = 0$ *que son* $-2 \pm \sqrt{3}$ *y solo* $-2 + \sqrt{3}$ *está en el interior de* $c(0,1)$*. Así se obtiene*

$$I = 4\pi\,\mathrm{Res}\Big(\frac{1}{z^2 + 4z + 1}, -2 + \sqrt{3}\Big) = 4\pi\frac{1}{2(-2 + \sqrt{3}) + 4} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

2.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{5 - 3\,\mathrm{sen}\theta}.$$

Se transforma en

$$I = \oint_{c(0,1)} \frac{\mathrm{d}z/iz}{5 - 3(z - z^{-1})/2i} = -i \oint_{c(0,1)} \frac{2\mathrm{d}z}{-3z^2 + 10\,i\,z + 3}.$$

El integrando tiene singularidades en las soluciones de $-3z^2 + 10\,i\,z + 3 = 0$ *que son* $3i$ *y* $i/3$*. Solo* $i/3$ *está en el interior de* $c(0,1)$*. Así se obtiene*

$$I = 2\pi\,\mathrm{Res}\Big(\frac{2}{-3z^2 + 10\,i\,z + 3}, \frac{i}{3}\Big) = 2\pi i\,\frac{1}{4i} = \pi/2.$$

Tipo II

Son las de la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

donde el integrando $f = f(x)$ es tal que

1. La función f se extiende a una función $f = f(z)$ analítica en un semiplano $\mathrm{Im}z > -r$ (para algún $r > 0$ salvo en un conjunto finito de singularidades aisladas $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ situadas fuera del eje real $\mathrm{Im}z_k > 0$.

2. La función $f = f(z)$ verifica una acotación de la forma

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}, \quad p > 1, M > 0, \tag{3}$$

válida para $|z| > R_0$, con algún $R_0 > 0$.

Si consideramos la integral

$$I(R) = \oint_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

sobre el arco Γ_R indicado en la fig.4, podemos descomponer $I(R)$ en la forma

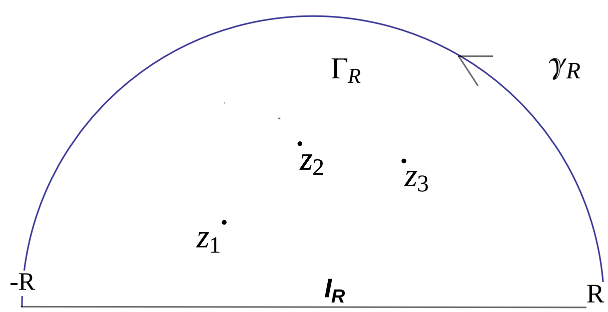


Figura 4: Descomposición del arco de integración para integrales de tipo II y de tipo III con $\omega > 0$.

$$I(R) = \int_{I_R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{4}$$

donde $I_R = [-R, R]$ y γ_R es el semicírculo superior de la figura 4.Ahora bién, aplicando el teorema de los residuos

$$I_R = 2\pi i \sum_{|z_k|<R} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

Por otro lado, tomando $R > R_0$ y usando la acotación (3) se deduce que

$$\Big| \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \Big| \leq (\mathrm{Max}_{|z|=R}|f(z)|)\,(2\pi\,R) \leq \frac{M}{R^p}\,R = M\,R^{1-p} \to 0, \quad R \to \infty.$$

Tomando el límite cuando $R \to \infty$ en (4) se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{z_k} \mathrm{Res}(f, z_k), \quad \mathrm{Im} z_k > 0, \tag{5}$$

Comentarios

- Supongamos que en lugar de la condición 1, la función f se extiende a una función $f = f(z)$ analítica en un semiplano $\mathrm{Im} z < r$ (para algún $r > 0$ salvo en un conjunto finito de singularidades aisladas $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ situadas fuera del eje real $\mathrm{Im} z_k < 0$. Debemos asumir también la condición 2, ahora en el semiplano inferior. Entonces sustituyendo γ_R por el semicírculo simétrico en el semiplano inferior, se obtendría

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{z_k} \mathrm{Res}(f, z_k), \quad \mathrm{Im} z_k < 0. \tag{6}$$

- La condición 2 se verifica de forma inmediata para funciones racionales

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{7}$$

  tales que

$$\text{grado de } Q(z) \geq \text{ grado de } P(z) + 2. \tag{8}$$

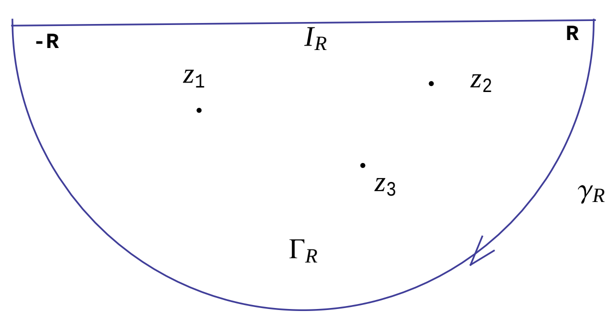


Figura 5: Descomposición del arco de integración para integrales de tipo II y de tipo III con $\omega < 0$.

Ejemplo 3. *Usemos el método para calcular las integrales siguientes:*

1.

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}.$$

En este caso

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2},$$

es una función racional con polos dobles en $\pm i$*. Además satisface la condición 2 (en la forma de* (8)*). Por tanto*

$$I=2\pi i\,\mathrm{Res}\Big(\frac{1}{(z^2+1)^2},i\Big).$$

El residuo se calcula en la forma

$$\mathrm{Res}\Big(\frac{1}{(z^2+1)^2},i\Big)=\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big((z-i)^2\,\frac{1}{(z^2+1)^2}\Big)=\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big(\frac{1}{(z+i)^2}\Big)=\frac{1}{4i}.$$

De forma que

$$I=\frac{\pi}{2}.$$

2.

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+13}.$$

El integrando se extiende a la función racional

$$f(z)=\frac{1}{z^2+4z+13},$$

que tiene polos simples en las soluciones de $z^2+4z+13=0$*, que son* $-2\pm 3i$*. Además satisface la condición 2 (en la forma de* (8)*). Por tanto*

$$I=2\pi i\,\mathrm{Res}\Big(\frac{1}{z^2+4z+13},-2+3i\Big).$$

El residuo es

$$\mathrm{Res}\Big(\frac{1}{z^2+4z+13},-2+3i\Big)=\lim_{z\to-2+3i}\Big((z+2-3i)\,\frac{1}{z^2+4z+13}\Big)=\lim_{z\to-2+3i}\frac{1}{z+2+3i}=\frac{1}{6i}.$$

De forma que

$$I=\frac{\pi}{3}.$$

Tipo III

Son las integrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\, x} f(x)\, \mathrm{d}x, \quad \omega \neq 0.$$

Hay dos casos a considerar dependiendo del signo de ω:

Caso 1: $\omega > 0$

El integrando $f = f(x)$ es tal que

1. La función f se extiende a una función $f = f(z)$ analítica en un semiplano $\mathrm{Im} z > -r$ (para algún $r > 0$ salvo en un conjunto finito de singularidades aisladas $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ situadas fuera del eje real $\mathrm{Im} z_k > 0$.

2. La función $f = f(z)$ verifica

$$\lim_{z\to\infty} |f(z)| = 0, \tag{9}$$

en el semiplano cerrado superior $\mathrm{Im} z \geq 0$.

Consideramos la integral siguiente

$$I_R(\omega) = \oint_{\Gamma_R} e^{i\omega\, z} f(z)\, \mathrm{d}z,$$

sobre el arco Γ_R indicado en la fig.4, podemos descomponer $I_R(\omega)$ en la forma

$$I_R(\omega) = \int_{-R}^{R} e^{i\omega\, x} f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\gamma_R} e^{i\omega\, z} f(z)\, \mathrm{d}z. \tag{10}$$

Por el teorema de los residuos

$$I_R(\omega) = 2\pi i \sum_{|z_k|<R} \mathrm{Res}(e^{i\omega\, z} f(z), z_k).$$

Por otro lado, puede demostrarse que de la condición (3) y dado que

$$\Big| e^{i\omega\, z} f(z) \Big| = e^{-\omega y} \Big| f(z) \Big|,$$

al ser $\omega > 0$ se deduce que

$$\Big| \int_{\gamma_R} e^{i\omega\, z} f(z)\, \mathrm{d}z \to 0, \quad R \to \infty.$$

Tomando el límite cuando $R \to \infty$ en (4) se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\, x} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{z_k} \mathrm{Res}(e^{i\omega\, z} f(z), z_k), \quad \mathrm{Im} z_k > 0, \tag{11}$$

Caso 2: $\omega < 0$

En lugar de la condición 1 debemos suponer que la función f se extiende a una función $f = f(z)$ analítica en un semiplano $\mathrm{Im} z < r$ (para algún $r > 0$ salvo en un conjunto finito de singularidades aisladas $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ situadas fuera del eje real $\mathrm{Im} z_k < 0$. Debemos asumir también la condición 2, ahora en el semiplano inferior. Entonces sustituyendo γ_R por el semicírculo simétrico en el semiplano inferior, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\, x} f(x)\,\mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{z_k} \mathrm{Res}(e^{i\omega\, z} f(z), z_k), \quad \mathrm{Im} z_k < 0. \tag{12}$$

La condición (9) se verifica de forma inmediata para funciones racionales

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{13}$$

tales que

$$\text{grado de } Q(z) \geq \text{ grado de } P(z) + 1. \tag{14}$$

Ejemplo 4. *Calculemos las integrales siguientes:*

1.

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2+1}. \tag{15}$$

En este caso

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1},$$

es una función racional con polos simples en $\pm i$. Además satisface la condición 2 (en la forma de (14)). Por tanto

$$I(\omega) = \begin{cases} 2\pi i \mathrm{Res}(e^{i\omega\, z} f(z), i), & \text{para } \omega > 0 \\ \\ -2\pi i \mathrm{Res}(e^{i\omega\, z} f(z), -i) & \text{para } \omega < 0 \end{cases}$$

Los residuos se calculan en la forma

$$\mathrm{Res}\Big(\frac{e^{i\omega\, z}}{z^2+1}, \pm i\Big) = \lim_{z\to\pm i} (z \mp i) \frac{e^{i\omega\, z}}{z^2+1}, \Big) = \lim_{z\to\pm i} \frac{e^{i\omega\, z}}{z \pm i}, \Big) = \frac{e^{\mp\omega}}{\pm 2i}.$$

De forma que

$$I(\omega) = \frac{\pi}{e^{|\omega|}}. \tag{16}$$

2.

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\omega x)}{x^2+1},\quad I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(\omega x)}{x^2+1}.$$

Como los integrandos en I_1 e I_2 son funciones que toman valores reales, es claro que

$$I_1=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega x}}{x^2+1},\quad I_2=\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega x}}{x^2+1}.$$

Luego de (16) *se obtiene*

$$I_1=\frac{\pi}{e^{|\omega|}},\quad I_2=0.$$

3.

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2\pi x)}{x-i}.$$

Escribamos la integral en la forma

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i2\pi x}+e^{-i2\pi x}}{x-i}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i2\pi x}}{x-i}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i2\pi x}}{x-i}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}2\pi i\operatorname{Res}\Big(\frac{e^{i2\pi z}}{z-i},i\Big)+0=i\pi e^{-2\pi}.\end{aligned}\tag{17}$$