Problemas de Matemáticas (2017/2018).
1. Preliminares.

1.1. Comprobar visualmente con diagramas de Venn las siguientes igualdades entre conjuntos:

a) $A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$ b) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

1.2. Sea $f:L\to L$ la función definida en el alfabeto latino L por $f=\{(a,b),(b,c),\dots,(y,z),(z,a)\}$ y sea $g:P\to L$ la que asigna a cada miembro de un grupo de personas la inicial de su primer apellido. ¿Es f inyectiva o suprayectiva?, ¿lo es g si $P=\{\text{habitantes de Madrid}\}$?, ¿y si es P mi grupo de Matemáticas? ¿Es g inyectiva para algún P? Hallar $f^{-1}\big(f^{-1}(z)\big)$ y $f\big(g(\text{lector})\big)$.

1.3. Sea $p\Rightarrow q$ la implicación: 'Si un cuadrilátero tiene las diagonales iguales entonces el cuadrilátero es un rectángulo'. Decidir si son ciertas $p\Rightarrow q$, $q\Rightarrow p$, $(\text{no } p)\Rightarrow(\text{no } q)$ y $(\text{no } q)\Rightarrow(\text{no } p)$.

1.4. Demostrar por inducción sobre n la fórmula: $\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

1.5. Hallar el mcd y el mcm de 1995 y 9009.

1.6. Escribir en la forma más simplificada posible:

a) $\frac{2772}{12474}$, b) $(-2^3)^2$, c) $2^{(-3)^2}$, d) $(-2)^{3^2}$, e) $(\frac{4}{9})^{3/2}$, f) $(\frac{9}{4})^{-3/2}$, g) $8^{-2/3}3^{-4}2^{-4/6}9^2 2^{13/15}4^{7/5}$,

h) $(\sqrt{2}-1)^{3!}$, i) $(\sqrt{2}-1)^{-3}$, j) $(3+\sqrt{8})^3(3-\sqrt{8})^3$, k) $\frac{1}{(n-1)!}-\frac{n-1}{n!}$, l) $\frac{n!}{(n-3)!(n^2-2n)}$.

1.7. Calcular: a) $1+2+3+4+\cdots+1024$, b) $1+2+4+8+16+\cdots+1024$,

c) $1/2+1/4+1/8+\cdots 1/1024$, d) $1/2+1/4+1/8+\cdots$.

1.8. Si $n\geq 3$, probar la igualdad de números combinatorios $\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=\binom{n+1}{3}$.

1.9. Calcular $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$ para $n=2,3,4,5$ y 6, y deducir de la fórmula del binomio el valor de la suma para cualquier n. ¿Cuánto vale $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$?

1.10. Hallar todos los números reales x que cumplen cada igualdad:

a) $x^2+x+2=0$, b) $x^4-x^2-2=0$, c) $x^4+2x^2+8x+5=0$, d) $3x^4-7x^3-7x+3=0$,

e) $\frac{2}{x^2-2x}+\frac{3}{x^2-4x+4}=1$, f) $\sqrt{x+9}-2\sqrt{x+1}=0$, g) $\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}=0$, h) $|x|=-x$.

1.11. Encontrar todos los reales x para los que:

a) $\frac{x-2}{x+2}\geq 0$ b) $|x-3|<5$ c) $|x-5\pi|\geq 4\pi$ d) $|4-7x|=4-x^2$

e) $\left|1-\frac{1}{x}\right|\leq 2$ f) $x^3+x^2>2x$ g) $|x||x-2|<1$ h) $|x|+|x-3|\leq 5$

i) $-3x^3>\frac{1}{9}$ j) $\frac{2x}{3}+\frac{5x}{12}-3\leq\frac{4x}{15}+\frac{1}{2}$ k) $7+x+\frac{6}{x}<0$ l) $3^{4+x^2-x^3}<1$

1.12. Determinar si cada afirmación es cierta o falsa (probarlas o dar un contraejemplo):

a) $x<y\Rightarrow x^{-1}>y^{-1}$, $\forall x,y\neq 0$; b) $x<y\Rightarrow x^3<y^3$, $\forall x,y$; c) $0<x<y\Rightarrow 3x^2<x^2+xy+y^2<3y^2$;

d) $|x-5|<2\Rightarrow 0<x<8$; e) $x<5\Rightarrow |x|<5$; f) $|x|<5\Rightarrow x<5$; g) $\exists x$ que cumple $|x+1|<x$;

h) $\exists x$ que cumple $|x-1|=|2-x|$; i) $\exists x$ que cumple $|x-1|=-|2-x|$; j) $x^2-1\leq|x^2-1|\leq x^2+1\ \forall x$.

1.13. Precisar si los siguientes subconjuntos de $\mathbf{R}$ tienen supremo, ínfimo, máximo, mínimo y si son abiertos o cerrados :

a) $\{x:|x|>2\}-\{7\}$; b) $\{x\in\mathbf{Q}:x^2\leq 4\}$; c) $\{(-1)^n+\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}\}$; d) $\{10^{-7}n:n\in\mathbf{N}\}$; e) ϕ.

1.14. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{\arctan x}{2-\sqrt[3]{x}}$ b) $g(x)=\operatorname{arc\,sen}(\log x)$ c) $h(x)=\frac{1}{1-x+\sqrt{5-x^2}}$ d) $k(x)=\sqrt{16-\left|9-x^2\right|}$

1.15. Sean $f(x)=\sqrt{x+2}$, $g(x)=\frac{2}{x}$. Hallar el dominio de $f\circ g$, $g\circ f$ y $f\circ f$. Hallar $\operatorname{im} f$ e $\operatorname{im} g$. Comprobar que f es inyectiva en todo su dominio y calcular f^{-1} indicando su dominio.

1.16. Si $f(x)=\left|x^2+2x\right|$, hallar todos los números reales x que cumplen $f(x)\leq 3$. ¿Es f inyectiva?

1.17. Si f y g son crecientes, ¿lo es $f+g$? ¿Y $f\cdot g$? ¿Y $f\circ g$?

1.18. Determinar si $f+g$ y $f\circ g$ son necesariamente pares o impares en los cuatro casos obtenidos al tomar f par o impar y g par o impar.

1.19. Expresar los siguientes ángulos en radianes: 15º, 18º, 120º, 150º, 270º. Y estos ángulos, que están en radianes, en grados: $\frac{\pi}{9}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{6}$, 3π. Usando Pitágoras deducir el valor de $\cos\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{4}$ y $\cos\frac{\pi}{3}$.

1.20. Si desde cierta distancia un edificio se ve bajo un ángulo $\frac{\pi}{3}$, y alejándose 200 m se vé bajo un ángulo $\frac{\pi}{6}$, ¿cuáles son la altura del edificio y la distancia que a la que estaba en la primera posición?

1.21. a) Expresar $\operatorname{sen}\frac{x}{2}$ y $\cos\frac{x}{2}$ en función de $\cos x$. b) Expresar $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ en función de $\tan\frac{x}{2}$. c) Probar que $\tan\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$. d) Calcular $\tan\frac{\pi}{8}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$ y $\cos\frac{\pi}{12}$.

1.22. Hallar (sin calculadora) los siguientes valores (en el caso de que existan):

a) $125^{2/3}$ b) $e^{3\log 4-\log 5}$ c) $\log_2 64$ d) $\operatorname{ch}(\log 3)$ e) $\log(\log(\log 2))$ f) $[\operatorname{sh}(-1)]^{\pi}$ g) $\cos(-\frac{13\pi}{3})$

h) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}$ i) $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}$ j) $[\cos\frac{3\pi}{4}]^{1/4}$ k) $\tan\frac{5\pi}{4}$ l) $\arctan(\tan\frac{5\pi}{4})$ m) $\operatorname{arc\,sen}(\arccos 0)$ n) $\cos(\arctan 17)$

1.23. Hallar todos los números reales x tales que:

a) $8^x=2^{-x^2}$ b) $\log(x+2)=2\log x$ c) $\log(4x^3-3x)\leq 0$

d) $\cos 2x-5\cos x=2$ e) $\tan^2 x=12\cos^2 x$ f) $|\tan x|<1$

g) $\cos^4 x-\operatorname{sen}^4 x=\frac{1}{2}$ h) $1-\cos x=\operatorname{sen}\frac{x}{2}$ i) $|\operatorname{sh} x|\leq\frac{3}{4}$

1.24. a) Expresar mediante identidades trigonométricas $\operatorname{sen} 3x$ y $\cos 3x$ en función de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. b) Si $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{3}{5}$ y α es del tercer cuadrante, hallar $\cos 3\alpha$ y precisar en qué cuadrante está 3α.

1.25. Escribir $\cos 5x$ en función de $\cos x$ y $\operatorname{sen} 5x$ en función de $\operatorname{sen} x$. Encontrar a partir de estas expresiones algún polinomio que deba anular el $\cos\frac{\pi}{5}$, hallar sus raíces y probar que: $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1.26. Escribir el complejo $z=\frac{i-5}{3+2i}$ en la forma $re^{i\theta}$ y hallar z^5 y escribirlo en la forma $a+bi$.

1.27. Calcular: a) $\frac{1}{i}+\frac{3}{1+i}$, b) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{10}$, c) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5$, d) $\overline{\left(\frac{2-3i}{i+4}\right)}$, e) $\left|e^{3-i|2+i|}\right|$, f) $\sqrt[3]{8i^2}$.

1.28. Hallar los números complejos z tales que $z^4=-64$ y escribir el polinomio $P(x)=x^4+64$ como producto de polinomios de segundo grado con coeficientes reales.

1.29. Escribir las raíces cuartas del complejo $z=8i\left(\sqrt{3}+i\right)$ en la forma $a+bi$ y dibujarlas.

1.30. Resolver las ecuaciones: $z^3+8=0$, $z^4-16z^2+100=0$, $z^2+iz+2=0$, $e^z=1$.

Problemas de Matemáticas (2017/2018).
2. Sucesiones, límites y continuidad en R.

2.1. Sean a) $a_n=\frac{(-1)^n+n}{1+n}$, b) $b_n=10^{7-n}$, c) $c_n=\frac{300\cos n-2n}{n^2}$ y d) $d_n=\frac{n^2+\operatorname{sen} n}{n+1}-\frac{n^3}{(n+1)^2}$.
Hallar un N a partir del cual sus términos difieran del límite en menos de $\varepsilon=1$, $\varepsilon=0.1$ y $\varepsilon=0.01$.

2.2. Hallar el límite L de la sucesión $a_n=\frac{n^2+1}{n+1}-\frac{n^2+4}{n+2}$. Probar que a_n es creciente. Hallar razonadamente un N tal que $|a_n-L|<\frac{1}{2}$ si $n\geq N$.

2.3. Probar a partir de la definición de límite que $\{a_n\}$ convergente $\Rightarrow$ $\{a_n^2\}$ convergente. ¿Es cierta $\Leftarrow$?

2.4. Calcular el límite de las sucesiones que sean convergentes:

a) $\frac{n^2-30n}{3-100n}$ b) $\frac{17\sqrt{n+3}+9}{\sqrt{n^2+1}-1}$ c) $\frac{n^2}{2n-1}-\frac{n^2-1}{2n}$ d) $\sqrt{n}\left[\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\right]$

e) $(-1)^n\sqrt{n}-n$ f) $(-1)^n\left(\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}-1\right)$ g) $\frac{(-1)^n\sqrt{n(n-1)}}{n+1}$ h) $\left(\sqrt{2n^2-1}-1\right)^4$

i) $\frac{\sqrt{2n^4+3}-4}{n^2+5\operatorname{sen} n}$ j) $\frac{5+(-2)^{n+1}}{3^n\cos\frac{\pi}{n+2}}$ k) $\sqrt{n}\cos n-n\operatorname{th} n$ l) $\frac{\log(\mathrm{e}^n+2^n)}{\sqrt{4n^2-1}}$

m) $\frac{\sqrt{(n^4-1)\operatorname{sen}(9/n)}}{n^2+1}$ n) $\frac{n^2\operatorname{sen}\frac{3}{n}}{\sqrt{4n^2+9}}$ ñ) $\mathrm{e}^{\cos n\pi\log\frac{n+1}{n}}$ o) $n\,\mathrm{e}^{\cos n}\operatorname{sen}\frac{1}{n^2}$

p) $\frac{2^n+(-1)^n}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}$ q) $\left(n-\frac{n^2}{n+4}\right)^{-\frac{n+\log n}{2n}}$ r) $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ s) $1+\cdots+\frac{1}{2^n}$

2.5. Precisar para qué valores de $a,b>0$ convergen las sucesiones:

a) $\sqrt{n^2+an}-bn$ b) $\frac{n^a+\log n}{n^b+3}$ c) $\sqrt[n]{a^n+b^n}$ d) $\left(n^a+b\right)^{1/n}$ e) $\left(a+\frac{b}{n}\right)^n$

2.6. Utilizando únicamente las definiciones probar que:

a) $f(x)=x\cos\frac{\pi}{x}$ y $g(x)=1+\sqrt{4+x}$ son continuas en $x=0$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}x^2}{1+x^2}=0$, c) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1+x}{x^3}=\infty$.

2.7. Sea $f(x)$ una función tal que $|f(x)|\leq x^4$ para todo $x\in\mathbf{R}$. ¿Es necesariamente continua en $x=0$? ¿Y en $x=1$? Probarlo o dar un contraejemplo.

2.8. a) Hallar una f que no sea continua en ningún punto, pero tal que $|f(x)|$ sea continua $\forall x$.
b) ¿Existe alguna función que sea continua en todo **R** menos en un único punto?
c) ¿Existe alguna que sea continua en un único punto de **R** y discontinua en todos los demás?
d) Escribir, si existe, una f definida en todo **R** tal que la sucesión $\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$ no tienda a $f(0)$.

2.9. Hallar (si existen) los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+5)^{10}}{(2x+1)^{10}}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x+\mathrm{e}^x}{x+6}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+5}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-x}-x$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}-x$

f) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+1}{x-1}$ g) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$ h) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-1}{x-1}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan(\log x^2)$ j) $\lim\limits_{x\to0}\arctan(\log x^2)$

k) $\lim\limits_{x\to\infty}x\operatorname{sen}x$ l) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\operatorname{arc\,sen}x}{x}$ m) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3+2^{1/x}}$ n) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{3+2^{1/x}}$ ñ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{3+2^{1/x}}$

o) $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\operatorname{sen}x}$ p) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{\log(2-x^2)}$ q) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x^2}{x}$ r) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x^3}$ s) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{|x|}$

2.10. Sea $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ continua y tal que $\operatorname{im}f\subset[0,1]$. Probar que entonces existe algún $x\in[0,1]$ tal que $f(x)=x$ [a x se le llama punto fijo de f].

Problemas de Matemáticas (2017/2018).
3. Derivadas en R.

3.1. Hallar el dominio de las siguientes funciones y el valor de su derivada en el punto que se indica:

a) $f(x)=\log\left[\pi-4\arctan(x^2)\right]$, $x=3^{-1/4}$; b) $g(x)=\arctan\left[x-\log(2-x)\right]$, $x=1$.

3.2. Sea $f(x)=\arctan\left(\sqrt{3}\cos x\right)$. a) Precisar los $x\in\mathbf{R}$ que cumplen $\begin{array}{l} \text{i) } f(x)=\frac{\pi}{3} \\ \text{ii) } f(x)=\frac{7\pi}{3} \end{array}$. b) Hallar $f'\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

3.3. Hallar la primera y segunda derivadas de las funciones siguientes indicando su dominio:

a) $f(x)=x^3\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $f(0)=0$; b) $g(x)=x\log|x|$, $g(0)=0$; c) $h(x)=|x^{7/3}-x^2|$; d) $k(x)=\frac{x^2+1}{x^3-x}$.

3.4. Determinar el dominio de la función y hallar los x que anulan su derivada segunda:

a) $f(x)=x^2+7x-5+\frac{8}{x-1}$, b) $g(x)=\operatorname{sen}x\cos x$, c) $h(x)=\frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}$, d) $k(x)=\cos x+\frac{1}{\cos x}$.

3.5. Sea $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si } 0<|x|\leq 1 \\ a+bx^2 & \text{si } |x|>1 \end{cases}$. Hallar a y b para que exista $f'(1)$.

3.6. Sea $g(x)=x\operatorname{sen}\left(\log|x|\right)$, $g(0)=0$. Precisar si es continua y derivable en $x=0$. Hallar todos los x tales que $g'(x)=0$.

3.7. Sea $f(x)=x\arctan\left(\log|x|\right)$ si $x\neq 0$, $f(0)=0$. a) Estudiar si es continua y derivable en $x=0$. b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=1$.

3.8. Sea $f(x)=\sqrt{1-\log|x^2-2|}$. a) Determinar su dominio. b) Hallar su recta tangente en $x=1$.

3.9. Hallar la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en el punto que se indica:

a) $x^2+4y^2-10x=0$ en $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ b) $y+yx^2+y^3=6$ en $(2,1)$.

3.10. Hallar, si existe, un $c\in(0,1)$ en el que la recta tangente a $f(x)=\arctan\frac{x}{2-x}$ sea paralela a la recta que une $(0,0)$ y $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$.

3.11. Estudiar la derivabilidad y hallar (si existen) los valores extremos en los intervalos indicados:

a) $f(x)=2x-9x^{2/3}$ en $[-8,64]$ b) $g(x)=\operatorname{sen}x+2|x|$ en $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$

c) $h(x)=x^3-3|2x-1|$ en $[0,2]$ d) $k(x)=\sqrt{(x-1)^2+9}+\sqrt{(x-8)^2+16}$ en $\mathbf{R}$

3.12. Sea $g(x)=\frac{1}{e^x+e^{-1/x}}$, $g(0)=1$. a) Precisar si es continua y derivable en $x=0$. b) ¿Es g inyectiva en $[0,\infty)$? ¿Lo es en todo su dominio?

3.13. Sea $f(x)=e^{x^2-x}$. a) Determinar para qué puntos de su gráfica la recta tangente pasa por el origen. b) Probar que existe f^{-1}, función inversa de f para $x\in[1,\infty)$, y hallar la derivada $(f^{-1})'\left(e^2\right)$.

3.14. Sea $g(x)=3e^{2x}-e^x-x$. a) Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$. b) Hallar los x que anulan g' y g'' . c) Precisar cuántas veces se anula g en su dominio.

3.15. Determinar cuántas veces se anulan estas funciones en los intervalos que se indican:

a) $f(x)=e^{\operatorname{sen}x}-3\operatorname{sen}x$ en $[-\pi,\pi]$ b) $g(x)=\log\left|x+\frac{1}{2}\right|+x$ en $[0,1]$

3.16. Hallar la imagen de $g(x)=x-4\arctan\sqrt{x}$ y precisar cuántas veces se anula en el intervalo $[0,4]$.

3.17. Discutir, según los valores de la constante a , cuántas soluciones reales tiene la ecuación $e^x=ax$.

3.18. Sea $f(x)=\left|e^x-2\right|$. **a]** Esquematizar su gráfica a partir de la de e^x . **b]** Hallar todos los números reales x que satisfacen $f(x)>1$. **c]** Hallar su recta tangente en $x=0$.

3.19. Sea $g(x)=x\big(\log|x|\big)^2$, $g(0)=0$. Precisar si es continua y derivable en $x=0$. Estudiar su crecimiento y hallar sus puntos de inflexión. Dibujar su gráfica.

3.20. Sea $g(x)=\frac{e^x}{x^3+4}$. a) Hallar su dominio y los límites cuando $x\to\infty$ y $x\to-\infty$. b) Encontrar sus valores extremos en $[0,3]$. c) ¿Se anula g en el intervalo $[-2,0]$? d) Esbozar su gráfica.

3.21. Sea $g(x)=\log\frac{x^2-2x+3}{x^2+2}$. a) Estudiar en qué intervalos crece y decrece. b) Precisar cuántas veces se anula g en $[0,1]$ y cuántas soluciones tiene $g(x)=1$ en todo su dominio.

3.22. Sea $h(x)=4\arctan x+\frac{1}{x^2}$. a) Hallar sus asíntotas. b) Encontrar el valor mínimo de h en $\big[3^{-1/2},3^{1/2}\big]$. c) Probar que h se anula una única vez y que h'' se anula en $(1,2)$. **d]** Dibujar la gráfica de h .

3.23. a) Probar que $P(x)=2x^3+x^2-1$ tiene sólo 1 raíz real y dar un intervalo $[n,n+1]$ al que pertenezca. b) Sea $g(x)=\frac{3x+1}{x^3+1}$. Hallar su dominio, asíntotas, estudiar g' y dibujar aproximadamente la gráfica. Hallar (si existe) el valor mínimo de g en el intervalo $[0,1]$.

3.24. Sea $f(x)=\frac{x-4}{x^3+x-4}$. a) Probar que el denominador se anula una única vez en el intervalo $[1,2]$. b) Estudiar el crecimiento de f . c) Hallar sus valores extremos en $[-1,1]$. d) Dibujar su gráfica.

3.25. Sea $f(x)=\log\frac{3x+2}{x^3+1}$. a) Precisar su dominio D y asíntotas verticales. b) Calcular $f'(1)$. c) Probar que f' sólo tiene un cero y esbozar la gráfica de f . d) ¿Es f inyectiva en $[1,\infty)$? ¿Lo en todo D ?

3.26. Sea $h(x)=\big(3x-\frac{4}{x}\big)e^{-x}$. a) Hallar su límite cuando x tiende a ∞ y $-\infty$ y sus asíntotas verticales. b) Precisar en qué intervalos h crece y decrece. c) Probar que $h''(x)=0$ sólo para un x del intervalo $(-1,0)$ y para otro del $(2,3)$. d) Dibujar su gráfica.

3.27. Dibujar las gráficas de las funciones:

a) $\frac{x^2-4x+5}{x-2}$ b) $\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$ c) $\cos^2\big(x+\frac{\pi}{4}\big)$ d) $\arctan(3x-x^3)$

e) $(2x^2-1)e^{-x^2}$ f) $e^{-x}\cos x$ g) $x^3-4x+\log x$ h) $\log\big(x^2+\frac{1}{x}\big)$

3.28. Dibujar las curvas:

a) $x^2+y^2+2x-4y=0$ b) $4x^2-y^2-8x=12$ c) $x^2-xy+y^2=3$ d) $x^2y^2=x^2-1$

3.29. Determinar el área mínima de todos los triángulos del primer cuadrante cuyos catetos son los ejes y cuya hipotenusa pasa por el punto $(1,2)$. ¿Existe el triángulo de área máxima?

3.30. Sean las rectas que pasan por el punto $(1,4)$ y que cortan los ejes coordenados en puntos $(a,0)$ y $(0,b)$ con $a,b>0$. ¿Para cuál de ellas la suma $a+b$ es la menor?

3.31. Hallar el punto de la recta tangente a $x^2+y^2=4$ en el punto $\big(1,-\sqrt{3}\big)$ más cercano al punto $(2,0)$.

3.32. a) Escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2+4y^2+4x=0$ en el punto $(-2/3,-\sqrt{5}/3)$. b) Determinar, si existen, los puntos de la curva más cercanos y más lejanos al punto $(-1,0)$.

3.33. Encontrar el punto de la gráfica de $f(x)=2\arctan(x-2)$ para el que es mínima la suma de sus distancias a ambos ejes.

3.34. Hallar el área máxima que puede tener un rectángulo que tenga dos lados sobre los semiejes x,y positvos y el vértice opuesto sobre la gráfica de $P(x)=6-x-x^3$.

3.35. Un nadador está en el punto A del borde de un estanque circular de 50 m de radio y desea ir al punto opuesto B , nadando hasta algún punto P del borde y andando luego por el arco PB del borde. Si nada 50 m por minuto y camina 100 m por minuto, ¿a qué punto P se debe dirigir para minimizar el tiempo de recorrido? [Ayuda: si O es el centro del círculo, ¿qué relación hay entre los ángulos PAB y POB ?].

Problemas de Matemáticas (2017/2018).
4. Series, Taylor y límites indeterminados.

4.1. Sea la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_{n+1}=\frac{n+2}{3n+1}a_n$, con $a_1=1$. Probar que tiene límite y calcularlo. Determinar la convergencia de $\sum a_n$.

4.2. Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes:

a) $\sum \frac{2^{n^2}}{n^n}$ b) $\sum \frac{3+\cos n}{\sqrt{n}}$ c) $\sum (-1)^n \left(\frac{\pi}{e}\right)^n$ d) $\sum \left[\frac{e^{-100}}{n}-\frac{e^{-n}}{100}\right]$

e) $\sum n\,e^{-n^2}$ f) $\sum \frac{2^n n^{100}}{(n-1)!}$ g) $\sum \frac{2+(-1)^n}{n^2+3}$ h) $\sum (-1)^n \frac{n+24}{25n}$

i) $\sum \frac{n^n}{(n+2)^n}$ j) $\sum \frac{1}{(\ln n)^2}$ k) $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ l) $\sum (-1)^n \frac{4n-1}{n(n-1)}$

m) $\sum \left(\frac{1+n^3}{1+n^4}\right)^3$ n) $\sum \left(\frac{2n-1}{4n-3}\right)^n$ ñ) $\sum \frac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n^3+\cos^3 n}}$ o) $\sum \left[\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]$

4.3. Determinar para que números reales c convergen las siguientes series:

a) $\sum \frac{(-1)^n}{n^c}$ b) $\sum \frac{c^n+c^{-n}}{n+7}$ c) $\sum \frac{(n!)^c}{(3n)!}$ d) $\sum \frac{(c-1)^n}{2^{2n-1}}$ e) $\sum \frac{c^n+2}{e^n+n}$ f) $\sum \left[1-c\cos\frac{1}{n}\right]$

4.4. Precisar todos los a para los que converge $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}a^n(1-a)^n$ y hallar su suma para $a=\frac{1}{2}$.

4.5. Determinar para qué $a\in\mathbf{R}$ converge $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}}{a^n}$. Precisar para qué valores de a su suma es $\frac{1}{3}$.

4.6. Probar que $0.8414\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\le 0.8417$ (sumar 3 y 4 términos de la serie). ¿Cuántos términos habría que sumar para estimar la suma con error menor que 10^{-5} ?

4.7. Razonar si son ciertas las afirmaciones: **a]** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4}{2n+1}>\frac{9}{5}$; **b]** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\arctan n}{\sqrt{3n^3+1}}<\frac{9}{5}$.

4.8. Estudiar si convergen puntual y uniformemente en el intervalo que se indica:

$f_n(x)=\frac{1}{1+x^{2n}}$ en $[0,2]$; $g_n(x)=\frac{nx}{n+1}$ en $[0,1]$; $h_n(x)=e^{x-n}$ en i) $(-\infty,0]$, ii) $[0,\infty)$.

4.9. Estudiar para qué x convergen, y si lo hacen uniformemente en el intervalo que se indica:

a) $\sum\frac{\arctan(nx)}{5^n}$ en $\mathbf{R}$ b) $\sum\frac{\cos^n x}{n^3}$ en $\mathbf{R}$ c) $\sum\frac{x^n}{n^n}$ en $[-7,7]$ d) $\sum\frac{(5x)^{n-1}}{(x^2+6)^n}$ en $[5,6]$.

4.10. i) Calcular los valores máximo y mínimo de $f_n(x)=\frac{x}{n}e^{-nx}$ en $[0,\infty)$.
ii) Determinar si convergen uniformemente en $[0,\infty)$ la sucesión $f_n(x)$ y la serie $\sum f_n(x)$.

4.11. Determinar todos los valores de x para los que convergen las series:

a) $\sum\frac{7^n}{\sqrt{n^2+1}}x^n$ b) $\sum\left(\frac{n-1}{2n}\right)^n x^n$ c) $\sum\frac{8^n x^{3n}}{1+\sqrt{n+3}}$ d) $\sum 2^{n^2}(x-2)^n$ e) $\sum\frac{(-4)^n}{2n+1}(x-1)^{2n}$

f) $\sum\frac{(n+1)!\,x^{3n}}{(2n)!}$ g) $\sum\frac{2^n x^{2n}}{1+n^2}$ h) $\sum\left(3+\frac{1}{n}\right)^{2n}x^n$ i) $\sum\frac{n^2x^{2n}}{2^n\sqrt{n}}$ j) $\sum\frac{9^n x^{2n}}{n^2\log(n+1)}$

4.12. Precisar si converge la serie $\sum\frac{(x-2)^n}{\arctan n}$ para: a) $x=0$, b) $x=1$, c) $x=e$.

4.13. Sea $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$. Determinar para qué $x\in\mathbf{R}$ converge la serie anterior. ¿Converge para los mismos x la serie de f' ? ¿Qué función es f' ?

4.14. Determinar para qué valores de x converge $\sum_{n=1}^{\infty} n3^n x^{n-1}$ y hallar su suma para esos valores.

4.15. Determinar para qué x converge la serie $\sum\frac{n+1}{n+3}x^n$ y precisar si converge para $x=\operatorname{sh}1$.

4.16. Precisar el valor de la suma de las siguientes series:

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3^{n-2}}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n}{(2n+1)!}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!\,2^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\,[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]}$

4.17. Utilizando polinomios de Taylor determinar con un error menor que 10^{-3} el valor de:

a) $\cos 1$ b) e c) $\log\frac{3}{2}$ d) $\log\frac{4}{3}$ e) $\log 2$

4.18. Calcular los 3 primeros términos no nulos del desarrollo de Taylor de $f(x)=x(1+x^3)^{-1/5}$ en $x=0$. Aproximar por un racional $f\left(\frac{1}{2}\right)$ con error menor que 0.001.

4.19. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Taylor en $x=0$ de:

a) $\cos^2\frac{x}{3}$ b) $\frac{5}{3-x}$ c) $\frac{\log(1+2x)}{1+2x}$ d) $(2-x)\sqrt{1+x}$
e) $\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$ f) $\frac{1}{\cos x}$ g) $\operatorname{arc\,sen}x$ h) $\cos(\operatorname{sen}x)$

4.20. Sea $f(x)=\frac{\cos(\pi x/2)}{\sqrt{1-x^2}}$. **a]** Hallar los 3 primeros términos no nulos de su desarrollo de Taylor en $x=0$ y deducir el valor de $f^{(2)}(0)$ y $f^{(2017)}(0)$. **b]** Hallar $\lim_{x\to1^-}f(x)$.

4.21. Sea $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\arctan x\,, & x<0\\ 1+x\arctan\frac{1}{x}\,, & x>0\end{cases}$, $f(0)=1$. **a]** Calcular $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ y $\lim_{x\to\infty}f(x)$. **b]** Estudiar si es continua y derivable en $x=0$.

4.22. Sea $g(x)=\frac{x}{e^x-1}$, $g(0)=1$. Hallar, si existe, $g'(0)$.

4.23. Calcular los siguientes límites indeterminados cuando x tiende al a indicado:

$a=0$: a) $\frac{\sqrt{1-x^2}-\cos x}{x^4}$ b) $\frac{x-\tan x}{\arctan x^3}$ c) $\frac{\log(1+\operatorname{sen}^2 x)-x^2}{x^4}$ d) $(\cos 2x)^{3/x^2}$ e) $\tan x\log|x|$

$a=1$: f) $\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}$ g) $\frac{x^x-x}{1-x+\log x}$ h) $\frac{1-x^{1/2}}{1-x}$ $a=\infty$: i) $\frac{e^x+\operatorname{sen}x}{e^x+\cos x}$ j) $x\tan\frac{1}{x}$ k) $\left[\frac{x+3}{x-3}\right]^x$

4.24. Discutir según los valores de a el valor del límite cuando $x\to0$ de la funciones:

a) $f(x)=\frac{\operatorname{sen}x\cos x+\arctan ax}{x^3}$ b) $g(x)=\frac{e^{2x+x^2}-1-ax}{x\log(1+x)}$

4.25. Hallar los límites cuando $x\to0$ y cuando $x\to\infty$ de:

a) $\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\arctan x}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ b) $\frac{\arctan x^2-(e^x-1)^2}{\log(1+x^3)}$ c) $\frac{1+2x-e^{2x-2x^2}}{x^3+\operatorname{sen}x^3}$ d) $(x^2+\cos x)\arctan\frac{1}{x^2}$

4.26. Determinar (si existen) los límites cuando: i) $x\to0$; ii) $x\to-\infty$; iii) $x\to\infty$ de:

a) $f(x)=\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3\arctan\frac{1}{x^2}}$ b) $g(x)=\frac{(1+x^2)^{1/3}\arctan x-x}{x\operatorname{sh}x^4}$ c) $h(x)=\frac{\arctan(\operatorname{sen}x)-x}{\log(1+x^3)}$ d) $k(x)=\frac{1-e^{x^3}}{x-\operatorname{sen}x}$

4.27. Hallar el real b tal que $f(x)=x^{-2}\left[e^{bx^4}-\cos bx\right]$ tiende hacia 0 si $x\to\infty$ y hacia 2 si $x\to0$.

4.28. Hallar el límite de las sucesiones: a) $a_n=n^2\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right]$, b) $b_n=n\arctan n-n^2\arctan\frac{2}{n}$.

4.29. Sea $f(x)=\frac{\log|1+x^3|}{x}$, $f(0)=0$. Hallar $f'(0)$ y $f''(0)$. Dibujar su gráfica. Hallar $\lim_{n\to\infty}\{f(f(n))\}$.

4.30. Sea $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}$, $f(0)=1$. Hallar $f'(0)$. Determinar los límites $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$ y la $\operatorname{im}f$. Estudiar el crecimiento y decrecimiento de f. Hallar la derivada $f^{(2011)}(0)$.

Problemas de Matemáticas (2017/2018).
5. Integración en R.

5.1. Sea $f(x)=1-\sqrt{x}\,, x\in[0,1)$; $f(x)=0\,, x\in[1,2)$; $f(x)=1\,, x\in[2,3]$, y sea $F(x)=\int_0^x f$. Determinar los $x\in[0,3]$ para los que F es continua y derivable. Hallar $F(3)$. Hallar $F(x)\ \forall x$.

5.2. Sea $F(x)=\int_{\operatorname{sen}x}^{1}\frac{\arctan t}{1+t^4}\,dt$. Hallar $F\big(\frac{3\pi}{2}\big)$ y $F'\big(\frac{3\pi}{2}\big)$.

5.3. Si $H(x)=x\int_x^{2x}\sqrt{1+3t^3}\,dt$, calcular $H''(1)$.

5.4. ¿Posee función inversa la función f definida para todo $x\geq 2$ por $f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\log t}$?

5.5. Sea $f(x)=\int_1^x e^{4\arctan t}\,dt$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=1$. Probar que f posee inversa en todo **R** y calcular $(f^{-1})'(0)$.

5.6. Sea $H(x)=\int_x^{x^2}\frac{\log t\,dt}{1+4t}$, $x>0$. Estudiar su crecimiento. Probar que $H\big(\frac{1}{2}\big)>0$ y que $0<H(2)<\frac{4}{9}$.

5.7. Sea $H(x)=\int_x^{2x}e^{-3s^2}ds$. Probar que $0<H(1)<\frac{1}{8}$. Hallar la ecuación de la tangente a su gráfica en $x=0$. Precisar los x en los que H alcanza sus valores extremos en el intervalo $[0,1]$.

5.8. Determinar en qué x del intervalo que se indica alcanzan su máximo y su mínimo las funciones:

a) $F(x)=\int_{-1}^{x}t\big[e^t-e^{t^4}\big]dt$ en $[-1,1]$ b) $H(x)=\int_{-x^2}^{4}\frac{t\,dt}{1+|t|}$ en $[0,2]$

c) $G(x)=\int_{-1}^{\tan x}\frac{t^3}{1+t^2}\,dt$ en $\big[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\big]$ d) $K(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{36+t^3}}$ en $[-1,6]$

5.9. Precisar cuántas veces se anula cada función en el intervalo indicado:

a) $H(x)=\int_x^{2x}\frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt$ en $\big[\frac{\pi}{3},\pi\big]$ b) $K(x)=\int_0^{x^3}\frac{2e^s}{1+s}\,ds-1$ en $[0,1]$.

5.10. Hallar las siguientes primitivas:

a) $\int\frac{x+1}{x+9}\,dx$ b) $\int\frac{x+1}{x^2+9}\,dx$ c) $\int x(x^2+3)^2\,dx$ d) $\int\frac{\log x}{x^2}\,dx$ e) $\int(\log x)^3dx$

f) $\int\frac{x^4}{x+1}\,dx$ g) $\int\frac{dx}{x^4-2x^3}$ h) $\int\frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}\,dx$ i) $\int\frac{x+2}{x^3-8}\,dx$ j) $\int x^2\arctan\frac{1}{x}\,dx$

k) $\int x^3e^{-x}dx$ l) $\int x^3e^{x^2}dx$ m) $\int\frac{dx}{1+2e^x+e^{2x}}$ n) $\int\tan^2x\,dx$ ñ) $\int\operatorname{sen}x\cos x\,dx$

o) $\int\frac{x\,dx}{\cos^2x}$ p) $\int\frac{\operatorname{sen}2x\,dx}{5+4\cos x}$ q) $\int\frac{dx}{3\operatorname{sen}^2x+\cos^2x}$ r) $\int 4x\cos x^2dx$ s) $\int 4x\cos^2x\,dx$

t) $\int\operatorname{arc\,sen}x\,dx$ u) $\int\sqrt{x+5}\,dx$ v) $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$ w) $\int\frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx$ x) $\int\sqrt{x^2-1}\,dx$

5.11. Calcular, si existen, las integrales:

a) $\int_{-3}^{-2}\frac{dx}{x+x^3}$ b) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}$ c) $\int_0^{1/2}\frac{(2x^3-x^2)\,dx}{2x^2-x-1}$ d) $\int_{-2}^{4}\big(|x+4|-3|x|\big)dx$

e) $\int_{-\log 3}^{-\log 2}\frac{e^{2x}}{e^x-1}\,dx$ f) $\int_1^{e}x\log x\,dx$ g) $\int_1^4\log\big(x+\sqrt{x}\big)\,dx$ h) $\int_0^1\arctan(\sqrt{x})\,dx$

i) $\int_0^{\pi/2}\cos 2x\,\cos x\,dx$ j) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen}^5x\,dx$ k) $\int_0^{\pi/4}\frac{(\tan^3x+1)\,dx}{(3+\tan^2x)\cos^2x}$ l) $\int_{-\pi/6}^{0}\frac{\cos x\,dx}{3\operatorname{sen}x-2\cos^2x}$

m) $\int_1^3 x\sqrt{1+x}\,dx$ n) $\int_0^4\frac{\sqrt{x}}{x+4}\,dx$ ñ) $\int_0^{1/2}\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ o) $\int_0^{1/2}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5.12. Calcular la integral $\int_{-1}^{0}x^3\operatorname{sen}x^2\,dx$. Decidir si esta integral es mayor o menor que 0 .

5.13. **a]** Hallar $I=\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen} 2x\, e^{-2\cos x}\, dx$. **b]** Probar, sin utilizar el resultado de **a]**, que $0 \leq I \leq \frac{2}{3}$.

5.14. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^{\log 3} \frac{9-e^x}{e^{2x}+3}\, dx$. Probar que esta integral es mayor que $\frac{1}{2}$.

5.15. Hallar los valores máximo y mínimo de $g(x)=\frac{x^2-5x}{x-9}$ en $[2,4]$. Probar que $\frac{8}{5}<\int_2^4 g(x)dx<2$.
Hallar la integral y, usando desarrollos de Taylor, comprobar las desigualdades anteriores.

5.16. Sea $f(x)=x+\frac{2}{\sqrt{x+3}}$. Hallar los x tales que $f(x)=0$ y tales que $f'(x)=0$. Dibujar su gráfica.
Hallar el área de la región acotada por los ejes y la gráfica.

5.17. Sea $g(x)=\frac{x^3+x^2-7}{x^3-2x^2+x-2}$. Hallar la primitiva $G(x)$ que cumple $G(0)=-1$. Probar que $g(x)>1$ si $x\in[0,1]$ y que existe un único $c\in(0,1)$ tal que $G(c)=0$.

5.18. **a]** Hallar una primitiva de $f(x)=\frac{1}{x^3+3x^2}$. **b]** Si $G(x)=\int_x^{2x} f(t)\,dt$, hallar $G'(-1)$ y $G(-1)$.
c] Estudiar si convergen $\int_1^\infty f$ e $\int_{-1}^1 f$.

5.19. Sea $g(x)=x\arctan\frac{1}{x^2}$, $g(0)=0$. **a]** Determinar si es continua y derivable en $x=0$. **b]** Calcular una primitiva de g . **c]** Estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_0^\infty g$.

5.20. Sea $f(x)=\frac{1}{1-\sqrt{x}}$. **a]** Calcular $\int_4^9 f$. **b]** Precisar si converge $\int_0^1 f$.

5.21. Sea $f(x)=\frac{\sqrt{x+4}}{x-5}$. **a]** Hallar $\int_{-4}^0 f(x)\,dx$. **b]** Precisar si converge $\int_5^\infty f(x)\,dx$.

5.22. Calcular $\displaystyle\int_0^{\log 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$. Estudiar si converge $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

5.23. Probar que $\int_3^\infty x^{-3}e^{-6/x}dx$ es convergente y que su valor es menor que $\frac{1}{18}$.

5.24. **a]** Hallar los 2 primeros términos no nulos de la serie de Taylor de $f(x)=e^x\log(1+2x)$ en $x=0$.
b] Precisar si converge la integral impropia $\int_0^1 \frac{e^x \log(1+2x)}{x^2}\,dx$.

5.25. Sean $g(x)=e^{x-x^2}$ y $G(x)=\int_{2x}^{2x+1} g(t)\,dt$. **a]** Hallar $G'\big(\frac{1}{2}\big)$ y estudiar dónde crece y decrece G .
b] Probar que para todo x se cumple $0\leq G(x)\leq e^{1/4}$. **c]** Estudiar si converge $\int_0^\infty g$.

5.26. Sea $f(x)=(2x-1)e^{-x}$. **a]** Dibujar aproximadamente su gráfica. **b]** Hallar el área de la región limitada por los ejes y la gráfica de f . **c]** Decidir si converge la integral $\int_1^\infty f$.

5.27. Sea $F(x)=\int_2^{x^2} s^3e^{-s}ds$. **a]** Hallar los x en los que F alcanza sus valores extremos en $[0,2]$ y probar que su valor máximo es menor que 7 . **b]** Estudiar si F tiene cota superior en $[0,\infty)$. **c]** Precisar cuántas veces se anula F en $[0,2]$.

5.28. **a]** Precisar, si existen, los x para los que $F(x)=\int_0^x \frac{2s-1}{\sqrt{s^3+1}}\,ds$ toma sus valores extremos en $[0,\infty)$.
b] Probar que $-\frac{1}{2}<F\big(\frac{1}{2}\big)<0$.

5.29. Sean $h(x)=\frac{4x-1}{(x+4)(x^2+1)}$ y $H(x)=\int_0^{x/2} h$. **a]** Calcular $H'(2)$. **b]** Determinar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{H(x)}{x}$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{H(x)}{x}$.
c] Precisar cuántos ceros tiene H en el intervalo $\big[\frac{1}{2},4\big]$.

5.30. Sean $h(x)=\frac{4-x^4}{4+x^4}$, $H(x)=\int_0^x h$. **a]** Hallar 3 términos no nulos del desarrollo de Taylor de h en $x=0$. Probar que $\frac{3}{4}<H(1)<1$. **b]** Precisar los x en los que H toma sus valores extremos en el intervalo $[0,1]$. ¿Existe el valor máximo o mínimo de H en $[0,\infty)$?

5.31. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias. Hallar su valor si se puede:

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$ d) $\int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x^{3/2}}\,dx$

e) $\int_1^\infty \big(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\big)\,dx$ f) $\int_0^1 \log x\,dx$ g) $\int_1^\infty (1-\cos\frac{2}{x})\,dx$ h) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+1/x}}$

i) $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ j) $\int_1^\infty \log x \operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\,dx$ k) $\int_0^\infty \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\arctan x^2}\,dx$ l) $\int_0^1 \frac{\cos x\,dx}{e^{x^2}-1}$

5.32. Discutir según los valores de $a\in\mathbf{R}$ la convergencia de las integrales:

a) $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^a}\,dx$ b) $\int_0^\infty [x^3+\operatorname{sen}x]^a\,dx$ c) $\int_0^\infty \frac{\log(1+e^{ax})}{1+x^2}dx$

5.33. Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\int_x^{2x}\operatorname{sen}t^2\,dt}{x^3}$, utilizando L'Hôpital y desarrollos de Taylor.

5.34. Probar que $\int_0^1 x^2\cos x^2\,dx \geq \frac{1}{6}$: **a]** acotando el integrando, **b]** utilizando desarrollos de Taylor.

5.35. Sea $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$. Estudiar si es derivable en $x=0$. Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de f en el intervalo $[-4,1]$. Calcular $\int_{-4}^4 f$. Probar que $\frac{7}{10}\leq\int_0^1 f\leq\frac{7}{8}$.

5.36. Sea $F(x)=\int_{-1}^x t\,e^{t^3}dt$, con $x\in[-1,\infty)$. i) Hallar los x del intervalo en los que F alcanza sus valores máximo y mínimo. ii) Probar que $F(0)>-\frac{1}{2}$.

5.37. Sea $f(x)=\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}$. Calcular una primitiva de f y hallar el área de la región encerrada entre su gráfica y las rectas $y=0$ y $x=3$.

5.38. Calcular el área encerrada entre las gráficas de $g(x)=x^3-3x^2+3x$ y $f(x)=x$ en $[0,2]$.

5.39. Calcular el área de la región acotada entre las curvas $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2-x}$ e $y=0$.

5.40. Hallar el área de la región encerrada entre la gráfica de $f(x)=|49-x^2|$ y su recta tangente en $x=-1$.

5.41. Hallar el área de la región encerrada entre la curva $y=x^3$ y la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x=a>0$.

5.42. Hallar el área de la región acotada encerrada por la gráfica de $f(x)=x\log(1+x)$ y la recta $y=x$.

5.43. Calcular el área de la menor de las dos regiones acotadas por las curvas $x^2+y^2=2$ y $x=y^2$.

5.44. Calcular el área de una de las regiones comprendidas entre la gráfica de $f(x)=\operatorname{sen}x$ y esta misma gráfica trasladada horizontalmente una distancia $\frac{\pi}{3}$ hacia la derecha.

5.45. Sea la región del cuarto cuadrante limitada por la gráfica de $f(x)=-e^{-ax}$ ($a>0$) y el eje x . Probar que la recta tangente a $f(x)$ en $x=0$ divide dicha región en dos partes de igual área.