Problemas adicionales (17-18)

Preliminares

1. Sea $f : A \to B$ una función y sean $X, Y \subset A$. Estudiar si son ciertas o no las afirmaciones:
a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, b) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$, c) $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$.
Probar que f es inyectiva si y sólo si $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ para cualquier par $X, Y \subset A$.

2. Demostrar por inducción sobre n:
a) que la suma de los n primeros números impares es n^2;
b) las desigualdades: $\sqrt{n} \le \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \le 2\sqrt{n}$.

3. Sean las igualdades: i) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)} = \frac{n}{n+2}$, ii) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{k} = \frac{7n+1}{n+3}$.
Probar que una de ellas es falsa y demostrar (por inducción) que la otra es verdadera para todo $n \in \mathbf{N}$.

4. ¿Cuánto vale $\sum\limits_{k=1}^{n} 1$? ¿Cuánto vale $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})$? ¿Es $\big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\big)\big(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} 1$?

5. Hallar el mcd y el mcm de: a) 12345 y 67890, b) 135, 315 y 351.

6. Si $a_1 = -3$ y $a_{n+1} = a_n + \frac{3}{5}$, calcular a_4, a_{28} y la suma $S = a_4 + a_5 + \cdots + a_{28}$. ¿Se pueden encontrar 25 enteros en progresión aritmética cuya suma sea la misma S? ¿Y si son 24 los enteros?

7. La suma de 3 números en progresión geométrica es 70. Si el primero se multiplica por 4, el segundo por 5 y el tercero por 4, los números resultantes están en progresión aritmética. Hallar los 3 números.

8. Calcular $\binom{7}{7}, \binom{7}{6}, \ldots, \binom{7}{0}$: a) Mediante el triángulo de Tartaglia, b) con la fórmula $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$,
c) con la fórmula $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$. Utilizando lo anterior, hallar $\big(\sqrt{2}-1\big)^7$.

9. Probar que $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{2}$ son irracionales.

10. En dos partidos de baloncesto sucesivos un jugador ha obtenido un porcentaje de acierto en tiro de tres puntos superior al de otro jugador. ¿Implica esto que en el conjunto de los dos partidos es más alto el porcentaje del primer jugador?

11. Demostrar que la media geométrica de dos números positivos x e y es menor o igual que la aritmética, es decir, que $\sqrt{xy} \le (x+y)/2$, si $x, y > 0$. ¿Cuándo coinciden?

12. Determinar todos los reales x que satisfacen:
a) $|x^2+x-2| = 2-x-x^2$ b) $\big|x^3+11x-30\big| \le 30$ c) $\left|\frac{x-2}{x+1}\right| \le 2$ d) $\frac{|x-1|}{x} > -2$

13. Probar que: $\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|y-x|)$, $\min(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|y-x|)$.

14. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

i) $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, $\forall a,b \neq 0$; ii) $\sqrt{a^2} = -a$, $\forall a \le 0$; iii) $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$, $\forall a,b > 0$;

iv) $4^{a+b} = 4^a + 4^b$, $\forall a,b$; v) $(a^b)^c = (a^c)^b$, $\forall a > 0$; vi) $\log(ab) = \log a + \log b$, $\forall a,b$;

vii) $a < b \Rightarrow ac < bc$, $\forall a,b,c$; viii) $a > a^3$, si $0 < a < 1$; ix) $a^b > 1$, $\forall a > 1, \forall b$.

15. La unión infinita de intervalos $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \big(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\big)$, ¿tiene supremo e ínfimo? ¿es abierto o cerrado?

16. Probar que si A y B son conjuntos abiertos entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son también abiertos. Más en general, ¿es abierto el conjunto unión de una sucesión infinita de conjuntos abiertos?, ¿lo es su intersección? Deducir propiedades análogas para conjuntos cerrados.

17. Encontrar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$ b) $g(x)=\sqrt{\operatorname{sen}x+\cos x}$ c) $h(x)=\frac{1}{\tan x}$

d) $k(x)=\sqrt{1-x}+\log(1+x)$ e) $l(x)=\log(1-x^2)$ f) $m(x)=\tan(\pi x^2)$

18. Sea $g(x)=\log\left(2+\sqrt{x+3}\right)$. Precisar el dominio de g. ¿Para algún x es $g(x)=0$?

19. Sea $g(x)=\log\left(4x-3\sqrt{x}\right)$. Hallar su dominio. Encontrar todos los reales x que satisfacen $g(x)=0$.

20. Sean f con dominio $\mathbf{R}$. Probar que son falsas las implicaciones: a) f impar $\Rightarrow$ f inyectiva en $\mathbf{R}$. b) f inyectiva en $\mathbf{R}$ $\Rightarrow$ f impar.

Probar que es falsa la implicación: f inyectiva en su dominio $D \Rightarrow f$ estrictamente monótona en D.

21. Si $f(x)=\frac{|4-x^2|}{3x}$, precisar los reales x que cumplen i) $f(x)=-\frac{5}{9}$ ii) $f(x)\leq 1$. ¿Es f inyectiva en su dominio?

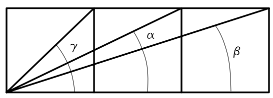
22. Sean $c(x)=x^2$, $r(x)=\sqrt{x}$ y $l(x)=1-x$. Precisar en qué intervalos es $f=r\circ c\circ l$ inyectiva, hallando f^{-1} en cada uno. Expresar $g(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ como composición de c, r y l y hallar $\operatorname{dom} g$.

23. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1,4)$ y $(2,-5)$. Hallar y dibujar la función inversa $y=f^{-1}(x)$ de la función $y=f(x)$ definida por la recta anterior. Escribir las funciones compuestas $f^2\circ[f^{-1}]^2$ y $[f^{-1}]^2\circ f^2$.

24. Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{3}$ y que α está en el segundo cuadrante, calcular $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}2\alpha$, $\tan\alpha$ y $\operatorname{sen}3\alpha$, usando tan sólo sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raices cuadradas.

25. La base de un triángulo mide 15 metros y los dos ángulos que se apoyan en ella son de 30º y 45º. ¿Cuánto valen los restantes lados y el ángulo que falta por determinar?

26. Si los tres cuadrados del dibujo son iguales, ¿cuánto vale $\alpha+\beta+\gamma$?



27. Hallar todos los x reales que verifican:

a) $\log(4x^2-3x)\leq 0$ b) $\cos 3x=3\cos x$ c) $\cos 2x-2\cos x=3$ d) $3\tan x+2\cos x=0$

e) $1+4\operatorname{sen}^2 x=2\tan x\tan 2x$ f) $\operatorname{sen}2x+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}5\pi$ g) $\cos^{58}x+\operatorname{sen}^{40}x=1$

28. Escribir en la forma más simplificada posible $\operatorname{th}\left(\log(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6})\right)$. [Es un racional. log siempre neperiano].

29. i) Escribir los complejos $-5\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i}$, $-3-\mathrm{i}\sqrt{3}$, $-\pi$, $4-3\mathrm{i}$, en la forma $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

ii) Escribir $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, $3\mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}}$, $4\cos\frac{\pi}{6}-4\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{sen}2}$, i^{765432}, en la forma $x+\mathrm{i}y$.

30. Hallar y dibujar el complejo conjugado de $z=\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$. Calcular z^3.

31. Si $z=2\mathrm{i}$, $w=\mathrm{i}-1$, escribir z, w y $\frac{z}{w}$ en la forma $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ y escribir w^5 en la forma $a+b\,\mathrm{i}$.

32. Escribir el complejo $z=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ en la forma $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ y calcular z^3.

33. Sea $z=\frac{2}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$. Escribir z en las formas $a+b\,\mathrm{i}$ y $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Escribir z^5 en cartesianas.

34. Calcular y expresar en la forma $a+b\,\mathrm{i}$: a) $\left(\frac{2-4\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}\right)^6$, b) $\sqrt[4]{-16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}$.

35. Escribir $w=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$ en la forma $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Escribir $z=w^6$ y las raíces $\sqrt[3]{z}$ en la forma $a+b\,\mathrm{i}$.

36. Sean los números complejos $z = 1 + \mathrm{i}$, $w = -2 - \mathrm{i}$. Expresarlos en notación módulo y argumento, y representar gráficamente los siguientes complejos: z, w, $z{+}w$, $z{-}w$, zw, $1/z$, $1/w$, z/w y w/z. Representar también $z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$, $z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$, $z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ y $z\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}$. ¿Cuánto vale $z\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}}$?

37. Si $z = 2+3\mathrm{i}$ y $w = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, hallar: $z+w$, $\bar{z}-w$, zw, w^4, $\sqrt{w}$, $\frac{z}{w}$, $\frac{w}{z}$, $|w|$, $|z|\,\mathrm{Re}\,w$, $|z|\,\mathrm{Im}\,w$.

38. Si $z = x + \mathrm{i}y$, escribir la parte real y la parte imaginaria de: $z+\bar{z}+z\cdot\bar{z}$, z^{-2}, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$.

39. Determinar si las siguientes igualdades son ciertas para todo z complejo:

a) $2\,\mathrm{Re}(z) = z+\bar{z}$ b) $|z| = |\bar{z}|$ c) $\mathrm{Re}(z\cdot w) = \mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Re}(w)$ d) $z^2 = |z|^2$.

40. Representar los complejos que satisfacen:

$z-\bar{z} = \mathrm{i}$, $|z-1| \le |z+1|$, $|z-1| = 2|z+1|$, $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Arg}(z^3) \le \frac{\pi}{2}$.

Sucesiones, límites y continuidad en R

1. ¿Qué forma tienen las sucesiones convergentes cuyos términos son todos enteros?

2. ¿Tienen $a_n = \operatorname{sen}\frac{n^2\pi}{4} - \frac{7}{n}$, $b_n = 2^{(-2)^n}$ y $c_n = \cos n + n$ alguna subsucesión convergente?

3. ¿Es cierta la afirmación: $\{a_n\}$ creciente $\Rightarrow$ $\{a_n^2\}$ creciente? Probarla o dar un contraejemplo.

4. Demostrar que $\{a_n\} \to a > 0 \Rightarrow \{\sqrt{a_n}\} \to \sqrt{a}$, y que $\{a_n\} \to \infty \Rightarrow \{\sqrt{a_n}\} \to \infty$.

5. Sea $a_n \leq b_n \leq c_n$. Probar que:
i) $a_n \to L, c_n \to L \Rightarrow b_n \to L$; ii) $b_n \to \infty \Rightarrow c_n \to \infty$; iii) $b_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$.

6. Demostrar que si $\{a_n\}$ es acotada y sus únicos puntos de acumulación son 10^7 y 10^{-7}, y la sucesión $\{b_n\}$ diverge hacia $+\infty$, entonces la sucesión $\{a_n b_n\}$ es divergente hacia $+\infty$.

7. Sea la sucesión $\left\{\frac{\arctan\sqrt{n} - 2^{1/n}}{\sqrt{4n^2-1}}\right\}$. Hallar, explicando los pasos, algún $N \in \mathbf{N}$ tal que para $n \geq N$ sus términos disten del límite menos de $\varepsilon = 10^{-1}$.

8. Hallar (si existe) el límite de las siguientes sucesiones:

a) $n\left(\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n-1}} - \sqrt{2}\right)$ b) $\frac{1}{2n}\sqrt{12n^3+6n-2} - \sqrt{3n-5}$ c) $\sqrt[3]{n^4-n^2} - n\,\mathrm{e}^{\arctan n}$ d) $n^3 - \sqrt{n!}$

e) $n \operatorname{th} 2n - 2n \operatorname{th} n$ f) $\frac{n!}{n^n}$ g) $\frac{2n-\sqrt{n^3}}{3n+\log n}$ h) $\frac{\sqrt[3]{8n^7(1-n^2)} - n^3 \operatorname{sen}\frac{1}{n}}{(n+1)^3}$ i) $\left(n^5+n+7\right)^{1/n}$

j) $\left(2-\frac{1}{n}\right)^{2n}$ k) $\left(\frac{3n^2+10}{\sqrt{10n^4+3n}}\right)^n$ l) $\left(\frac{2^{2n+1}+3^n}{2^{2n-1}+3}\right)^{\frac{\sqrt{n^2+2n}}{2n+\operatorname{sen} n}}$ m) $\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)^n$ n) $\left(\frac{n^2+1}{n^2+2}\right)^n$

9. Sean las sucesiones $a_n = \sqrt{4n^4+n} - n!$ y $b_n = \frac{2n-4(-1)^n}{n^2+4(-1)^n}$. **a]** Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
b] Para la que tiene límite finito, hallar razonadamente algún $N \in \mathbf{N}$ tal que para $n \geq N$ sus términos disten del límite menos de $\varepsilon = \frac{1}{10}$. **c]** Hallar el límite de las sucesiones $\left\{\frac{\operatorname{sen}(a_n)}{a_n}\right\}$ y $\left\{\frac{\operatorname{sen}(b_n)}{b_n}\right\}$.

10. Sean las sucesiones $a_n = \frac{2n - \sqrt{n^2+9n}}{9 - \sqrt{2n}}$ y $b_n = \frac{\mathrm{e}^n \mathrm{e}^{-2/n}}{\mathrm{e}^{3n} + \mathrm{e}^{-n}}$. **a]** Calcular razonadamente su límite.
b] Para la que tiene límite finito, dar razonadamente algún $N \in \mathbf{N}$ tal que para $n \geq N$ sus términos disten del límite menos de $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

11. Sean: $c_n \to 0$, $b_n \to 1$, $i_n \to \infty$, $d_n \to -\infty$ y a_n acotada. ¿Qué se puede decir sobre la convergencia de:
$\{i_n + d_n\}$, $\{c_n + a_n\}$, $\{c_n i_n\}$, $\{i_n a_n\}$, $\{b_n a_n\}$, $\left\{\frac{c_n}{a_n}\right\}$, $\left\{\frac{b_n}{c_n}\right\}$, $\left\{\frac{i_n}{d_n}\right\}$, $\{i_n^{c_n}\}$, $\{b_n^{i_n}\}$?

12. Probar por inducción que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ y hallar el límite de $\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

13. Hallar una sucesión cuyos 5 primeros términos sean $-1, \frac{3}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{7}{24}, -\frac{9}{120}$ y precisar si converge.

14. Definimos la sucesión $\{a_n\}$ mediante: $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, $a_1 = \sqrt{2}$. Probar que tiene límite y calcularlo. [Demostrar por inducción que $a_n < 2$ y probar que $\{a_n\}$ es creciente].

15. Hallar el límite de $a^{1/n}$ para todo $a \geq 0$, sin hacer uso de teoremas no demostrados.

16. Precisar las funciones f que cumplen la condición:
a) $\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$
b) $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$

17. Si $f(x) = \frac{\arctan x}{x+5}$, razonar si es cierto que $\forall \varepsilon > 0\ \exists M$ tal que si $x > M$ entonces $|f(x)-1| < \varepsilon$.

18. Sean $f(x)=\frac{2x-\operatorname{sen}x}{x+2\operatorname{sen}x}$ y $L=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$. Hallar un M tal que $|f(x)-L|<0.1$ si $x>M$.

19. Utilizando únicamente las definiciones probar que: a) $\lim\limits_{x\to\infty}(4x+100\cos x)=\infty$, b) $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$,
y que es falso: a) $\lim\limits_{x\to 2}3x=5$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{sen}x=0$.

20. Probar que $f(x)=x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $f(0)=0$ y $g(x)=\sqrt{|x|}-5x$ son continuas en 0 con la definición ε-δ . En particular, determinar un δ para $\varepsilon=1$ y $\varepsilon=0.01$.

21. Sea $f(x)=x\arctan\frac{1}{x-2}$, $f(2)=\pi$. **a]** Probar que tiene límite en $x=0$ usando sólo la definición $\varepsilon-\delta$. **b]** Estudiar si f es continua en $x=2$.

22. Sea $f(x)=x^2-x^2\arctan\frac{2}{x}$. Hallar $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. Probar que tiene límite en $x=0$ con la definición $\varepsilon-\delta$.

23. Sea $f(x)=\log\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{x}\right)$. Hallar su dominio y calcular, si existe, $\lim\limits_{x\to 2/3^+}f(x)$.

24. Sea $f(x)=\dfrac{2x}{4-\sqrt{x^2-9}}$. **a]** ¿Es par o impar? **b]** Hallar el dominio de f . **c]** Hallar razonadamente el límite de f cuando: i) $x\to\infty$, ii) $x\to 5^+$, iii) $x\to-3^-$, iv) $x\to-\infty$.

25. Sean $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$ (parte entera), $x>0$; $g(x)=\cos\frac{1}{x}$; $h(x)=\frac{\tan x}{x^2}$; $k(x)=\begin{cases}|2-x| \text{ si } x<3\\ x-4 \text{ si } x\geq 3\end{cases}$.
Determinar los puntos a para los que dichas funciones tienen límite en a ; son continuas en a ; poseen límites laterales en a . Ver si tienen límite cuando x tiende a ∞ .

26. Determinar (si existen) los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{sen}|x|-x}-1}{1-\log(x+\cos x)}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{7x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{3+2x}{x+5x^2}-\frac{3}{x}\right]$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x-\operatorname{sen}2x}{2x+3\operatorname{sen}4x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0^+}\log\frac{1}{x}$;

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)^2}{x^2-1}$; g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{2x^2}-\sqrt{2x^2-6x}\right]$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{th}(\operatorname{ch}x-\cos x)$; i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$;

k) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{2}{\log x}-\frac{3}{\sqrt{\log x}}\right]$; l) $\lim\limits_{x\to 1}e^{-1/|x-1|}$; m) $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{sh}(\log x)$; n) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x-1}$; ñ) $\lim\limits_{x\to 0}e^{1/x}\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$.

27. Sea $g(x)=2\operatorname{sen}x+\cos 2x$. **a]** Precisar todos los reales x que cumplen $g(x)=\frac{3}{2}$. **b]** Probar que g se anula en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$. **c]** ¿Es g una función inyectiva en todo su dominio?

28. Sea $g(x)=\log\left(3-\frac{5}{x-1}\right)$. **a]** Hallar su dominio. **b]** Precisar si $g(c)=0$ para algún c del intervalo $(0,3)$. **c]** Hallar el límite de g cuando: i) $x\to\infty$, ii) $x\to 1^-$, iii) $x\to 8/3^+$.

29. Probar que $x^5=2^x$ tiene una solución i) menor que 2 , ii) mayor que 2 .

30. Estudiar si el polinomio $P(x)=4x^4+2x-1$ se anula o no en el intervalo $[-1,1]$.

31. Supóngase que f es continua en $[a,b]$ y que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué se puede decir de f ?

32. Sea $f(x)=\log|x-1|-\cos x$. ¿Existe $c\in(0,2)$ con $f(c)=0$? ¿Alcanza su valor mínimo en $[0,4]$?

33. Probar que si f es continua en $[a,\infty)$ y $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ es finito, entonces f es acotada en $[a,\infty)$. ¿Alcanza siempre f su valor máximo en dicho intervalo?

34. Supóngase f continua en $[a,b]$ y sea c un número cualquiera. Demostrar que existe un punto de la gráfica de f en $[a,b]$ para el que la distancia a $(c,0)$ se hace mínima. ¿Es cierto lo anterior si sustituimos $[a,b]$ por (a,b) ? ¿Y si sustituimos $[a,b]$ por $\mathbf{R}$?

35. Demostrar que $f(x)=7x-5$ es uniformemente continua en $\mathbf{R}$ y que $g(x)=x^2$ no lo es.

Derivadas en R

1. Hallar la primera y segunda derivadas de las funciones siguientes indicando su dominio:

a) $f(x)=\arctan(\log x^2)$; b) $g(x)=\arccos\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)$.

2. Hallar los x que anulan las derivadas segundas de: a) $f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{3x+1}}$, b) $g(x)=\ln(1+\cos x)$.

3. Sea $f(x)=2x+\frac{3}{\operatorname{sen} x}$. Hallar todos los reales x tales que i) $f'(x)=0$, ii) $f''(x)=0$.

4. Sea $f(x)=|x^2-4|$. Determinar los x tales que $f(x)<3$. Hallar, si existen, $f'(-3)$ y $f'(2)$.

5. Sea $f(x)=\log\big(1-|x^2-1|\big)$. Precisar su dominio. Hallar, si existen, $f'(1)$ y $f'(-\frac{4}{3})$.

6. Precisar si es cierta la implicación: f y g derivables en todo **R** y $f(x)\leq g(x)\ \forall x \Rightarrow f'(x)\leq g'(x)\ \forall x$.

7. Demostrar que la derivada de una función par es impar y viceversa. ¿Es periódica la derivada de una función periódica?

8. Hallar las derivadas de las funciones inversas $(\mathrm{sh})^{-1}$, $(\mathrm{ch})^{-1}$ y $(\mathrm{th})^{-1}$.

9. Hallar y dibujar la ecuación de la recta tangente en $x=2$ a las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, b) $g(x)=\frac{3x}{7}-12$, c) $h(x)=3x^2+2x-1$, d) $k(x)=(2x-3)^{-7/3}$.

10. Sea $f(x)=x\arctan\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$, $f(0)=0$. Estudiar si f es continua y derivable en $x=0$. Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=\frac{5\pi}{2}$.

11. Hallar los puntos de la elipse $4x^2+9y^2=40$ en los que la recta tangente tiene pendiente $-\frac{2}{9}$.

12. Hallar b y c tales que la parábola $y=x^2+bx+c$ sea tangente a la recta $y=x$ en $x=1$.

13. Hallar la ecuación de la elipse con sus ejes paralelos a los coordenados y centrada en el origen que tiene por tangente la recta $5y+4x=25$ en un punto de abscisa $x=4$.

14. Hallar la recta tangente a la curva $y^4-4xy^2+2x=2$ en el punto $(1,2)$.

15. Probar que la tangente a la gráfica de $f(x)=\frac{1}{x}$ corta a la gráfica de f sólo en el propio punto $(a,\frac{1}{a})$.

16. Hallar el punto de corte de las tangentes a la gráfica de $g(x)=\left|1-\frac{4}{x}\right|$ en $x=-2$ y $x=2$.

17. Encontrar la recta que pasa por $(4,3)$ y es paralela a la recta tangente a $f(x)=\ln(1+\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x})$ en $x=0$.

18. Un astronauta viaja de izquierda a derecha sobre la curva $y=x^2$. Al desconectar el cohete viajará a lo largo de la tangente a la curva. ¿En qué punto debe desconectar para alcanzar i) $(4,9)$, ii) $(4,-9)$?

19. Hallar los a tales que la recta tangente a la gráfica de $f(x)=(x^2-3)\mathrm{e}^{-x}$ en $x=a$ pase por $(1,0)$.

20. ¿Bajo qué ángulos se cortan las curvas $y=\operatorname{sen} x$, $y=\cos x$?

21. Sea $f(x)=3+x^5(x-3)^4$. Probar que su derivada f' tiene al menos un cero en el intervalo $(0,3)$.

22. Probar que f' acotada en un intervalo $I \Rightarrow f$ uniformemente continua en I . Deducir que $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ lo es en todo **R** .

23. Sea $f(x)=x+2\cos x$. Hallar, si existe, el valor mínimo de f en el intervalo $[0,1]$. Probar que existe f^{-1}, función inversa de f para $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, y hallar la derivada $(f^{-1})'(2)$.

24. Hallar (si existen) los valores máximo y mínimo de:

a) $f(x)=x+2|\cos x|$ en $[0,\pi]$. b) $g(x)=\frac{e^x}{1-|x|}$ en $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right]$

c) $h((x)=\operatorname{arc\,sen} x+\sqrt{3}\log|2-x|$ en su dominio.

25. Determinar los valores máximo y mínimo que alcanza $f(x)=|4x-3|-x^2$ en el intervalo $[-3,3]$. ¿Existe algún $x\in(0,2/3)$ para el que $f(x)=0$?

26. Sea $f(x)=\arctan x-x^2-2$. Hallar sus valores máximo y mínimo en $\left[0,\sqrt{3}\right]$. Precisar cuántas veces se anula f en el intervalo $[0,1]$.

27. Probar que si $x>0$ es $x+\frac{4}{x}\geq 4$: i) usando sólo desigualdades, ii) hallando su valor mínimo.

28. Sea $f(x)=\arctan\frac{2}{x-3}$, $f(3)=\frac{\pi}{2}$. **a]** Estudiar donde es f continua y derivable. **b]** Hallar $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. **c]** ¿Se anula f en $[1,5]$? **d]** Probar que posee función inversa f^{-1} en $[4,\infty)$ y hallar $\left(f^{-1}\right)'(\frac{\pi}{4})$.

29. Probar que $f(x)=x^2-\cos x-x\operatorname{sen} x$ tiene exactamente dos ceros.

30. Estudiar cuántas veces se anulan las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}-x-1$ en $[\frac{\pi}{2},\pi]$ b) $g(x)=e^{-x}+3x$ en $[-2,0]$

31. Sea $f(x)=x^2\left(1-x^2\right)^{-1/2}$. Determinar su dominio e intervalos de crecimiento y decrecimiento. Probar que existe un único $c\in\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ tal que $f(c)=\frac{2}{3}$.

32. Sean $P(x)=x^5+3x^4-7x^3-21x^2+10x+30$ y $Q(x)=x^3-3x^2-5x+15$. Hallar el $\operatorname{mcd}(P,Q)$. Hallar las raíces de P y de Q. Realizar el producto $P\cdot Q$ y la división P/Q.

33. Ver que $P(x)=2x^5+3x^4+4x^3+6x^2+2x+3$ tiene raíces múltiples y hallar todas sus raíces.

34. Probar que si c es raíz real de $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ se cumple: $|c|\leq\text{máx}\left\{1,\frac{1}{|a_n}\left[|a_0|+\cdots+|a_{n-1}|\right]\right\}$.

35. Precisar cuántos ceros reales tiene el polinomio $P(x)$ cuya derivada es $P'(x)=3x^2+2x-8$ y tal que la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto de abscisa $x=0$ pasa por $(1,-1)$.

36. Precisar cuántas raíces de los siguientes polinomios hay en los intervalos que se indican:

a) $P(x)=3x^3-x^2+x-1$ en $(-\infty,0)$ y en $(1,\infty)$ b) $P(x)=x^4+x^3+x^2+x$ en $(-\infty,0)$ y en $(0,1)$

c) $P(x)=x^4+8x-1$ en $(-3,-2)$ y en $(0,1)$ d) $P(x)=2x^5+8x^3+5x-6$ en $(-\infty,0)$ y en $(0,\infty)$

37. Dibujar la gráfica de $f(x)=\left|\log(x+1)-1\right|$ a partir de la de $\log x$. Hallar los x tales que $f(x)<1$.

38. Sea $g(x)=x^2-8\log(x+3)$. **a]** Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en $x=-2$. **b]** Precisar en qué intervalos crece y decrece g y ver si se anula g''. **c]** Hallar $\lim_{x\to-3^+} g(x)$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)$. **d]** Probar que g se anula en el intervalo $[0,5]$. ¿Cuántas veces se anula en todo su dominio?

39. Sea $g(x)=4\log(x^3+8)-3x$. **a]** Determinar su dominio. **b]** Hallar, si existen, sus valores extremos en el intervalo $[0,2]$. **c]** Calcular $\lim_{x\to\infty} g(x)$ y precisar cuántas veces se anula g en el intervalo $[0,\infty)$.

40. Sea $g(x)=\log\left(2+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)$. a) Determinar su dominio y asíntotas. b) Hallar sus extremos en $[3,6]$. c) Precisar cuántas veces se anula g en su dominio.

41. Sea $f(x)=(x^2+1)\,e^{3x-x^2}$. Hallar $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Probar que f' se anula en un punto del intervalo $(1,2)$ y que no lo hace más veces en su dominio. Estudiar cuántas soluciones tiene $f(x)=1$.

42. Sea $h(x)=(x^3+3x+1)\,e^{-x}$. **a]** Hallar el límite de la sucesión $\{h(a_n)\}$, si $a_n=\frac{2^{n+1}}{3^{n/2}+2^n}$. **b]** Hallar, si existen, los valores extremos de h en: i) $[0,3]$, ii) $[0,\infty)$. **c]** Determinar la imagen de h .

43. Dibujar las gráficas de las funciones:

a) $3x^4-4x^3$ b) $\frac{x}{x^2+1}$ c) $\frac{x}{4-x^2}$ d) $\frac{x^2-4}{x^2-9}$ e) $\sqrt{\frac{x+3}{x^2}}$ f) $x\sqrt{\frac{x+3}{x^2}}$

g) $x^3\sqrt{4-x^2}$ h) $3x^{2/3}+2x$ i) $\operatorname{sen}^2 x$ j) $\tan\frac{x}{2}$ k) $3\operatorname{sen}(x-2)$ l) $\operatorname{sen}\frac{\pi x}{180}$

m) $1+|\tan x|$ n) $\frac{x}{4}-\frac{1}{\cos x}$ ñ) $\cos^2 2x-|\cos x|$ o) $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ p) $\operatorname{sen}(\tan x)$

q) $\operatorname{arc\,sen}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ r) $e^{-|x|}$ s) e^{-x^2} t) $\frac{1}{2e^x-1}$ u) $\log(x^2-x)$ v) $x\log|x-2|$

44. Discutir según los valores a las formas que puede tener la gráfica de: a) $1+ax^2+x^4$, b) $\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}$.

45. Una farola, que tiene su luz a 3 m de su base, ilumina a un peatón de 1.75 m que se aleja a una velocidad constante de 1 m/s . ¿A qué velocidad se mueve el extremo de su sombra? ¿A qué velocidad crece dicha sombra?

46. Un globo se eleva verticalmente desde el suelo a 100 m de un observador, a una velocidad de 2 m/s . ¿A que ritmo crece el ángulo de elevación de la línea de visión del observador cuando el globo está a una altura de i) 10 m , ii) 100 m ?

47. Un tren parte de una estación en línea recta hacia el este a 100 km/h . 12 minutos después parte otro hacia el norte a 50 km/h . ¿A qué ritmo cambia la distancia entre los trenes 1 hora después de la partida del segundo?

48. El radio de una esfera aumenta con velocidad $v=2$ cm/s. ¿A qué velocidad aumentan la superficie y el volumen de la esfera cuando $r=10$ cm?

49. Hallar el a para el que la suma de los cuadrados de las soluciones de $x^2+ax+a-2=0$ es mínima.

50. Hallar el valor mínimo de la suma de los arcos tangentes de dos reales ≥ 0 cuya suma sea 1 .

51. a) Hallar dos números x,y tales que $|x|+|y|=1$ y tales que la suma de sus cuadrados sea i) máxima, ii) mínima. b) Dibujar en el plano xy los puntos que cumplen $|x|+|y|=1$.

52. Sea O el punto $(2,1)$, y sea L la gráfica de $f(x)=1-3x$. ¿Cuál es el punto de L que dista menos de O ? ¿Y el que dista más?

53. Hallar el punto de la parábola $y=x^2$ más cercano al punto $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$.

54. Hallar los puntos de la hipérbola $y^2-x^2=1$ más cercanos al punto $\left(\frac{3}{2},0\right)$.

55. Dibujar la elipse $x^2+4y^2-2x=24$, hallar la ecuación de su recta tangente en el punto $(4,2)$ y el punto de esta recta más cercano al origen. Hallar los puntos de la elipse situados a mayor y menor distancia de: i) $(4,0)$, ii) $(5,0)$.

56. Hallar los puntos de la curva $3y^2=21+20x-x^4$ situados a mayor y menor distancia del origen.

57. a) Precisar el número de raíces reales de $P(x)=3x^4-3x+1$. b) Determinar si el punto de la curva $y=x^3$ más cercano al punto $(0,1)$ está a la derecha o a la izquierda de $x=1/2$.

58. Hallar el punto P sobre la gráfica de $f(x)=e^{-x}$ en el primer cuadrante para el que es máxima el área del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a dicha gráfica en P y cuyos catetos están sobre los ejes coordenados.

59. Hallar la forma del cono de mayor volumen entre aquellos de superficie fija (base incluida).

60. Determinar los puntos de la parte de la gráfica de $g(x) = 1-(x-2)^3$ contenida en $x,y \geq 0$, para los que la recta tangente en ellos corta el eje y en el punto i) más alto, ii) más bajo.

61. Determinar el área máxima que puede tener un rectángulo que tenga dos lados sobre los semiejes x,y positivos y el vértice opuesto sobre la gráfica de $f(x) = \left[x^3+4\right]^{-1/2}$.

62. Un lanzador de peso es capaz de lanzar desde una altura de 1.5 m sobre el suelo con una velocidad de 12 m/s . Hallar el ángulo con el que debe hacerlo para llegar lo más lejos posible. ¿Qué longitud puede alcanzar (tomar g=10 m/s^2)?

63. Probar que el polinomio $P(x) = x^5+x+9$ tiene una única raíz real. Encontrar, utilizando el teorema de Bolzano, un intervalo de longitud $1/4$ en el que se encuentre dicha raíz. Precisar el valor de la raíz utilizando el método de Newton.

64. Sean los polinomios cúbicos: a) $P(x)=x^3+x-17$, b) $Q(x)=2x^3-7x^2+1$, c) $R(x)=16x^3-12x^2+1$. Dibujar sus gráficas. Hallar sus raíces reales a partir de las fórmulas de los apuntes. Hallar aproximadamente dichas raíces utilizando el método de Newton.

65. Hallar aproximadamente todas las soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

a) $3x^3-2x^2-6x+4=0$ b) $x^4+4x^2-1=0$ c) $x^5+2x^3+x+2=0$

d) $x^2-\cos x - x \operatorname{sen} x=0$ e) $x \operatorname{th} x = 1$ f) $\log|x| = x-1$

66. Hallar aproximadamente los cortes con $y=0$, los extremos y los puntos de inflexión de

$$Q(x) = 9x^4+8x^3+28x^2+24x+3 \,,\quad P(x) = 2x^5-15x^3+20x^2+5x+3 \quad \text{y} \quad f(x) = e^x - x^3 \,.$$

67. Aplicar el método de Newton partiendo de $x_0=1$ a las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt[3]{x}$.

68. Ver que $f(x)=e^{x/3}$ es contractiva en $[0,2]$ y aproximar el único cero de $x=e^{x/3}$ en dicho intervalo.

Problemas adicionales (17-18)

Series, Taylor y límites indeterminados

1. Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes:

a) $\sum \frac{\sqrt[3]{4n+5}}{\sqrt[4]{n^5+3}}$ b) $\sum n^2(\frac{e}{3})^n$ c) $\sum \left[\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1\right]$ d) $\sum \frac{7^n+\log n}{n!+n^3}$ e) $\sum \frac{3n+1}{n(2n-1)}$

f) $\sum \frac{n}{(-3)^n}$ g) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ h) $\sum (-1)^n \frac{2n+(-1)^n}{n^3+(-1)^n}$ i) $\sum (-1)^n e^{-1/n^2}$ j) $\sum \frac{\operatorname{sen} n}{n^{3/2}}$

k) $\sum 3^{n\cos 2}$ l) $\sum \cos\frac{\sqrt{n+1}}{n!}$ m) $\sum \arctan\frac{1}{n^2}$ n) $\sum (-1)^n \arctan\frac{1}{n^2}$ ñ) $\sum \log\left(1+\frac{2}{n}\right)$

2. Estudiar la convergencia de la serie $\sum a_n$, siendo $a_{n+1} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2} a_n$ y $a_1 = 1$.

3. Ver para qué $c \in \mathbf{R}$ convergen las series:

a) $\sum(\sqrt{n^c+1}-\sqrt{n^c})$ b) $\sum \frac{2^n c^n}{n!}$ c) $\sum \frac{c^{n^2-5n}}{n^3}$ d) $\sum \frac{n^4 c^{2n}}{(n-1)!}$ e) $\sum \frac{(2c-1)^{n^2}}{n+1}$

f) $\sum \frac{(-4)^n (c+1)^{2n}}{(2n)!}$ g) $\sum \frac{c^n}{e^{\sqrt{n}}}$ h) $\sum \frac{n^2 c^{2n}}{\pi^n}$ i) $\sum \frac{c^n}{n^2-\sqrt{2n}}$ j) $\sum \frac{c^n}{n+\log n}$

4. Hallar la suma de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11}}$ con error menor que 10^{-5} .

5. Precisar los x para los que converge $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$ y hallar su suma. Para i) $x=\frac{1}{4}$, ii) $x=-\frac{1}{4}$, ¿cuántos términos hay que sumar para aproximar el valor exacto con error menor que 10^{-3} ?

6. Probar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+5^n}$ converge y que su suma está entre 0.213 y 0.215 .
[Usar los tres primeros términos y acotar el resto mediante una serie geométrica].

7. Utilizando series de potencias escribir la fracción (fracción generatriz) que coincide con los siguientes racionales expresados mediante decimales: a) 2.713713... , b) 0.2345757...

8. Una pelota cae desde una altura inicial de 1 m sobre una superficie horizontal. Si en cada rebote alcanza un 80 % de la altura anterior, ¿qué distancia recorre hasta pararse?

9. Una persona y su perro caminan a una velocidad de 1 m/s hacia su casa. A 100 m de la puerta el perro comienza a correr yendo y viniendo de la persona a la puerta a 4 m/s , hasta que la persona entra en casa. ¿Qué distancia recorre el perro desde que empieza a correr?

10. Estudiar en qué subconjuntos de **R** convergen uniformemente las siguientes $f_n(x)$:

a) $x^{1/n}$ b) $\frac{\operatorname{sen} nx}{n}$ c) $\cos^n x$ d) $\frac{x}{\sqrt{n^3+x}}$ e) $nx^2 e^{-nx^2}$

11. Estudiar para qué x convergen, y si lo hacen uniformemente en el intervalo que se indica:

a) $\sum \frac{x}{n+1}$ en $[0,1]$ b) $\sum e^{-nx^2} \operatorname{sen} nx$ en $[1,\infty)$ c) $\sum \frac{x^n}{(n+1)2^n}$ en $[-1,1]$ d) $\sum \frac{x^2+\arctan n}{\sqrt{1+n^3x^2}}$ en $[1,2]$.

12. Sea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)+x^{2n}}{(n+1)^2 4^n}$. Ver para qué x converge. Hallar un racional que aproxime la suma para $x=0$ con error $< 10^{-3}$. Probar que converge uniformemente en el intervalo $[0,1]$.

13. Sumar la serie $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{[x+1][2x+1]} + \frac{x}{[2x+1][3x+1]} + \cdots$ ¿Converge uniformemente en $[0,\infty)$?

14. **a]** Precisar si la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)\,5^n}$ converge para: i) $x=5$, ii) $x=\pi$, iii) $x=3e^{2/3}$.
b] Probar que la suma de la serie para $x=-1$ es menor que $\frac{9}{20}$.

15. Sea $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}x^{3n}$. Precisar para qué x converge la serie y hallar el valor de $f(-1)$.

16. Sea $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^{n+1}x^{2n}$. Precisar para qué x converge la serie. Probar que $f\left(\frac{1}{4}\right)>3$.

17. Sea $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^{n+1}}{n!}$. Precisar para qué x converge la serie y probar que $f'(1)>20$.

18. Precisar para qué valores de x converge la serie $\sum\frac{2^n x^n}{\arctan n}$. ¿Converge para $x=\log\frac{3}{2}$?

19. Hallar los x para los que converge $\sum(-2x)^{3n}$. Decidir si converge para $x=\arctan\frac{3}{5}$.

20. Escribir el polinomio $P(x)=x^3-2x^2-x+5$ ordenado en potencias de $(x-2)$.

21. Hallar 4 términos no nulos del desarrollo de Taylor en $x=0$ de $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ por 3 vías diferentes [haciendo producto, composición o división de series, usando el de $(1+x)^p$, derivando otra serie o derivando f].

22. Calcular a partir de la definición P_3 , el polinomio de Taylor de grado 3 en $x=0$ de $f(x)=\tan x$. Determinar si $P_3(1)$ es mayor o menor que $\tan 1$ sin utilizar calculadora.

23. Hallar (sin calculadora) un racional que aproxime con un error menor que 10^{-2} a i) $e^{-1/3}$, ii) $e^{1/3}$.

24. Probar que $\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$. Usando el desarrollo de $\arctan x$, calcular π con error $<10^{-3}$.

25. Calcular el valor de $\sqrt[10]{1.2}$ con error menor que 0.01 . Hallar el valor de $\sqrt{1/2}$ a partir de un polinomio de Taylor de orden 3 y dar una cota del error cometido.

26. Escribir la serie de Taylor de $f(x)=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$, hallar su radio de convergencia y precisar donde la serie coincide con f. Aproximar con el P_3 de Taylor el valor de $\log 2$ dando una cota del error.

27. Sea $P_3(x)$ el polinomio de Tayor de orden 3 en $x=e$ de $f(x)=x\log x$.
¿Se comete un error menor que 10^{-3} si se aproxima $f(3)=\log 27$ con el valor de $P_3(3)$?

28. Hallar el desarrollo de Taylor hasta x^6 de la función $f(x)=[36+x^3]^{-1/2}$. Hallar un racional que aproxime con error menor que 10^{-2} : i) $f(2)$, ii) $f(-1)$.

29. Utilizando polinomios de Taylor determinar con un error menor que 10^{-3} el valor de:
a) $\operatorname{sen} 3$ b) e^{-2} c) $\log\frac{1}{2}$ d) $\operatorname{sh}(-1)$ e) $\operatorname{ch}\frac{1}{2}$

30. Hallar los 4 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Taylor en $x=0$ de:
a) $e^{-x}\cos x$ b) $[\arctan x]^2$ c) $\frac{\operatorname{ch} x}{(1+x)^3}$ d) $\frac{\cos 2x}{1+x^2}$ e) $\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

31. Desarrollar en $x=0$, hallando su término general e indicando dónde coinciden función y serie:
a) $2xe^{-2x}$ b) 3^{x^2} c) $-\log(1-2x)$ d) $\frac{5x-1}{x^2-x-2}$ e) $(1+x)^{-2}$

32. Hallar la suma de las siguientes series:
a) $\sum_{n=2}^{\infty} e^{1-4n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ d) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{n^2-1}$ e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n(n+1)}$ f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(2n+1)}$ g) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}$

33. a) Hallar el A_4 de la fórmula de interpolación de Newton para puntos equidistantes.
b) Hallar el Q_4 que interpola $\operatorname{sen}^2\pi x$ en 0, $1/4$, $1/2$, $3/4$ y 1 . Aproximar con él $\operatorname{sen}^2\frac{7\pi}{12}$.

34. Hallar los polinomios Q_1 , Q_2 y Q_3 de interpolación de $\cos x$, respectivamente, en los puntos:
a) 0 y $\frac{\pi}{3}$. b) 0, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$. c) 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$. Utilizar Q_2 para aproximar el x tal que $\cos x=x$.

35. Sea $f\in C^4$. Probar que: $f'(a)=\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}+o(h)$ y $f''(a)=\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}+o(h)$.
Si $f(x)=4^x$, aprovechar lo anterior para aproximar $f'(0)$ y $f''(0)$ tomando $h=1/2$.

36. Hallar un polinomio cúbico $P(x)$ tal que $\frac{x\cos x-P(x)}{(x-1)^3}$ tienda a 0 cuando x tiende a 1 .

37. Hallar un polinomio P tal que $\lim\limits_{x\to 0} x^{-7}\big[\sqrt{1-x^4}-P(x)\big]=0$. ¿Es único dicho polinomio?

38. Calcular los siguientes límites indeterminados cuando $x\to 0$ de las siguientes funciones:

a) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$ b) $\frac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\operatorname{sen}^2 x-x^2}$ c) $\frac{\operatorname{ch} x-\cos x}{x^2}$ d) $\frac{\operatorname{sen} x\cos x-\arctan x}{\log(1+x^3)}$

e) $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ f) $\frac{\log[\cos 2x]}{\log[\cos 3x]}$ g) $\frac{e^x-e^{\operatorname{sen} x}}{x^3}$ h) $\frac{(1+3x)^{1/3}\log(1+2x)-2x}{\operatorname{sen} x-x}$

39. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ para el único a para el que es finito: a) $f(x)=\frac{\cos x-e^{ax}}{\operatorname{sen} x+\log(1-x)}$, b) $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}-\frac{a}{x^2}$.

40. Hallar el límite cuando $x\to 0$ de $\frac{\operatorname{sen} x^2-x^2}{x^{2n}}$ y $\frac{\tan x}{x^n}$ para todos los n enteros en que exista.

41. Calcular los siguientes límites indeterminados cuando x tiende al a indicado:

$a=1^-$: $\log x\log(1-x)$. $a=\infty$: $\frac{1-x\arctan(1/x)}{1-\cos(1/x)}$, $x^4\big[\cos\frac{1}{x}-e^{-1/x^2}\big]$, $\big[\cos\frac{1}{x}\big]^{\log x}$.

42. Determinar (si existe, finito o infinito) el límite cuando i) $x\to 0$, ii) $x\to\infty$, iii) $x\to-\infty$ de:

a) $f(x)=\frac{x^2-\operatorname{sen}^2 x}{\log(1+x^4)}$. b) $g(x)=x[\cos\frac{1}{x}-1]$ c) $g(x)=\frac{x e^{-x}\sqrt{1+x}-\log(1+x)}{\arctan(x^3)}$

43. Hallar el límite cuando x tiende a 0 , ∞ , -1^+ de:

a) $\frac{\log(1+2x^2)-\log(1+x^2)}{\arctan x^2}$ c) $\frac{x-\operatorname{sen} x}{x\arctan x^2}$ c) $\frac{\arctan x-\operatorname{sh} x}{x(\operatorname{ch} x-\cos x)}$ d) $\frac{\log(1+x)\sqrt{1+x}-x}{\arctan x^3}$

44. Precisar para qué valores de b tiene límite $x^{-b}[\sqrt{1+9x^4}-1]$ si i) $x\to 0^+$, ii) $x\to\infty$.

45. **a]** Hallar el desarrollo de Taylor hasta x^5 de la función $f(x)=\arctan x\cos 2x$.
b] Hallar el límite de $\frac{f(x)-x}{x^4-x^5}$, cuando x tiende hacia: i) 0^+ , ii) ∞ , iii) 1^- .

46. Hallar el coeficiente de x^4 en el desarrollo de Taylor de $f(x)=\frac{\arctan(2x)}{\sqrt{1+x}}$ y deducir el valor de $f^{(4)}(0)$.

47. a) Hallar el desarrollo de Taylor hasta x^6 de la función $f(x)=x^2-\operatorname{sen} x\operatorname{sh} x$. ¿Cuánto vale $f^{iv}(0)$?
b) Para $n=1,2,\dots$, hallar, si existe (finito o infinito), $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}$. **c]** Precisar si existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

48. Sea $f(x)=\cos x^2\log(1+2x^2)$. **a]** Calcular su desarrollo de Taylor hasta x^8 y hallar el valor de $f^{vi}(0)$.
b] Para $n=1,2,\dots$, hallar, si existe (finito o infinito): i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}$, ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^n}$.

49. Definiendo $f(0)$ para que sean continuas, estudiar si existen $f'(0)$ y $f''(0)$:

a) $x\arctan\frac{1}{x}$ b) $\frac{\tan x}{x}$ c) $\frac{1}{|x|}\log(1+|x|)$ d) $\arctan(\log x^2)$

50. Estudiar la continuidad de $f(x)=\big(1-\frac{1}{x}\big)\log|1-x^2|$, $f(\pm 1)=f(0)=0$. ¿Existe $f'(0)$? Probar que $\exists c\in(0,1)$ con $f'(c)=0$.

51. Sea $f(x)=e^{4/x-4/x^2}$, $f(0)=0$. Precisar los puntos en que es continua y derivable, hallar sus extremos, puntos de inflexión y asíntotas y dibujar su gráfica. Utilizando $P_{1,1}$, polinomio de Taylor de grado 1 en $x=1$, dar un valor aproximado de $f(1.1)$ y detrminar si es mayor o menor que el exacto.

52. Dibujar las gráficas de las siguientes funciones:

a) $x\log x^2-x^2$ b) $x^{-3}e^{-6/x}$ c) $x^{-1}e^{-x}$ d) $\operatorname{th}\frac{1}{x}$

e) $x^{1/x}$ f) $x\arctan\frac{1}{x}$ g) $x^a\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $a\in\mathbf{R}$

53. Sea $f(x)=\operatorname{sen}x-x\cos x$. Dibujar su gráfica. Precisar para qué m existe: i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^m}$, ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}$.

54. Estudiar en qué puntos es continua la función: $f(x)=\frac{x^2\operatorname{sen}\pi x}{1-\cos\pi x}$ si $x\notin\mathbf{Z}$, $f(x)=0$ si $x\in\mathbf{Z}$.

55. Sea $f(x)=x^{-2}\operatorname{sen}^2\pi x$, $f(0)=\pi^2$. Determinar si existen $f'(0)$ y $f''(0)$. Dibujar su gráfica. Probar que existe la inversa f^{-1} en un entorno de $x=\frac{1}{2}$ y calcular la derivada de f^{-1} en $f(\frac{1}{2})$.

56. i) Sea $g(x)=\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{x})$. ¿Converge $\{g(\frac{4}{n})\}$? ¿Posee subsucesiones convergentes? Esbozar su gráfica.
ii) Sea $f(x)=x\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{x})$, $f(0)=0$. Estudiar si es continua y derivable en $x=0$. Hallar $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.
Dibujar la gráfica de f. Probar que el máximo absoluto de f en todo $\mathbf{R}$ se alcanza en un $x\in[2,3]$.

57. Calcular (justificando los pasos) el límite de las siguientes sucesiones:
a) $a_n=n^{-1}\log_2 n+n^2 2^{-n}$ b) $b_n=\frac{n^2-1}{3n}\operatorname{sen}\frac{n}{n^2-1}$ c) $c_n=n^3(1-\cos\frac{1}{n})\log(1+\frac{1}{n})$

58. Usando el teorema del valor medio encontrar el límite de la sucesión $a_n=n^{1/3}-(n+1)^{1/3}$.

59. Estudiar si $f(z)=|z|$ y $g(z)=|z|^2$ son continuas y derivables en $z=0$.

60. Estudiar si la función $f(z)=\sqrt{z}$ que hace corresponder a cada z la raíz con argumento principal más pequeño es continua en todo el plano complejo.

61. Probar que si $z,w\in\mathbf{C}$ entonces $\big||z|-|w|\big|\le|z-w|$. Probar que si la sucesión compleja $\{a_n\}$ converge entonces también lo hace la sucesión real $\{|a_n|\}$.

62. Hallar (si existe) el límite de las siguientes sucesiones de complejos:
$2^{-n/2}(1+\mathrm{i})^n$, $(\frac{1+5\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}})^n$, $2^{-n}(1+\mathrm{i})^n(1-\mathrm{i})^{-n}$, $(n-\mathrm{i})^3n^{-3}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n/(n+1)}$, $\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})/n}$, $\mathrm{e}^{-n\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}$.

63. Probar que converge $\sum\frac{(-\mathrm{i})^n}{\sqrt{n}}$, pero que no lo hace absolutamente.

64. Determinar si convergen: a) $\sum\frac{(4-3\mathrm{i})^n}{n!}$, b) $\sum\frac{2-n\mathrm{i}}{n^2}$, c) $\sum\mathrm{e}^{\mathrm{i}/n}$, d) $\sum\frac{\mathrm{i}^n}{n^2}$, e) $\sum\frac{1}{[2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}]n^2}$.

65. Estudiar si la serie $\sum n^7z^n$ converge cuando i) $z=\frac{4-3\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}$, ii) $z=\mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}}$.

66. Determinar la región del plano complejo en que converge la serie $\sum\frac{z^n}{\mathrm{e}^n+n}$.

67. Hallar el radio de convergencia de estas series de potencias complejas y decidir si convergen para
i) $z=\mathrm{i}$, ii) $z=-\mathrm{i}$, iii) $z=(1-\mathrm{i})^2$, iv) $z=1+\mathrm{e}\,\mathrm{i}$, v) $z=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|7+3\mathrm{i}|}$:

$$\sum\frac{(-1)^nz^n}{n^3}\qquad\sum\frac{2^nz^n}{n!}\qquad\sum\frac{n!z^n}{n^n}\qquad\sum\frac{\mathrm{i}^nn^nz^n}{2^n}\qquad\sum\frac{nz^n}{n+1}\qquad\sum\frac{\mathrm{i}^nz^n}{n+1}$$

68. Demostrar que $\mathrm{e}^{z+w}=\mathrm{e}^z\mathrm{e}^w$ multiplicando las series. Probar que $f(z)=\mathrm{e}^z$ toma todos los valores complejos menos el 0, que no es inyectiva y que tiene periodo $2\pi\mathrm{i}$.

69. Se define $\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\operatorname{Arg}(z)$, $z\neq 0$ $\big[\operatorname{Arg}(z)$, argumento principal de $z\big]$. Comprobar que $\mathrm{e}^{\ln z}=z$.
Hallar $\ln 1$, $\ln(-1)$, $\ln(2\mathrm{i})$, $\ln(1+\mathrm{i})$, $\ln(1-\mathrm{i})$. Estudiar la continuidad de $\ln z$.

70. Determinar si la siguiente igualdad es cierta para todo z complejo: $\operatorname{sen}(2z)=2\operatorname{sen}z\cos z$.

71. Resolver la ecuación $\cos z=4$.

72. Desarrollar en serie de Taylor en torno a $z=0$, determinando el radio de convergencia:

$$\frac{3z}{1+z-2z^2}\qquad\operatorname{sen}z\cos z\qquad\frac{\operatorname{sen}^2z}{z}\qquad\frac{\mathrm{e}^z}{1+z}$$

Integración en R

1. Utilizando exclusivamente la definición de integral calcular a) $\int_0^1 x\,dx$ y b) $\int_1^2 x^{-2}dx$.

2. Sea f acotada en $[a,b]$. Determinar si las siguientes implicaciones son verdaderas o falsas:

a) $f\in C^1[a,b] \Rightarrow f$ integrable en $[a,b]$ b) f integrable en $[a,b] \Rightarrow f$ alcanza su máximo en $[a,b]$

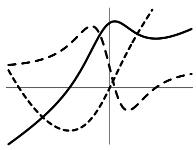
c) f decreciente en $[a,b] \Rightarrow f$ integrable en $[a,b]$ d) f integrable en $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f^2 = \left[\int_a^b f\right]^2$

3. Sea $f(x)=\begin{cases} x\,,\ x<1 \\ 0\,,\ x\geq 1\end{cases}$. ¿Es $F(x)=\int_0^x f$ continua en $x=1$? ¿Es derivable es ese punto?

4. Si $f(x)=\begin{cases} -1/x\,,\ x\leq -1 \\ 1\,,\ x>-1\end{cases}$ y $F(x)=\int_{-\mathrm{e}}^x f$, calcular: i) $F(-1)$, ii) $F(x)\ \forall x$. ¿Es F continua en $x=-1$?

5. Sea f definida para $x\in[0,7]$ por $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ para } 0\leq x\leq 4 \\ 5-x \text{ para } 4<x\leq 5 \\ -1 \text{ para } 5<x\leq 7\end{cases}$ y sea $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Dibujar $f(x)$.
Calcular $F(4)$, $F(5)$ y $F(7)$. Dibujar aproximadamente F y estudiar dónde es continua y derivable.

6. Sea f definida por: $f(x)=-1$ si $x\in(0,1)$; $f(x)=3-2x$ si $x\in(1,2)$; $f(0)=f(1)=f(2)=0$.
Hallar $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ y $\Phi(x)=\int_0^x F(t)dt$ para los $x\in[0,2]$ que exista.
Determinar dónde Φ tiene primera y segunda derivadas, calculando Φ' y Φ''.



7. En esta gráfica se pueden ver una función $f(x)$, su derivada $f'(x)$ y una primitiva $F(x)$. Identificar razonadamente cada curva con la función correspondiente.

8. Si $F(x)=x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}dt$, hallar $F''(5)$.

9. Derivar las siguientes funciones: a) $F(x)=\int_1^{x^3}\operatorname{sen}^3 t\,dt$; b) $G(x)=\int_1^x x\operatorname{sen} t^3\,dt$.

10. Siendo $f(x)=\int_0^x\sqrt{1+3t^4}\,dt$ y $g(x)=\mathrm{e}^{2x}$, hallar $(f\circ g)'(0)$ y $(g\circ f)'(0)$.

11. Sea $F(x)=\int_{1-2x}^x t\mathrm{e}^{-t^4}dt$. Hallar $F(1)$, $F'(1)$ y $(F\circ F)'(1)$. ¿Es $F(0)$ mayor o menor que $F(1)$?

11. Sea $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x^3+1}{\int_{-1}^x \operatorname{sen}t^3dt+x+4}$. Calcular, si existe, $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$.

12. Aproximar e con la definición $\log x=\int_1^x \frac{dt}{t}$ y las desigualdades $t^{-21/20}<\frac{1}{t}<t^{-19/20}$, $t>1$.

13. Sean $f(x)=\begin{cases} \frac{3x^3}{x^2-4}\,,\ x\in[-1,1] \\ x-2\,,\ x\in(1,2]\end{cases}$ y $F(x)=\int_{-1}^x f$. **a]** Hallar, si existe, $F'(1)$. **b]** Hallar $F(2)$. **c]** Probar que $0\leq F(0)\leq 1$.

14. Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $H(x)=\int_{\mathrm{e}^{x^2}}^4 \dfrac{\log t\,dt}{t+t^2}$ en el intervalo $[-1,1]$.

15. Sea $F(x)=\int_{-2}^{\sqrt{2x}}\frac{t^3\,dt}{8+t^2}$. Hallar $F'(2)$ y $F(2)$. Precisar el signo de $F(8)$. Ver si F es inyectiva en $[0,8]$.

16. Calcular $(f^{-1})'(0)$ si $f(x)=\int_\pi^x\left[1+\operatorname{sen}(\operatorname{sen}t)\right]dt$.

17. Sean $f(x)=\begin{cases} -2\,,\ 0\leq x<1 \\ \sqrt{x}\,,\ x\geq 1\end{cases}$ y $F(x)=\int_0^x f$. **a]** Calcular: i) $F(4)$, ii) $F(x)\ \forall x\geq 0$. ¿Es F continua en $x=1$? **b]** Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de F en $[0,4]$.

18. Sea $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x^2}$. Si $H(x)=\int_x^{2x}f(t)\,dt$, determinar el x para el que $H(x)$ es máximo.
Dibujar aproximadamente la gráfica de f y probar que el valor máximo de H es menor que $1/2$.

19. Precisar en qué $x>0$ toma su valor máximo $F(x)=\int_x^{2x}\frac{t\,dt}{t^4+4}$ y probar que ese valor máximo es $<\frac{1}{2}$.

20. Determinar en qué x del intervalo que se indica alcanzan su máximo y su mínimo las funciones:

a) $F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{t\,dt}{t^2-9}$ en $[-1,2]$ b) $G(x)=\int_{x}^{x+1}\frac{t\,dt}{t^2+2}$ en $\mathbf{R}$ c) $H(x)=\int_{x/2}^{x}\frac{dt}{6+t^3}$ en $[0,4]$

c) $J(x)=\int_{-2}^{3x-x^2}te^{t^4}dt$ en $[0,2]$ d) $K(x)=\int_{\pi}^{x}\operatorname{sen}^2 t\,dt$ en $[0,4\pi]$ e) $L(x)=\int_{0}^{x-x^3}\frac{dt}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^2 t}}$ en $[0,2]$

f) $M(x)=x-\int_1^x\cos(\operatorname{sen}t)\,dt$ en $[1,4]$ g) $N(x)=\int_{-x}^{x}\left[1-t^2\right]^{1/3}dt$ en $[0,3]$

21. Sean $f(x)=x\operatorname{sen}^2\pi x$ y $F(x)=\int_{-2}^{x}f$. Hallar el valor máximo de F en el intervalo $[0,2]$. Probar que el valor mínimo de F en ese intervalo es negativo y mayor que -2 .

22. Estudiar su crecimiento y precisar cuántas veces se anula $F(x)=\int_0^{x^2}e^{t^2}dt-e^{x^4}$ en $[0,\infty)$

23. Sea $F(x)=\int_{-1/x}^{1/x^2}e^{-t^4}dt$. Hallar $F'(1)$. Estudiar si la serie $\sum(-1)^nF(n)$ converge.

24. Precisar para todo $n\in\mathbf{N}$ en qué $x\geq 0$ alcanza su valor máximo la función $f_n(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{t^3+6n^6}$, y probar que la serie de funciones $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ converge uniformemente en $[0,\infty)$.

25. Decir en cada caso (sin hallar primitivas) cuál es el valor de la integral entre las tres opciones:

i) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^8 x\,dx$: a) $\frac{\pi}{4}-1$, b) $\frac{35\pi}{128}$, c) π .

ii) $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^3-8}$: a) $-\frac{\ln 3}{24}-\frac{\sqrt{3}\pi}{72}$, b) $\ln\frac{9}{8}$, c) $\frac{33}{4}$.

26. Calcular $\int_1^3\frac{x}{x+1}dx$, y decidir si esa integral es mayor o menor que 1 .

27. **a]** Calcular $\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{3+\cos x}dx$. **b]** Probar que su valor es menor que $\frac{1}{3}$.

28. Sea f continua en $\mathbf{R}$ y sea f una primitiva de f ¿Si f es impar, es necesariamente f par? ¿Si f es par, es necesariamente f impar? ¿Si f es periódica es necesariamente f periódica?

29. Calcular las siguientes primitivas:

a) $\int\frac{dx}{x^2+x-2}$ b) $\int\frac{dx}{x^3+x-2}$ c) $\int x\arctan x\,dx$ d) $\int x^3(\log x)^2dx$ e) $\int e^x\log(e^x+1)dx$

f) $\int\frac{\cos x\,dx}{3+\cos^2 x}$ g) $\int\operatorname{sen}^6 x\,dx$ h) $\int\cos^2(\pi x)\,dx$ i) $\int\cos^5 x\operatorname{sen}^2 x\,dx$ j) $\int\sqrt{x}\,e^{-2\sqrt{x}}dx$

k) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ l) $\int\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$ m) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$ n) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ ñ) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}$

30. Hallar el valor de las integrales:

a) $\int_{-1}^{1}e^{-|x|}dx$ b) $\int_{-1}^{1}(1-x)^3dx$ c) $\int_1^{e^2}\sqrt{x}\,\log x\,dx$ d) $\int_0^1 x^3\arctan x\,dx$

e) $\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^3 x\cos^2 x\,dx$ f) $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^3 x\,dx}{3\operatorname{sen}^2 x+4\cos^2 x}$ g) $\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^4 x}$ e) $\int_0^3\frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}-3}$

31. Expresar $I_n(x)=\int\frac{dx}{[x^2+a^2]^n}$ en función de $I_{n-1}(x)$. Calcular $\int\frac{dx}{[x^2+1]^2}$ y $\int\frac{dx}{[x^2+2x+5]^3}$.

32. Expresar $I_n=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^n x\,dx$ en función de I_{n-2} . Calcular I_{2n} , I_{2n+1} .

33. Calcular: $\int_0^{\pi}\operatorname{sen}mx\operatorname{sen}nx\,dx$, $\int_0^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx$, $\int_0^{\pi}\operatorname{sen}mx\cos nx\,dx$, $m,n\in\mathbf{N}$.

34. Explicar por qué el cambio de variable resultados falsos si:

a) $\int_{-1}^{1}dx$, $t=x^{2/3}$ b) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$, $t=\frac{1}{x}$.

35. Sea $f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$. Hallar su dominio, estudiar crecimiento y decrecimiento y esbozar su gráfica. Hallar el área comprendida entre la gráfica y el eje x en el intervalo en que f es creciente. ¿Cuántos máximos y mínimos tiene una primitiva cualquiera de f? ¿Y puntos de inflexión?

36. Sea $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $f(0)=\frac{1}{2}$. Hallar, si existe, $f'(0)$. Probar que f es decreciente en todo su dominio. ¿Cuántas soluciones tiene $f(x)=-1$? Calcular $I=\int_3^8 f$. Probar que $I<\frac{5}{3}$.

37. Sea $f(x)=\frac{1}{x}+4\arctan x$. a) Dibujar su gráfica y probar que $\pi+1\le\int_1^2 f\le 2\pi$.
b) Determinar si converge la integral impropia $\int_1^\infty f$. c) Hallar $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f$.

38. Sea $f(x)=x\log\left(1+\frac{4}{x^2}\right)$. **a]** Hallar una primitiva de f. **b]** Estudiar la convergencia de $\int_1^\infty f$.

39. Sea $f(x)=x\arctan\frac{4}{x^2}$, $f(0)=0$. **a]** Hallar, si existen, $f'(0)$ y $f'(2)$. **b]** Hallar una primitiva de f. **c]** Estudiar si converge la integral impropia $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

40. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias. Hallar su valor si se puede:

a) $\int_\pi^\infty \frac{\arctan x}{x^3-8}dx$ b) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{4/3}}$ c) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4-1}}$ d) $\int_1^\infty \log(1+\frac{4}{x^2})dx$ e) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx$

f) $\int_0^\infty \frac{x\cos x}{e^x}dx$ g) $\int_0^\infty \frac{dx}{2e^x-1}$ h) $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x-1}$ i) $\int_1^\infty x\arctan\frac{1}{x^2}dx$ j) $\int_0^\infty x\,\text{sen}^2\frac{\pi}{x}dx$

k) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{2x}-1}$ l) $\int_1^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x-1}}dx$ m) $\int_1^\infty \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\,dx$ n) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+4x+4x\sqrt{x}}$ ñ) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x^2}dx$

o) $\int_0^\infty \frac{\text{sen}^2 x}{\sqrt{x}}dx$ p) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$ q) $\int_1^\infty \frac{\text{sen}\,x}{x}dx$ r) $\int_4^\infty \frac{\arctan(1/x)}{(2x-8)^{1/3}}dx$ s) $\int_1^\infty \frac{x+2e^{\cos x}}{x^3-2\sqrt{2}}dx$

t) $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^{3/2}}dx$ u) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+x^2}$ v) $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^3}dx$ w) $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+e^{x^2}}$ x) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{(x-1)^{1/3}}$

y) $\int_1^\infty \left[\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right]dx$ z) $\int_1^\infty e^{-1/x}dx$ α) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}dx$ β) $\int_2^\infty \frac{\arctan\frac{2}{x}}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx$ γ) $\int_0^\infty \frac{\text{sen}\sqrt{x}}{e^{x^2}-1}dx$

41. Discutir según los valores de $a\in\mathbf{R}$ la convergencia de la integral $\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x^a}dx$.

42. Discutir según los valores de $n\in\mathbf{N}$ la convergencia de:

a) $\int_0^\infty \frac{\arctan(x+\frac{1}{x})}{(1+x^2)^n}dx$ b) $\int_0^1 \left[\frac{n}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]dx$ c) $\int_2^\infty \frac{x\,dx}{x^n-8}$

43. Hallar, justificando los pasos, el valor de:

a) $\int_0^{1/2}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right)dx$ b) $\int_0^\pi\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}\right)dx$ c) $\int_0^1\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[n+x]^4}\right)dx$

44. Sea $H(x)=|x-1|\int_{-1}^x \text{sen}\,t^3 dt$. Aproximar $H(0)$ con error menor que 10^{-3}. Hallar, si existe, $H'(1)$.

45. Probar las acotaciones:

a) $0\le\int_0^{\pi/2}\text{sen}(\text{sen}\,x)\,dx\le\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{2}{21}\le\int_0^1\frac{x^6dx}{\sqrt{x^4+1}}\le\frac{1}{7}$ c) $\frac{3}{8}\le\int_0^{1/2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx\le\frac{2}{5}$

46. Sea $f(x)=\int_0^x \text{sen}\,t^2 dt$. Hallar $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\text{sen}\,x}{f(x)}$. Utilizar el polinomio de Taylor de orden 3 de f en $x=0$ para encontrar un valor aproximado de $f(\frac{1}{2})$. ¿Es menor que 10^{-3} el error cometido?

47. Hallar el límite cuando x tiende a 0 y a ∞ de: a) $\frac{x\int_0^x e^{-t^2}dt\,-\,\arctan x^2}{\log[1+x^4]}$; b) $x^{-6}\int_{-x^2}^0 \text{sen}\,t^2 dt$.

48. Precisar si converge $\int_0^\infty [1+t^3]^{-1/2}dt$. Si $f(x)=\frac{\int_0^{x^2}[1+t^3]^{-1/2}dt-\text{sen}\,x^2}{x^6}$, hallar $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

49. Sea $F(x)=\int_2^x \frac{dt}{\sqrt{\log t+t}}$. Determinar si existe $\lim_{x\to\infty} F(x)$. Hallar el $\lim_{x\to\infty}\frac{F(2x)}{F(x)}$ (si existe).

50. Hallar el valor de $I=\int_0^1 \frac{x}{x^4-16}\,dx$ y un racional que aproxime I con error menor que 10^{-2}.

51. Sea $f(x)=\frac{x^2+2}{x^4+4}$. Hallar una primitiva de f . Probar que $\frac{1}{2}\le\int_0^1 f\le\frac{2}{3}$.

52. Estudiar para qué valores enteros de n se verifica que $3<\int_0^1 \frac{nx}{4+x^4}\,dx<4$.

53. Sea $f(x)=\mathrm{e}^{2x-x^2}$. a) Aproximar $\int_0^1 f$ usando el desarrollo de Taylor hasta x^4 de f .
b) Sea $H(x)=\int_x^{x+1} f$, $x\in[0,2]$. Precisar en qué x alcanza sus valores máximo y mínimo.
c) Calcular el límite de $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, i) cuando $x\to 0$, ii) cuando $x\to\infty$.

54. a) Precisar dónde $f(x)=\frac{1}{x}\left[\sqrt[3]{1+3x}-1\right]$, $f(0)=1$, es derivable. b) Hallar $\operatorname{im} f$.
c) Probar que $\int_{-2/3}^{0} f=6-\frac{3}{2}\log 3-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}$ y aproximar la integral por Simpson con $h=\frac{1}{3}$.
d) Determinar si converge $\int_1^\infty f$. e) Si $F(x)=\int_{-x}^{0} f$, hallar $F'(3)$.

55. Aproximar $\log 2=\int_1^2\frac{dx}{x}$ utilizando Trapecios ($n=2$ y 4) y Simpson ($n=2$ y 4; o sea, $m=1$ y 2).

56. Aproximar utilizando Taylor y Simpson: a) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}dx$, b) $\int_0^1\sqrt{x^4+1}\,dx$, c) $\int_1^2\frac{\mathrm{e}^x}{x}dx$.

57. Calcula el área de estas regiones:
i) Región limitada por el eje x y por la gráfica de $f(x)=\operatorname{sen}x$, entre $x=0$ y $x=\pi$.
ii) Región limitada por las graficas de $f(x)=x+1$ y $f(x)=x^2-2x+1$.
iii) Región finita encerrada entre el eje x y la gráfica de $f(x)=(x-1)^2(x-4)$.
iv) Región finita encerrada entre la gráfica de $f(x)=x^3-x$ y su recta tangente en $x=-1$.
v) Región acotada entre el eje x y la gráfica de $f(x)=|x^3-1|-2$.

58. Calcular el área de la región acotada limitada por la curva $y=\frac{1}{x^2+1}$, el eje x y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de la curva.

59. Hallar el área de una de las regiones iguales encerradas entre las gráficas de $|\operatorname{sen}x|$ y $|\cos x|$.

60. Calcular el área de la región interior a la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

61. Hallar el área de la región acotada comprendida entre $y=0$, la curva $x^2+y^2=4$ y la tangente a la curva en $\left(1,-\sqrt{3}\right)$.

62. Hallar el área de la región encerrada entre la gráfica de $g(x)=\left|3-\frac{4}{x^2}\right|$ y su recta tangente en $x=2$.

63. ¿Cuál de todas las rectas que pasan por $(1,2)$ determina con $y=x^2$ la región de mínima área?

64. Hallar el valor mínimo, si existe, de $S(m)=\int_0^1|x^3-mx|\,dx$.

65. Determinar si es mayor o menor el área encerrada por la gráfica de las funciones i) $f(x)=\mathrm{e}^{-x/2}$, ii) $g(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ y el eje de las x en el intervalo $[0,1]$ o en el intervalo $[1,\infty)$.

66. Probar que el área de la región encerrada entre las gráficas $y=3x$ e $y=\mathrm{e}^x$ es menor que 3 .

67. Describir las gráficas de las siguientes funciones escritas en coordenadas polares:
a) $r=a\operatorname{sen}\theta$ b) $r=a\sec\theta$ c) $r=\cos 2\theta$ d) $r=|\cos 2\theta|$.

68. Hallar el área de la región acotada por el eje x y la gráfica de la función $h(x) = 1 - |x-1|$, integrando en coordenadas i) cartesianas, ii) polares.

69. Hallar el área determinada por la curva $r = \frac{1}{1+\cos\theta}$ y las semirrectas $\theta=0$ y $\theta=\frac{3\pi}{4}$, i) trabajando en polares, ii) tras escribir la ecuación de la curva en rectangulares.

70. Hallar el área de la región encerrada entre la cardioide $r=1+\cos\theta$ y la circunferencia $r=\cos\theta$.

71. Hallar el área comprendida entre las espirales $r = 2e^{-\theta}$ y $r = e^{-\theta}$ si i) $\theta\in[0,2\pi]$, ii) $\theta\geq 0$.

72. Hallar la longitud de las curvas: a) $y = \log x$, $x\in[1,e]$; b) $y = x^{2/3}$, $x\in[0,1]$.

73. El perímetro de una elipse de eje mayor $2a$ y de excentricidad k $\left(k^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}\right)$ viene dado por $L = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$. Evaluar L integrando término a término el desarrollo de la raíz en potencias de $k^2\operatorname{sen}^2\theta$. Hallar aproximadamente el perímetro de la elipse $3x^2+4y^2 = 12$.

74. Un sólido tiene por base el triángulo del plano xy limitado por los ejes y la recta $x+y=1$. Cada sección producida por un plano perpendicular al eje x es un cuadrado uno de cuyos lados está en la base. Hallar su volumen.

75. Hallar el volumen del 'toro' obtenido al girar un círculo de radio r en torno a una recta, situada en el plano del círculo, que está a una distancia $d > r$ de su centro.

76. Sea R la región limitada por $y = \frac{x}{1+x}$ y el eje x en $[1,2]$.
a) Hallar el área de R integrando respecto a i) x , ii) y . b) Hallar el volumen del sólido de revolución que genera R al girar en torno i) al eje x ; ii) al eje y ; iii) a la recta $y = 1$.

77. Supongamos que $f(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}3$. ¿Qué ocurre con el valor medio de f en $[0,b]$ cuando $b\to\infty$?

78. Sea una varilla de longitud L situada en el eje x con un extremo en el origen. Hallar su centro de gravedad y su momento de inercia respecto del origen si su densidad es

$$\rho(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0\leq x\leq L/2 \\ L^2/4 & \text{si } L/2\leq x\leq L \end{cases} .$$

79. Una partícula avanza por el eje x con velocidad $v(t) = t(1+t^2)^a$ m/s en el instante t . Si inicialmente está en $x=0$, ¿para qué valores de a : a) recorre 1 m antes de 1 s , b) recorre 1 m en un tiempo finito, c) alcanza cualquier punto del semieje positivo en tiempo finito?