

6. Introducción al cálculo en \mathbf{C}

6.1. Funciones de variable compleja

No hay ningún número real x tal que $x^2 + 1 = 0$. Para que esa ecuación tenga solución es necesario introducir el número imaginario i : $i^2 = -1$. Veamos algunas propiedades del conjunto de los números complejos $\mathbf{C} = \{z = a + ib : a, b \in \mathbf{R}\}$.

En \mathbf{C} están definidas las operaciones suma y producto:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d), (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Con estas dos operaciones \mathbf{C} es un **cuerpo**: $+$ y \cdot son asociativas y conmutativas, existe la distributiva, existen elementos neutros ($z + 0 = z$ y $z \cdot 1 = z$) e inversos:

$$\forall z = a + ib \exists -z = -a - ib \text{ tal que } z + (-z) = 0$$

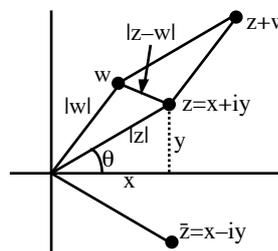
$$\forall z \neq 0 \exists z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2} \text{ tal que } z \cdot z^{-1} = 1$$

Se define diferencia y cociente de complejos como: $z - w = z + (-w)$, $\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$ si $w \neq 0$.

[No se puede, a diferencia de \mathbf{R} , definir un orden en \mathbf{C} compatible con las operaciones anteriores].

Dado $z = x + iy$, el **conjugado** de z es $\bar{z} = x - iy$; y el **módulo** de z es $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Representando cada número complejo $z = x + iy$ como el punto del plano de coordenadas (x, y) , es fácil ver que el complejo suma $z + w$ está en el vértice opuesto al origen de un paralelogramo dos de cuyos lados son los segmentos que unen z y w con $O = (0, 0)$. El conjugado de z es la reflexión de z respecto de $y = 0$. El módulo es la distancia desde z al origen. La distancia de z a w viene dada por $|z - w|$.



Algunas propiedades de demostración inmediata son:

$$\bar{\bar{z}} = z, \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \overline{-z} = -\bar{z}, \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}, |z|^2 = z \cdot \bar{z}, |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

Más difícil es probar (ver Spivak): $|z + w| \leq |z| + |w|$ (el significado geométrico es claro).

Un z se puede describir con coordenadas **polares**: $z = x + iy = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, donde $r = |z|$ y θ es el ángulo que forma el segmento Oz con el eje x positivo. El θ no es único: todos los $\theta + 2k\pi$ nos dan el mismo z . Cualquiera de ellos se llama **argumento** de z . El **argumento principal** es el θ con $0 \leq \theta < 2\pi$. El θ se halla utilizando que $\tan \theta = \frac{y}{x}$ y mirando el cuadrante en que está el z .

Ej. Para $z = -2 + 2i$ es $|z| = 2\sqrt{2}$; como $\tan \theta = -1$ y z está en el tercer cuadrante, se puede escribir z (con el argumento principal) en la forma $z = 2\sqrt{2}[\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}]$ (ó con otro θ : $z = 2\sqrt{2}[\cos \frac{11\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{4}]$).

Más adelante veremos que si θ es cualquier real: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ (complejo de módulo 1). Esto nos proporciona una forma más corta de expresar un complejo en polares:

$$z = r e^{i\theta}, \text{ donde } r = |z| \text{ y } \theta \text{ es un argumento de } z.$$

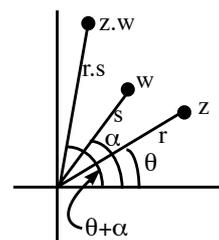
Las formas polares son muy útiles para efectuar productos y potencias:

Si $z = re^{i\theta}$, $w = se^{i\alpha}$ entonces:

$$z \cdot w = rse^{i(\theta+\alpha)} = rs[\cos(\theta+\alpha) + i \operatorname{sen}(\theta+\alpha)],$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}e^{i(\theta-\alpha)} = \frac{r}{s}[\cos(\theta-\alpha) + i \operatorname{sen}(\theta-\alpha)],$$

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

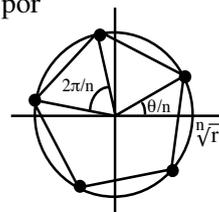


[Las dos primeras son inmediatas y la de z^n se prueba por inducción].

Todo $z = re^{i\theta} \neq 0$ tiene exactamente n raíces n -simas distintas dadas por

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\phi} = \sqrt[n]{r}(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) \text{ con } \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k = 0, \dots, n-1.$$

[basta elevar a n y observar que si $k = n, n+1, \dots$ se repiten los ángulos de antes; vemos que las n raíces están en los vértices de un polígono regular].



Hagamos una serie de operaciones de repaso de la aritmética compleja:

Ej. Calcular $\left| \frac{i(3-4i)}{2+i} \right|$. Basta hacer uso de las propiedades del módulo: $|| = \frac{|i||3-4i|}{|2+i|} = \frac{1 \cdot 5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

[Vamos ahora a hacerlo dando un rodeo calculando el complejo que está dentro del módulo:

$$\frac{i(3+4i)}{2+i} = \frac{[3i-4][2-i]}{[2+i][2-i]} = \frac{3-8+6i+4i}{5} = -1 + 2i, \text{ cuyo módulo es, desde luego, } \sqrt{5}]$$

Ej. Calcular $w = (1-i)^6$, directamente y en polares:

$$w = 1 + 6(-i) + 15(-i)^2 + 20(-i)^3 + 15(-i)^4 + 6(-i)^5 + (-i)^6 = 1 - 6i - 15 + 20i + 15 - 6i - 1 = 8i$$

$$r = \sqrt{2}, \tan \theta = -1 \rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4} \text{ (}\theta \text{ del cuarto cuadrante)} \rightarrow (\sqrt{2}e^{i7\pi/4})^6 = 8e^{i21\pi/2} = 8e^{i\pi/2} = 8i$$

Ej. Hallar las raíces cúbicas de $z = \frac{7+i}{1-i}$.

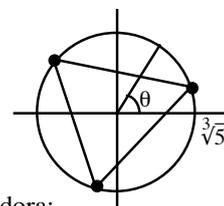
Podemos hacer: $z = \frac{[7+i][1+i]}{[1-i][1+i]} = \frac{6+8i}{2} = 3+4i = 5e^{i \arctan(4/3)}$. O bien,

$$7+i = 5\sqrt{2}e^{i \arctan(1/7)}, 1-i = \sqrt{2}e^{-i7\pi/4} \rightarrow z = 5e^{i[\arctan(1/7)+\pi/4]}$$

[las dos expresiones de z coinciden, pues $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$]

Por tanto, $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{5}e^{i\phi}$ donde $\phi = \frac{\arctan(4/3)+2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$. Con calculadora:

$$\theta = \arctan \frac{4}{3} \approx 0.927; \phi \approx 0.309, 2.403, 4.498 \rightarrow z \approx 1.63+0.52i, -1.26+1.15i, -0.36-1.67i$$



Ej. Factorizar el polinomio real $x^4 + 1$ (lo habíamos necesitado para hallar una primitiva de 5.5).

Las raíces del polinomio son las 4 raíces de $-1 = 1e^{i\pi}$ que son $\sqrt[4]{1}e^{i\phi}$ con $\phi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

Es decir, $z_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}[1 \pm i]$, $z_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2}[-1 \pm i]$, complejos conjugados dos a dos, como debían

(a las mismas raíces llegaríamos buscando los z tales que $z^2 = \pm i$, pero sería mucho más largo).

Así pues: $x^4 + 1 = [(x-z_1)(x-z_2)][(x-z_3)(x-z_4)] = [x^2 - (z_1+z_2)x + z_1z_2][x^2 - (z_3+z_4)x + z_3z_4]$

$$\rightarrow x^4 + 1 = [x^2 - \sqrt{2}x + 1][x^2 + \sqrt{2}x + 1]$$

Ej. Hallar las raíces de la ecuación $z^2 - iz - 1 - i = 0 \rightarrow z = \frac{1}{2}[i \pm \sqrt{3+4i}]$.

[La fórmula $z = \frac{1}{2a}[-b \pm \sqrt{b^2-4ac}]$ sigue siendo válida interpretando $\pm \sqrt{b^2-4ac}$ como las dos raíces del complejo (no tiene sentido decir 'la raíz positiva' de un complejo)].

Trabajemos en cartesianas: buscamos $z = x+iy$ tal que sea $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = 3+4i$. Debe ser $x^2 - y^2 = 3$ y $2xy = 4$. Hay dos soluciones reales de este sistema: $x=2, y=1$ y $x=-2, y=-1$.

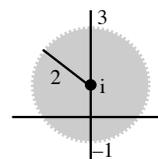
[En polares se tendría $\sqrt{5}e^{i\phi}$, $\phi = \frac{\arctan(4/3)}{2} + k\pi$, $k=0, 1$, que deben coincidir con $\pm(2+i)$].

$$\text{Las raíces buscadas son: } z = \frac{1}{2}[i + (2+i)] = 1+i \text{ y } z = \frac{1}{2}[i - (2+i)] = -1.$$

Ej. Representar en el plano complejo los z que cumplen $|z-i| < 2$.

Si $z = x + iy$, esto equivale a $|x + i(y-1)| < 2 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 < 4$.

Los z buscados son los del círculo sin borde de centro $(0, 1)$ y radio 2 (claro, los z que distan del complejo i menos que 2).



Ej. Expresar $\cos 3\theta$ y $\sin 3\theta$ en términos de $\cos \theta$ y $\sin \theta$ utilizando potencias de complejos.

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + i \sin 3\theta &= e^{i3\theta} = [e^{i\theta}]^3 = [\cos \theta + i \sin \theta]^3 = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i [3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta] \\ &\Rightarrow \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \quad \text{y} \quad \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \end{aligned}$$

[sale usando sólo propiedades reales de senos y cosenos de sumas, pero es bastante más largo]

Tratemos ya las **funciones de variable compleja**. Una $f(z)$ de variable compleja será una regla que asigna a cada complejo z de un dominio un único complejo $f(z)$.

Como los reales son un tipo particular de números complejos podríamos hablar también de funciones reales de variable compleja, si $f(z)$ es real para cada z , o de funciones complejas de variable real (incluso las funciones reales de variable real vistas hasta ahora se pueden mirar como un tipo particular de funciones complejas).

Ej. $f(z) = z^2$, $f(z) = \bar{z}$, $f(z) = f(x + iy) = xy + ix$ son funciones complejas de variable compleja.

Una función compleja de variable real es, por ejemplo, $f(x) = \sin x + i \tan x$, si $x \in \mathbf{R}$.

Funciones (importantes) reales de variable compleja son:

$f(z) = |z|$ (función 'módulo'),

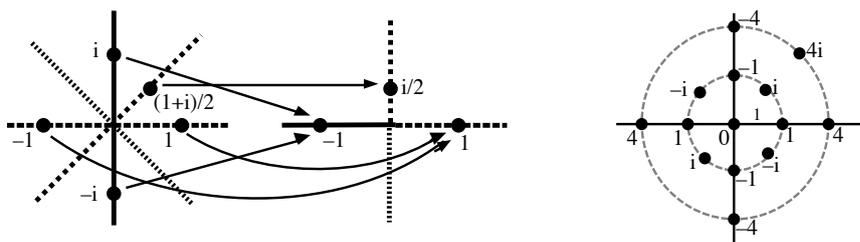
$\text{Arg}(z) = \theta$, con θ argumento principal de z (función 'argumento'),

$\text{Re}(z) = \text{Re}(x + iy) = x$, $\text{Im}(z) = \text{Im}(x + iy) = y$ (funciones 'parte real' y 'parte imaginaria').

Cualquier función f de valores complejos puede escribirse en la forma $f = u + iv$, donde u y v (parte real y parte imaginaria de f) son funciones con valores reales (esto no siempre será útil). Por ejemplo, así podemos expresar:

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy), \quad f(z) = \bar{z} = x - iy$$

Pintar funciones complejas es mucho más difícil que las reales. Podríamos dibujar flechas entre dos planos complejos, o bien escribir el valor de $f(z)$ sobre cada z de un plano complejo. Las dos cosas están hechas abajo para $f(z) = z^2$:

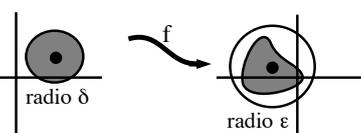


Límite y continuidad se definen como en \mathbf{R} sustituyendo valores absolutos por módulos:

Def. $(\epsilon, \delta \in \mathbf{R}; z, a, L \in \mathbf{C})$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a} f(z) = L \text{ si } \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que si } z \text{ cumple } 0 < |z-a| < \delta \Rightarrow |f(z)-L| < \epsilon. \\ f \text{ es continua en } a \text{ si } \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que si } z \text{ cumple } |z-a| < \delta \Rightarrow |f(z)-f(a)| < \epsilon. \end{aligned}$$

[Si un entorno es $B(a, r) = \{z \in \mathbf{C} : |z-a| < r\}$, que f es continua en a significa que podemos encontrar un entorno de a de radio δ lo suficientemente pequeño de forma que su imagen este contenida en un entorno de $f(a)$ de cualquier radio ϵ , por pequeño que sea ϵ].



Teorema:

f y g continuas en $a \in \mathbf{C} \Rightarrow f \pm g, f \cdot g$ y f/g (si $g(a) \neq 0$) son continuas en a .
 Si $f = u + iv$ (u, v reales), entonces f continua en $a \Leftrightarrow u$ y v continuas en a .

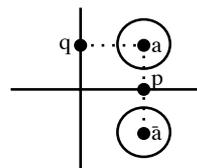
Las demostraciones del \pm, \cdot y $/$ son iguales que las reales, ya que seguimos teniendo la desigualdad triangular; para la otra: $|f(z) - f(a)| = |[u(z) - u(a)] + i[v(z) - v(a)]|$ es pequeño si y sólo si lo son $|u(z) - u(a)|$ y $|v(z) - v(a)|$.

Ej. Es fácil ver que $f(z) = \text{cte}$ y $f(z) = z$ son continuas en cualquier a (así pues, también lo son cualquier polinomio y cualquier cociente de polinomios donde el denominador no se anula).

Ej. $\text{Re}(z) = x$ e $\text{Im}(z) = y$ son continuas $\forall a$ por el teorema anterior y porque $f(z) = z$ lo es.

[O directamente: si $a = p + iq$

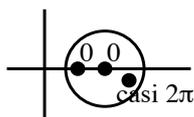
$$|x - p|, |y - q| < \sqrt{[x - p]^2 + [y - q]^2} = |z - a| < \varepsilon \text{ si } |z - a| < \delta = \varepsilon$$



Ej. $f(z) = \bar{z}$ es continua $\forall a \in \mathbf{C}$: $|\bar{z} - \bar{a}| = |\overline{z - a}| = |z - a| < \varepsilon$ si $|z - a| < \delta = \varepsilon$

[o por el teorema y el ejemplo anterior: $u(z) = x, v(z) = -y$ lo son]

[como se verá en los libros de cálculo en varias variables, una función de dos variables que sea composición de funciones continuas será continua; así será fácil asegurar que lo es, por ejemplo, $f(x + iy) = y \arctan(xy) + ix \cos(x + y)$]



Hay funciones discontinuas muy sencillas como $\text{Arg}(z)$ en cualquier a real positivo. En cualquier entorno de a hay puntos z en que $\text{Arg}(z)$ es casi 2π y por tanto $|\text{Arg}(z) - \text{Arg}(a)| = |\text{Arg}(z) - 0|$ no se puede hacer tan pequeño como queramos [en los demás a la función sí es continua; si el argumento principal lo hubiésemos escogido en $(-\pi, \pi]$ conseguiríamos que la función $\text{Arg}(z)$ fuese continua en el semieje real positivo, pero la discontinuidad se trasladaría al negativo].

Def. $f(z)$ es derivable en $a \in \mathbf{C}$ si existe el $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a)$

[Definición exactamente igual que la de \mathbf{R} ; también exactamente como allí se prueba que 'derivable \Rightarrow continua' y los resultados para el cálculo:

$$(f \pm g)' = f' \pm g', (f \cdot g)' = f'g + fg', (1/g)' = -g'/g^2, (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Con esto sabemos derivar polinomios y funciones racionales (más adelante también derivaremos $\text{sen } z, \text{cos } z$ y e^z , pero por ahora ni siquiera sabemos lo que son estas funciones complejas)].

Ej. Hay funciones muy sencillas no derivables como $f(z) = \bar{z}$, pues $\nexists \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{(x+iy) \rightarrow 0} \frac{x-iy}{x+iy}$:

$\frac{x-iy}{x+iy}$ cuando $y = 0$ vale 1 y cuando $x = 0$ vale -1 ; el límite no puede existir pues el cociente toma valores 1 y -1 para z tan cercanos como queramos a 0.

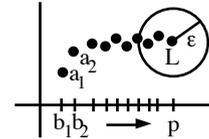
[Sabiendo algo de derivadas parciales: se prueba en análisis complejo que para que una $f = u + iv$ sea derivable es necesario que se cumpla: $u_x = v_y, u_y = -v_x$ (ecuaciones de Cauchy-Riemann). Para $f(z) = x - iy$ no se satisfacen, pues $u_x = 1 \neq v_y = -1$. De hecho, la mayoría de las funciones definidas en la forma $f = u + iv$ serán no derivables, pues es mucha casualidad que u y v cualesquiera satisfagan dichas ecuaciones. Comprobemos que sí se cumplen para una función derivable como $f(z) = z^2$ (de derivada $f'(z) = 2z$): $u_x = 2x = v_y, u_y = -2y = -v_x$].

6.2. Series complejas de potencias

Comencemos con **sucesiones** $\{a_n\} \subset \mathbf{C}$ de complejos, o sea, funciones de \mathbf{N} en \mathbf{C} :

Def. $\{a_n\} \rightarrow L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe N natural tal que si $n \geq N$ entonces $|a_n - L| < \varepsilon$ [$|\cdot|$ módulo]

Para cualquier entorno de L casi todos los puntos de $\{a_n\}$ están dentro:



Teorema: Sea $a_n = b_n + i c_n$, con b_n y c_n reales y $L = p + i q$.
Entonces $\{a_n\} \rightarrow L \Leftrightarrow \{b_n\} \rightarrow p$ y $\{c_n\} \rightarrow q$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow) \forall \varepsilon \exists N \text{ tal que si } n \geq N \Rightarrow |a_n - L| &= |(b_n - p) + i(c_n - q)| < \varepsilon \Leftrightarrow (b_n - p)^2 + (c_n - q)^2 < \varepsilon^2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} (b_n - p)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |b_n - p| < \varepsilon \\ (c_n - q)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |c_n - q| < \varepsilon \end{cases} \\ \Leftrightarrow) \forall \varepsilon \begin{cases} \exists N_1, n \geq N_1 \Rightarrow |b_n - p| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists N_2, n \geq N_2 \Rightarrow |c_n - q| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow |a_n - L| \leq |b_n - p| + |c_n - q| < \varepsilon \text{ si } n \geq \max\{N_1, N_2\} \end{aligned}$$

Como en \mathbf{R} , una **serie** de complejos $\sum a_n$ se dice **convergente** si lo es su sucesión S_n de sumas parciales. Una consecuencia inmediata del teorema anterior es:

Teorema:

$$a_n = b_n + i c_n : \sum a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum b_n \text{ y } \sum c_n \text{ convergen y es } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + i \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

$\sum a_n$ es **absolutamente convergente** si lo hace la serie real $\sum |a_n|$, a la que se le pueden aplicar los criterios de convergencia de series reales conocidos. Se tiene también que:

Teorema: $\sum a_n$ absolutamente convergente $\Rightarrow \sum a_n$ convergente

Si $a_n = b_n + i c_n$, $|a_n|^2 = |b_n|^2 + |c_n|^2 \Rightarrow |b_n|, |c_n| \leq |a_n|$. Por tanto:

$\sum |a_n|$ convergente $\Rightarrow \sum |b_n|$ y $\sum |c_n|$ convergente $\Rightarrow \sum b_n$ y $\sum c_n$ convergentes

También se tienen aquí los criterios de cociente y de la raíz (iguales que los de \mathbf{R}) y son reales las sucesiones $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ y $\sqrt[n]{|a_n|}$ cuyo límite hay que calcular para aplicarlos.

Ej. $a_n = \sin \frac{1}{n} + i(2 + \frac{1}{n})^n$ diverge, pues $b_n = \sin \frac{1}{n} \rightarrow 0$, pero $c_n = (2 + \frac{1}{n})^n \rightarrow \infty$.

Ej. $a_n = (\frac{1}{2} + \frac{i}{2})^n$; $|a_n| = 2^{-n/2} \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$ [esto es intuitivamente claro y fácil de formalizar]

Ej. $\sum (\frac{1}{2} + \frac{i}{2})^n$ converge pues $\sum |a_n| = \sum (\frac{1}{\sqrt{2}})^n$ es serie geométrica convergente

[como en \mathbf{R} se ve que: $\sum a_n$ convergente $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$; otra prueba de que la última $\{a_n\}$ converge]

Ej. $\sum \frac{i^n}{n}$ no converge absolutamente (pues $\sum \frac{1}{n}$ es divergente), pero sí converge:

$$\sum \frac{i^n}{n} = i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \frac{1}{6} + \dots = -\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots) + i(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots)$$

puesto que son convergentes las dos últimas series por Leibniz.

Ej. $\sum \frac{(7+i)^n}{n^3}$ diverge, pues $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|7+i|^{n+1}}{|7+i|^n} \frac{n^3}{(n+1)^3} = 5\sqrt{2} \frac{n^3}{(n+1)^3} \rightarrow 5\sqrt{2} > 1$, o bien,

porque $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{5\sqrt{2}}{n^{3/n}} \rightarrow 5\sqrt{2} > 1$ (que $\sum |a_n|$ diverja, en principio no prueba nada).

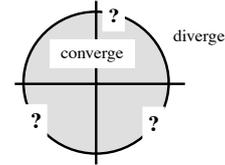
Veamos las **series de potencias** complejas $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, $a_n, z \in \mathbf{C}$.

Se dan resultados como los de \mathbf{R} con demostraciones (que no hacemos) iguales que allí:

Teorema:

A cada serie de potencias está asociado un número positivo R , llamado **radio de convergencia** de la serie, que tiene las siguientes propiedades: si $R = 0$, la serie sólo converge si $z = 0$; si $R = \infty$, la serie converge para todo z ; si R es un número real positivo, la serie converge para $|z| < R$ y diverge para $|z| > R$.

Aquí el intervalo de convergencia se ha convertido en el círculo de convergencia $|z| < R$. Sobre la circunferencia $|z| = R$ no se puede asegurar nada. Como en los reales habrá series que convergen en toda ella, otras en puntos aislados, otras en ninguno... El cálculo del R se podrá hacer casi siempre utilizando el criterio del cociente o la raíz.



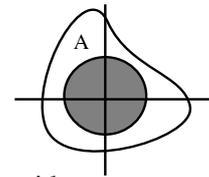
Estas series se pueden sumar, multiplicar, dividir,... igual que las reales y se tiene el mismo resultado sobre derivación:

Teorema:

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ para $|z| < R \Rightarrow f$ es derivable para $|z| < R$ y $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

Y, por tanto, las funciones definidas por series de potencias vuelven a ser infinitamente derivables (y también continuas, desde luego) dentro del círculo de convergencia. Un resultado importante y sorprendente, que desde luego no es cierto en los reales, y que se prueba con técnicas más avanzadas de cálculo complejo es:

Teorema: Una función $f(z)$ derivable en una región A del plano es infinitamente derivable en A . Además, en todo círculo contenido en A la función $f(z)$ coincide con su serie de Taylor.



Definimos tres nuevas funciones complejas, que hasta ahora no tenían sentido:

Def. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\operatorname{cos} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\forall z \in \mathbf{C}$

El R de las tres series es ∞ . Tienen propiedades (fáciles de probar) esperadas como:

$$(\operatorname{sen} z)' = \operatorname{cos} z, (\operatorname{cos} z)' = -\operatorname{sen} z, \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z, \operatorname{cos}(-z) = \operatorname{cos} z,$$

$$(e^z)' = e^z, e^{-z} = 1/e^z, e^{z+w} = e^z e^w, \dots$$

Además de otras nuevas como:

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \dots = (1 - \frac{z^2}{2!} + \dots) + i(z - \frac{z^3}{3!} + \dots) = \operatorname{cos} z + i \operatorname{sen} z$$

$$e^{-iz} = \operatorname{cos} z - i \operatorname{sen} z, \operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}[e^{iz} - e^{-iz}], \operatorname{cos} z = \frac{1}{2}[e^{iz} + e^{-iz}]$$

[Si $z = y$ real deducimos la prometida relación que abreviaba la forma polar: $e^{iy} = \operatorname{cos} y + i \operatorname{sen} y$].

No es necesario sumar series para calcular exponenciales: $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\operatorname{cos} y + i \operatorname{sen} y)$.

$$[\text{Ni senos: } \operatorname{sen}(\pi + i) = \frac{1}{2i}[e^{i(\pi+i)} - e^{-i(\pi+i)}] = -\frac{1}{2}[e^{-1}e^{i\pi} - e^1e^{-i\pi}] = \frac{i}{2}[e^{-1} - e^1] (= \operatorname{sen} i)].$$

Las funciones complejas $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{cos} z$ no son acotadas. En el eje imaginario, por ejemplo:

$$\operatorname{sen}(iy) = \frac{1}{2i}[e^{-y} - e^y] = i \operatorname{sh} y, \operatorname{cos}(iy) = \frac{1}{2}[e^{-y} + e^y] = \operatorname{ch} y$$

[resultado clásico es que las únicas funciones acotadas y analíticas en todo \mathbf{C} son las constantes].

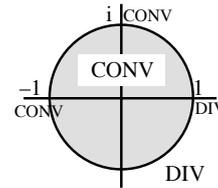
Lo visto para series complejas permite explicar situaciones sorprendentes de las funciones reales. ¿Por qué si tanto e^x como $\frac{1}{1+x^2}$ son $C^\infty(\mathbf{R})$, la serie de la primera converge $\forall x$ mientras que la de la otra sólo lo hace si $|x| < 1$? Pues porque la serie $1 - z^2 + z^4 - \dots$ de $\frac{1}{1+z^2}$ ha de definir una función continua y en $z = \pm i$ esta no lo es [esto sucede para todo cociente de polinomios complejos (reales, en particular): el radio R de su serie es la distancia al cero más próximo del denominador (en $|z| < R$ es derivable y, por tanto, analítica)]. También entendemos el extraño comportamiento de la $f(x) = e^{-1/x^2}$, $f(0) = 0$ que tiene infinitas derivadas pero sólo coincide con su serie de Taylor en $x = 0$: como $f(iy) = e^{1/y^2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} \infty$, la función compleja no es siquiera continua en $z = 0$.

Ej. Estudiemos donde converge: $\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \rightarrow 1 = R$.

Converge en el círculo $|z| < 1$ y diverge en $|z| > 1$. ¿Qué pasa en $|z| = 1$? No converge absolutamente en esa circunferencia, pero podría converger en algunos z de ella. Por ejemplo:

si $z = -1$, la serie $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge por Leibniz; si $z = 1$, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge;

si $z = i$, converge, pues $\sum \frac{i^n}{\sqrt{n}} = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}} + i \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ y convergen ambas (Leibniz).



Ej. Desarrollemos en serie $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$.

Que $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge $\Leftrightarrow |z| < 1$ y que su suma es $\frac{1}{1-z}$ se prueba como en **R**. Así pues:

$$f(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{1-[-z^2/4]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{4^{n+1}}, \quad |-\frac{z^2}{4}| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2 \text{ (distancia de los ceros al origen).}$$

[la serie no converge en ningún punto de la circunferencia $|z| = 2$ pues para cualquier z con ese módulo queda una serie cuyo término general no tiende a 0 pues tiene módulo constante $\frac{1}{4}$].

Podemos desarrollarla también (dando rodeos) de otras formas.

Descomponiendo en fracciones simples complejas:

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{4i} \left[\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{z+2i} \right] = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{1-z/2i} + \frac{1}{1+z/2i} \right] = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z^n}{(2i)^n} + \frac{(-z)^n}{(2i)^n} \right] = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n}}{2^{2n}i^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{4^{n+1}}$$

Dividiendo (las manipulaciones con series complejas, como dijimos, como las de las reales):

$$[4 + z^2][a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots] = 1 \rightarrow 4a_0 = 1, a_0 = 1/4; 4a_1 = 0, a_1 = 0; 4a_2 + a_0 = 0, a_2 = -1/16; \dots$$