PROBLEMAS ADICIONALES

Naturales, enteros, racionales y reales

1. Demostrar por inducción sobre n:

a) que la suma de los n primeros números impares es n^2 ;

b) las fórmulas: i) $\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, ii) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

c) las desigualdades: $\sqrt{n} \le \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \le 2\sqrt{n}$.

2. Hallar el mcd y el mcm de: a) 1995 y 9009 , b) 12345 y 67890 , c) 135, 315 y 351 .

3. Simplificar: a) $(\sqrt{2}-1)^7$, b) $(3+\sqrt{2})^4(3-\sqrt{2})^4$, c) $(\sqrt{2}-1)^{-3}$.

4. Calcular $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ para $n = 2,3,4,5$ y 6 y deducir de la fórmula del binomio el valor de la suma para cualquier n . ¿Cuánto vale $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}$?

5. ¿Cuánto vale $\sum_{k=1}^{n} 1$? ¿Cuánto vale $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})$, $n \ge m$? ¿Es $\sum_{k=1}^{n}(a_k)(\frac{1}{a_k}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} 1$?

6. Probar que $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{2}$ son irracionales.

7. Probar que si $a,b,c,d > 0$ y $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Encontrar un racional y un irracional que sean mayores que 11/17 y menores que 9/13 .

8. En dos partidos de baloncesto sucesivos un jugador ha obtenido un porcentaje de acierto en tiro de tres puntos superior al de otro jugador. ¿Implica esto que en el conjunto de los dos partidos es más alto el porcentaje del primer jugador?

9. Demostrar que la media geométrica de dos números positivos x e y es menor o igual que la aritmética, es decir, que $\sqrt{xy} \le (x+y)/2$, si $x,y > 0$. ¿Cuándo coinciden?

10. Probar que: $\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|y-x|)$, $\min(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|y-x|)$.

11. Determinar si cada afirmación es cierta o falsa:

a) $x<y \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}$; b) $x<y \Rightarrow x^3 < y^3$; c) $0<x<y \Rightarrow 3x^2 < x^2+xy+y^2 < 3y^2$;
d) $|x-5| < 2 \Rightarrow 0 < x < 8$; e) $x < 5 \Rightarrow |x| < 5$; f) $|x| < 5 \Rightarrow x < 5$; g) $\exists x$ con $|x+1| < x$;
h) $\exists x$ con $|x-1| = |2-x|$; i) $\exists x$ con $|x-1| = -|2-x|$; j) $x^2 - 1 \le |x^2-1| \le x^2+1$ $\forall x$.

12. La unión de intervalos $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} (\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1})$, ¿tiene supremo e ínfimo? ¿es abierto o cerrado?

13. Probar que si A y B son conjuntos abiertos entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son también abiertos. Más en general, ¿es abierto el conjunto unión de una sucesión infinita de conjuntos abiertos?, ¿lo es su intersección? Deducir propiedades análogas para conjuntos cerrados.

Funciones, sucesiones, límites y continuidad en R

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-1,4)$ y $(2,-5)$. Hallar y dibujar la función inversa $y=f^{-1}(x)$ de la función $y=f(x)$ definida por la recta anterior. Escribir las funciones compuestas $f^2\circ[f^{-1}]^2$ y $[f^{-1}]^2\circ f^2$.

2. Encontrar el dominio de las siguientes funciones:

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}\,;\;\; g(x)=\sqrt{\operatorname{sen}x+\cos x}\,;\;\; h(x)=\tfrac{1}{\tan x}\,;\;\; k(x)=\sqrt{1-x}+\log(1+x)$$

3. Sean $C(x)=x^2$; $R(x)=\sqrt{x}$; $L(x)=1-x$. Precisar en qué intervalos es $f=R\circ C\circ L$ inyectiva, hallando la f^{-1} en cada intervalo. Expresar la función $g(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ como composición de C, R y L y precisar su dominio.

4. Si f y g son crecientes, ¿lo es $f+g$? ¿Y $f\cdot g$? ¿Y $f\circ g$?

5. a) Expresar $\operatorname{sen}\frac{x}{2}$ y $\cos\frac{x}{2}$ en función de $\cos x$. b) Expresar $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$ en función de $\tan\frac{x}{2}$.
c) Probar que $\tan\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$.

6. Hallar (sin calculadora) los siguientes valores (en el caso de que existan):

$$\cos(-\tfrac{13\pi}{3})\quad \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{8}\quad \operatorname{sen}\tfrac{7\pi}{12}\quad \tan\tfrac{5\pi}{4}\quad \arctan(\tan\tfrac{5\pi}{4})\quad \operatorname{arc\,sen}(\arccos 0)\quad \operatorname{ch}(\log 3)$$

$$[\cos\tfrac{3\pi}{4}]^{1/4}\quad 125^{2/3}\quad e^{3\log 4-\log 5}\quad \log_2 64\quad \log(\log(\log 2))\quad \cos(\arctan 17)\quad [\operatorname{sh}(-1)]^{\pi}$$

7. a) Expresar $\operatorname{sen}3x$ y $\cos 3x$ en función de $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$. b) Si $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{3}{5}$ y α está en el tercer cuadrante, hallar $\cos 3\alpha$ y precisar en qué cuadrante está 3α.

8. Comprobar que:
$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$; $\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}=1-\operatorname{th}^2x$; $\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$; $\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$.

9. ¿Qué forma tienen las sucesiones convergentes cuyos términos son todos enteros?

10. ¿Tienen $a_n=\operatorname{sen}\frac{n^2\pi}{4}-\frac{7}{n}$, $b_n=2^{(-2)^n}$ y $c_n=\cos n+n$ alguna subsucesión convergente?

11. Demostrar que $\{a_n\}\to a>0\Rightarrow\{\sqrt{a_n}\}\to\sqrt{a}$, y que $\{a_n\}\to\infty\Rightarrow\{\sqrt{a_n}\}\to\infty$.

12. Sea $a_n\le b_n\le c_n$. Probar que:
i) $a_n\to L, c_n\to L\Rightarrow b_n\to L$; ii) $b_n\to\infty\Rightarrow c_n\to\infty$; iii) $b_n\to-\infty\Rightarrow a_n\to-\infty$.

13. Sean: $c_n\to 0$, $b_n\to 1$, $i_n\to\infty$, $d_n\to-\infty$ y a_n acotada. ¿Qué se puede afirmar sobre la convergencia de: $\{i_n+d_n\}$, $\{c_n+a_n\}$, $\{c_ni_n\}$, $\{i_na_n\}$, $\{b_na_n\}$, $\{\frac{c_n}{a_n}\}$, $\{\frac{b_n}{c_n}\}$, $\{\frac{i_n}{d_n}\}$, $\{i_n^{c_n}\}$, $\{b_n^{i_n}\}$?

14. Demostrar que si $\{a_n\}$ es acotada y sus únicos puntos de acumulación son 10^7 y 10^{-7}, y la sucesión $\{b_n\}$ diverge hacia $+\infty$, entonces la sucesión $\{a_nb_n\}$ es divergente hacia $+\infty$.

15. Probar por inducción que $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ y hallar el límite de $\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

16. Hallar una sucesión cuyos 5 primeros términos sean $-1,\frac{3}{2},-\frac{5}{6},\frac{7}{24},-\frac{9}{120}$ y precisar si converge.

17. Hallar el límite de $a^{1/n}$ para todo $a\ge 0$, sin hacer uso de teoremas no demostrados.

18. Sean $f(x)=\frac{2x-\operatorname{sen}x}{x+2\operatorname{sen}x}$ y $L=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$. Hallar un M tal que $|f(x)-L|<0.1$ si $x>M$.

19. Utilizando únicamente las definiciones probar que: a) $\lim_{x\to\infty}(4x+100\cos x)=\infty$, b) $\lim_{x\to 3} x^2=9$, y que es falso: c) $\lim_{x\to 2} 3x=5$, d) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x=0$.

20. Probar que $f(x)=x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $f(0)=0$ y $g(x)=\sqrt{|x|}-5x$ son continuas en 0 utilizando la definición ε-δ. En particular, determinar un δ para $\varepsilon=1$ y $\varepsilon=0.01$.

21. Describir todas las funciones f que cumplen las siguientes condiciones:

a) $\forall\varepsilon\ \exists\delta>0 : |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$;

b) $\forall\varepsilon>0\ \forall\delta>0 : |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

22. Sean $f(x)=[\frac{1}{x}]$ (parte entera), $x>0$; $g(x)=\cos\frac{1}{x}$; $h(x)=\frac{\tan x}{x^2}$; $k(x)=\begin{cases}|2-x| \text{ si } x<3\\ x-4 \text{ si } x\geq 3\end{cases}$.

Determinar los puntos a para los que dichas funciones tienen límite en a; son continuas en a; poseen límites laterales en a. Ver si tienen límite cuando x tiende a ∞.

23. Determinar (si existen) los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{sen}|x|-x}-1}{1-\log(x+\cos x)}$; b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{|x|}{7x}$; c) $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{3+2x}{x+5x^2}-\dfrac{3}{x}\right]$; d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{6x-\operatorname{sen}2x}{2x+3\operatorname{sen}4x}$;

e) $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{2x^2}-\sqrt{2x^2-6x}\right]$; f) $\lim_{x\to\infty}\operatorname{th}(\operatorname{ch}x-\cos x)$; g) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$;

h) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{\log x}-\frac{3}{\sqrt{\log x}}\right]$; i) $\lim_{x\to 1} e^{-1/|x-1|}$; j) $\lim_{x\to 1}\operatorname{sh}(\log x)$; k) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x-1}$.

24. Hallar (si existe) el límite de las siguientes sucesiones:

a) $a_n=\frac{2n-\sqrt{n^3}}{3n+\log n}$; b) $b_n=\frac{1}{2n}\sqrt{12n^3+6n-2}-\sqrt{3n-5}$; c) $c_n=n^3-\sqrt{n!}$;

d) $d_n=[\frac{n+1}{n^2+2}]^n$; e) $e_n=[\frac{n^2+1}{n^2+2}]^n$; f) $f_n=[n^5+n+7]^{1/n}$; g) $g_n=\frac{n!}{n^n}$.

25. Supóngase que f es continua en $[a,b]$ y que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué puede decirse acerca de f?

26. Probar que $x^5=2^x$ tiene una solución i) menor que 2, ii) mayor que 2.

27. Sea $f(x)=\log|x-1|-\cos x$. ¿Existe $c\in(0,2)$ con $f(c)=0$? ¿Alcanza su valor mínimo en $[0,4]$?

28. Supóngase f continua en $[a,b]$ y sea c un número cualquiera. Demostrar que existe un punto de la gráfica de f en $[a,b]$ para el que la distancia a $(c,0)$ se hace mínima. ¿Es cierto lo anterior si sustituimos $[a,b]$ por (a,b)? ¿Y si sustituimos $[a,b]$ por $\mathbf{R}$?

29. Demostrar que $f(x)=7x-5$ es uniformemente continua en $\mathbf{R}$ y que $g(x)=x^2$ no lo es.

Derivadas en R

1. Hallar las derivadas de las funciones inversas $(\mathrm{sh})^{-1}$, $(\mathrm{ch})^{-1}$ y $(\mathrm{th})^{-1}$.

2. Demostrar que la derivada de una función par es impar y viceversa. ¿Es periódica la derivada de una función periódica?

3. Un astronauta viaja de izquierda a derecha sobre la curva $y=x^2$. Al desconectar el cohete viajará a lo largo de la tangente a la curva en el punto en que se encuentre. ¿En qué punto debe desconectar para alcanzar i) $(4,9)$, ii) $(4,-9)$?

4. Hallar los valores a tales que la recta tangente a la gráfica de $f(x)=(x^2-3)\mathrm{e}^{-x}$ en $x=a$ pase por el punto $(1,0)$.

5. Probar que la tangente a la gráfica de $f(x)=\frac{1}{x}$ corta a la gráfica de f sólo en el propio punto $(a,\frac{1}{a})$.

6. Hallar la ecuación de la elipse con sus ejes paralelos a los coordenados y centrada en el origen que tiene por tangente la recta $5y+4x=25$ en un punto de abscisa $x=4$.

7. ¿Bajo qué ángulos se cortan las curvas $y=\mathrm{sen}\,x$, $y=\cos x$?

8. Probar que $f(x)=x^2-x\,\mathrm{sen}\,x-\cos x$ tiene exactamente dos ceros.

9. Dibujar la gráfica de $f(x)=|4x-3|-x^2$. Determinar los valores máximo y mínimo que alcanza la función f en el intervalo $[-3,3]$. ¿Existe algún $x\in(0,2/3)$ para el que $f(x)=0$?

10. Probar que: f' acotada en un intervalo $I \Rightarrow f$ uniformemente continua en I .
Probar que $f(x)=(1+x^2)^{-1}$ es uniformemente continua en todo $\mathbf{R}$.

11. Sean $P(x)=x^5+3x^4-7x^3-21x^2+10x+30$ y $Q(x)=x^3-3x^2-5x+15$. Hallar el $\mathrm{mcd}(P,Q)$. Hallar las raíces de P y de Q . Realizar el producto $P\cdot Q$ y la división P/Q .

12. Ver que $P(x)=2x^5+3x^4+4x^3+6x^2+2x+3$ tiene raíces múltiples y hallar todas sus raíces.

13. Hallar todas las soluciones de: $x^4+2x^2+8x+5=0$, $x^4+1=0$, $3x^4-7x^3-7x+3=0$.

14. Precisar cuántas raíces de los siguientes polinomios hay en los intervalos que se indican:
a) $P(x)=3x^3-x^2+x-1$ en $(-\infty,0)$ y en $(1,\infty)$ b) $P(x)=x^4+x^3+x^2+x$ en $(-\infty,0)$ y en $(0,1)$
c) $P(x)=x^4+8x-1$ en $(-3,-2)$ y en $(0,1)$ d) $P(x)=2x^5+8x^3+5x-6$ en $(-\infty,0)$ y en $(0,\infty)$

15. Probar que el polinomio $P(x)=x^5+x+9$ tiene una única raíz real. Encontrar, utilizando el teorema de Bolzano, un intervalo de longitud 1/4 en el que se encuentre dicha raíz. Precisar el valor de la raíz utilizando el método de Newton.

16. Sean los polinomios cúbicos: i) x^3+x-17 , ii) $2x^3-7x^2+1$, iii) $16x^3-12x^2+1$. Dibujar sus gráficas. Hallar sus raíces reales a partir de las fórmulas de los apuntes. Hallar aproximadamente dichas raíces utilizando el método de Newton.

17. Hallar aproximadamente todas las soluciones reales de las siguientes ecuaciones:
a) $3x^3-2x^2-6x+4=0$; b) $x^4+4x^2-1=0$; c) $x^5+x+1=0$;
d) $x\,\mathrm{sen}\,x+\cos x=x^2$; e) $x\,\mathrm{th}\,x=1$; f) $\log|x|=x-1$.

18. Hallar aproximadamente los cortes con $y=0$, los extremos y los puntos de inflexión de
$P(x)=9x^4+8x^3+28x^2+24x+3$, $Q(x)=2x^5-15x^3+20x^2+5x+3$ y $f(x)=e^x-x^3$.

19. Aplicar el método de Newton partiendo de $x_0=1$ a las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt[3]{x}$.

20. Ver que $f(x)=e^{x/3}$ es contractiva en $[0,2]$ y aproximar el único cero de $x=e^{x/3}$ en dicho intervalo.

21. Precisar cuántos ceros reales tiene el polinomio $P(x)$ cuya derivada es $P'(x)=3x^2+2x-8$ y tal que la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto de abscisa $x=0$ pasa por $(1,-1)$.

22. Dibujar las gráficas de las funciones:
a) $3x^4-4x^3$; b) $\frac{x}{x^2+1}$; c) $\frac{x^2-4x+5}{x-2}$; d) $\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$; e) $x^3\sqrt{4-x^2}$; f) $3x^{2/3}+2x$;
g) $3\,\mathrm{sen}(x-2)$; h) $\frac{x}{4}-\sec x$; i) $1+|\tan x|$; j) $\cos^2 2x-|\cos x|$; k) $\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}$;
l) $\mathrm{arc\,sen}\,\frac{1-x^2}{1+x^2}$; m) $e^{-|x|}$; n) e^{-x^2} ; ñ) $\mathrm{sen}(\tan x)$; o) $\log(x^2-x)$.

23. Dibujar las curvas:
a) $x^2+y^2+2x-4y=0$; b) $x^2-xy+y^2=3$; c) $4x^2-y^2-8x=12$; d) $x^2y^2=x^2-1$.

24. Una farola, que tiene su luz a 3 m de su base, ilumina a un peatón de 1.75 m que se aleja a una velocidad constante de 1 m/s . ¿A qué velocidad se mueve el extremo de su sombra? ¿A qué velocidad crece dicha sombra?

25. Un globo se eleva verticalmente desde el suelo a 100 m de un observador, a una velocidad de 2 m/s . ¿A que ritmo crece el ángulo de elevación de la línea de visión del observador cuando el globo está a una altura de i) 10 m , ii) 100 m ?

26. Un tren parte de una estación en línea recta hacia el norte a 100 km/h . 12 minutos después parte otro hacia el este a 50 km/h . ¿A qué ritmo cambia la distancia entre los trenes 1 hora después de la partida del segundo?

27. Hallar el valor mínimo de la suma de los arcos tangentes de dos reales ≥ 0 cuya suma sea 1 .

28. Hallar los puntos de la gráfica de $f(x)=\sqrt{6+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}}$ situados a mayor y menor distancia del $(4,0)$.

29. a) Precisar el número de raíces reales de $P(x)=3x^4-3x+1$. b) Determinar si el punto de la curva $y=x^3$ más cercano al punto $(0,1)$ está a la derecha o a la izquierda de $x=1/2$.

30. Hallar la forma del cono de mayor volumen entre aquellos de superficie fija (base incluida).

31. Un lanzador de peso es capaz de lanzar desde una altura de 1.5 m sobre el suelo con una velocidad de 12 m/s . Hallar el ángulo con el que debe hacerlo para llegar lo más lejos posible. ¿Qué longitud puede alcanzar (tomar g=10 m/s^2)?

32. Determinar los puntos de la parte de la gráfica de $g(x)=1-(x-2)^3$ contenida en $x,y\geq 0$, para los que la recta tangente en ellos corta el eje y en el punto i) más alto, ii) más bajo.

Series, Taylor y límites indeterminados

1. Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes:

a) $\sum \frac{\sqrt[3]{4n+5}}{\sqrt[4]{n^5+3}}$ b) $\sum n^2(\frac{e}{3})^n$ c) $\sum(-1)^n e^{-1/n^2}$ d) $\sum \frac{7^n+\log n}{n!+n^3}$

e) $\sum \frac{n}{(-3)^n}$ f) $\sum \frac{3n+1}{n(2n-1)}$ g) $\sum(-1)^n \frac{2n+(-1)^n}{n^3+(-1)^n}$ h) $\sum 3^{n\cos 2}$

i) $\sum \cos \frac{\sqrt{n+1}}{n!}$ j) $\sum \frac{\operatorname{sen} n}{n^{3/2}}$ k) $\sum(-1)^n \tan \frac{1}{n}$ l) $\sum \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{n}$

2. Estudiar la convergencia de la serie $\sum a_n$, siendo $a_{n+1} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2} a_n$ y $a_1 = 1$.

3. Precisar para qué $c \in \mathbf{R}$ convergen las series: a) $\sum(\sqrt{n^c+1} - \sqrt{n^c})$; b) $\sum \frac{c^{n^2-5n}}{n^3}$.

4. Hallar la suma de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11}}$, con error menor que 10^{-5} .

5. Precisar los x para los que converge $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$ y hallar su suma. Para i) $x = \frac{1}{4}$, ii) $x = -\frac{1}{4}$, ¿cuántos términos hay que sumar para aproximar el valor exacto con error menor que 10^{-3} ?

6. Probar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+5^n}$ converge y que su suma está entre 0.213 y 0.215 .
[Usar los tres primeros términos y acotar el resto mediante una serie geométrica].

7. Una pelota cae desde una altura inicial de 1 m sobre una superficie horizontal. Si en cada rebote alcanza un 80 % de la altura anterior, ¿qué distancia recorre hasta pararse?

8. Una persona y su perro caminan a una velocidad de 1 m/s hacia su casa. A 100 m de la puerta el perro comienza a correr yendo y viniendo de la persona a la puerta a 4 m/s , hasta que la persona entra en casa. ¿Qué distancia recorre el perro desde que empieza a correr?

9. Estudiar en qué subconjuntos de $\mathbf{R}$ convergen uniformemente las siguientes $f_n(x)$:

a) $\frac{x}{\sqrt{n^3+x}}$; b) $\cos^n x$; c) $x^{1/n}$; d) $\frac{\operatorname{sen} nx}{n}$; e) $nx^2 e^{-nx^2}$.

10. Estudiar para qué x convergen, y si lo hacen uniformemente en el intervalo que se indica:

a) $\sum \frac{x}{n+1}$ en $[0,1]$; b) $\sum e^{-nx^2} \operatorname{sen} nx$ en $[1,\infty)$; c) $\sum \frac{x^n}{(n+1)2^n}$ en $[-1,1]$; d) $\sum \frac{x}{\sqrt{n^3+x}}$ en $[0,1]$.

11. Sumar la serie $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{[x+1][2x+1]} + \frac{x}{[2x+1][3x+1]} + \cdots$ ¿Converge uniformemente en $[0,\infty)$?

12. Escribir el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$ ordenado en potencias de $(x-2)$.

13. Calcular P_3 , el polinomio de Taylor de grado 3 en $x = 0$ de $f(x) = \tan x$. Determinar si $P_3(1)$ es mayor o menor que $\tan 1$ sin utilizar calculadora.

14. Probar que $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{2}$.
Usando el desarrollo de $\arctan x$, calcular el valor de π con error menor que 10^{-3}.

15. Calcular el valor de $\sqrt[10]{1.2}$ con error menor que 0.01 . Hallar el valor de $\sqrt{1/2}$ a partir de un polinomio de Taylor de orden 3 y dar una cota del error cometido.

16. Escribir la serie de Taylor de $f(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$, hallar su radio de convergencia y precisar donde la serie coincide con f. Aproximar con el polinomio de Taylor de f de orden 3 el valor de $\log 2$ dando una cota del error cometido.

17. Sea $P_3(x)$ el polinomio de Tayor de orden 3 en $x=\mathrm{e}$ de $f(x)=x\log x$. ¿Se comete un error menor que 10^{-3} si se aproxima $f(3)=\log 27$ con el valor de $P_3(3)$?

18. Hallar el desarrollo de Taylor hasta x^6 de la función $f(x)=[36+x^3]^{-1/2}$. Hallar un racional que aproxime con error menor que 10^{-2} : i) $f(2)$, ii) $f(-1)$.

19. Utilizando polinomios de Taylor determinar con un error menor que 10^{-3} el valor de:

$$\text{a) } \operatorname{sen} 3\,,\ \ \text{b) } \mathrm{e}^{-2}\,,\ \ \text{c) } \log\tfrac{1}{2}\,,\ \ \text{d) } \operatorname{sh}(-1)\,,\ \ \text{e) } \operatorname{ch}\tfrac{1}{2}$$

20. Desarrollar en $x=0$, hallando su término general y su radio de convergencia, e indicando dónde coinciden función y serie:

$$\text{a) } 2x\mathrm{e}^{-2x}\,;\quad \text{b) } 3^{x^2}\,;\quad \text{c) } -\log(1-2x)\,;\quad \text{d) } \tfrac{5x-1}{x^2-x-2}\,;\quad \text{e) } (1+x)^{-2}\,.$$

21. Hallar los 4 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Taylor en $x=0$ de:

$$\text{a) } \mathrm{e}^{-x}\cos x\,;\quad \text{b) } [\arctan x]^2\,;\quad \text{c) } \tfrac{\operatorname{ch} x}{(1+x)^3}\,;\quad \text{d) } \tfrac{\cos 2x}{1+x^2}\,;\quad \text{e) } \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,.$$

22. Hallar la suma de las siguientes series:

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{e}^{1-4n}\,;\quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln\tfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\,;\quad \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{2^{2n}(2n+1)}\,;\quad \text{d) } \sum_{n=2}^{\infty} \tfrac{4}{n^2-1}=3\,.$$

23. Hallar los polinomios Q_1 , Q_2 y Q_3 de interpolación de $\cos x$ en los puntos x siguientes:

$$\text{a) } 0 \text{ y } \pi/3\,;\quad \text{b) } 0,\ \pi/3 \text{ y } \pi/2\,;\quad \text{c) } 0,\ \pi/6,\ \pi/3 \text{ y } \pi/2\,.$$

Utilizar Q_1 y Q_2 para aproximar el x tal que $\cos x=x$.

24. Hallar el A_4 de la fórmula de interpolación de Newton para puntos equidistantes. Hallar el Q_4 que interpola $\operatorname{sen}^2(\pi x)$ en 0, 1/4, 1/2, 3/4 y 1 . Aproximar con él $\operatorname{sen}^2(7\pi/12)$.

25. Hallar un polinomio cúbico $P(x)$ tal que $\frac{x\cos x-P(x)}{(x-1)^3}$ tienda a 0 cuando x tiende a 1 .

26. Sea $f\in C^4$. Probar que: $f'(a)=\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}+o(h)$ y $f''(a)=\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}+o(h)$.
Si $f(x)=4^x$, aprovechar lo anterior para aproximar $f'(0)$ y $f''(0)$ tomando $h=1/2$.

27. Calcular los siguientes límites indeterminados cuando x tiende al a indicado:

$$a=0\ :\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,,\quad \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-x^2-2}{\operatorname{sen}^2 x-x^2}\,,\quad \frac{\log[\cos 2x]}{\log[\cos 3x]}\,,\quad \frac{\operatorname{ch} x-\cos x}{x^2}\,;$$

$$a=0^+\ :\ \left[\tfrac{1}{\mathrm{e}}(1+x)^{1/x}\right]^{1/x}\,;\quad a=1^-\ :\ \log x\log(1-x)\,;$$

$$a=\infty\ :\ \frac{1-x\arctan(1/x)}{1-\cos(1/x)}\,,\quad [\cos\tfrac{1}{x}]^{\log x}\,,\quad x^4\left[\cos\tfrac{1}{x}-\mathrm{e}^{-1/x^2}\right]\,.$$

28. Hallar el límite cuando x tiende a 0 , ∞ , -1^+ de:

$$\text{i) } \frac{\log(1+2x^2)-\log(1+x^2)}{\arctan x^2}\,;\quad \text{ii) } x[\cos\tfrac{1}{x}-1]\,;\quad \text{iii) } \frac{x-\operatorname{sen} x}{x\arctan x^2}\,;\quad \text{iv) } \frac{\arctan x-\operatorname{sh} x}{x(\operatorname{ch} x-\cos x)}\,.$$

29. Hallar el límite cuando $x\to 0$ para el único valor de a para el es finito:

$$\text{i) } \frac{\cos x-\mathrm{e}^{ax}}{\operatorname{sen} x+\log(1-x)}\,;\quad \text{ii) } \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}-\frac{a}{x^2}\,.$$

30. Precisar para qué valores de b tiene límite $x^{-b}[\sqrt{1+9x^4}-1]$ si i) $x\to 0^+$, ii) $x\to\infty$.

31. Hallar el límite cuando $x\to 0$ de $\frac{\operatorname{sen}x^2-x^2}{x^{2n}}$ y $\frac{\tan x}{x^n}$ para todos los n enteros en que exista.

32. Definiendo $f(0)$ para que sean continuas, estudiar si existen $f'(0)$ y $f''(0)$:

$$\text{a) } x\arctan\tfrac{1}{x}\ ; \quad \text{b) } \frac{\tan x}{x}\ ; \quad \text{c) } \frac{\log(1+|x|)}{|x|}\ ; \quad \text{d) } \arctan(\log x^2).$$

33. Dibujar las gráficas de las siguientes funciones:

$$\text{a) } x\log x^2-x^2\ ; \qquad \text{b) } 6\log|x|+\tfrac{1}{x^2}+\tfrac{3}{x^3}\ ; \qquad \text{c) } x\arctan\tfrac{1}{x}\ ; \qquad \text{d) } \mathrm{e}^{-1/x}\ ;$$

$$\text{e) } x^{-1}\mathrm{e}^{-x}\ ; \qquad \text{f) } x^{-3}\mathrm{e}^{-6/x}\ ; \qquad \text{g) } \operatorname{th}\tfrac{1}{x}\ ; \qquad \text{h) } x^{1/x}; \qquad \text{i) } x^a\operatorname{sen}\tfrac{1}{x},\ a\in\mathbf{R}\ .$$

34. Sea $f(x)=\operatorname{sen}x-x\cos x$. Dibujar su gráfica.
Precisar para qué m existe el límite de $x^{-m}f(x)$ si i) $x\to 0$, ii) $x\to\infty$.

35. Sea $f(x)=e^{4/x-4/x^2}$, $f(0)=0$. Determinar los puntos en que f es continua y derivable. Hallar máximos, mínimos y puntos de inflexión. Hallar sus asíntotas. Dibujar su gráfica. Utilizando $P_{1,1}$, polinomio de Taylor de grado 1 en $x=1$, dar un valor aproximado de $f(1.1)$. Determinar sin calculadora si el valor aproximado es mayor o menor que el exacto.

36. i) Dada $g(x)=\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{x})$, evaluarla en $x=\frac{4}{n}$, $n\in\mathbf{N}$, y esbozar su gráfica usando estos datos. ¿Converge la sucesión $\{g(\frac{4}{n})\}$? ¿Posee alguna subsucesión convergente?

ii) Sea $f(x)=x\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{x})$ si $x\neq 0$, $f(0)=0$. Justificar si es f continua y derivable en $x=0$. Determinar el límite de f cuando $x\to\infty$. Hallar los mínimos de f en $x>0$. Estudiar concavidad y convexidad. Dibujar la gráfica de f. Probar que el máximo absoluto de f en todo $\mathbf{R}$ se alcanza en un $x\in[2,3]$.

37. Calcular el límite de las siguientes sucesiones:

$$\text{a) } a_n=n^{-1}\log_2 n+n^2 2^{-n}\ ; \quad \text{b) } b_n=\frac{n^2-1}{3n}\operatorname{sen}\frac{n}{n^2-1}\ ; \quad \text{c) } c_n=n^3(1-\cos\tfrac{1}{n})\log(1+\tfrac{1}{n})$$

(utilizar técnicas de cálculo de límites de funciones y justificar los pasos).

38. Usando el teorema del valor medio encontrar el límite de la sucesión $a_n=n^{1/3}-(n+1)^{1/3}$.

Integración en R

1. Utilizando exclusivamente la definición de integral calcular $\int_0^1 x\,dx$ e $\int_1^2 x^{-2}dx$.

2. Sea f acotada en $[a,b]$. Determinar si las siguientes implicaciones son verdaderas o falsas:

$f \in C^1[a,b] \Rightarrow f$ integrable en $[a,b]$; f integrable en $[a,b] \Rightarrow f$ alcanza su máximo en $[a,b]$;

f decreciente en $[a,b] \Rightarrow f$ integrable en $[a,b]$; f integrable en $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f^2 = \left[\int_a^b f\right]^2$.

3. Aproximar e con la definición $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ y las desigualdades $t^{-21/20} < \frac{1}{t} < t^{-19/20}$, $t > 1$.

4. Sea f definida por: $f(x) = -1$ si $x \in (0,1)$; $f(x) = 3-2x$ si $x \in (1,2)$; $f(0) = f(1) = f(2) = 0$.
Hallar $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ y $\Phi(x) = \int_0^x F(t)dt$ para los $x \in [0,2]$ que exista.
Determinar dónde Φ tiene primera y segunda derivadas, calculando Φ' y Φ''.

5. Si $F(x) = x\int_0^x e^{t^2}dt$, hallar $F''(5)$.

6. Derivar las siguientes funciones:

a) $F(x) = \int_1^{x^3} \operatorname{sen}^3 t\,dt$; b) $G(x) = \int_1^x x \operatorname{sen} t^3\,dt$; c) $H(x) = \operatorname{sen}\left(\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t\,dt\right)dy\right)$.

7. Determinar en qué x del intervalo que se indica alcanzan su máximo y su mínimo las funciones:

a) $F(x) = \int_{-1}^x \frac{t\,dt}{t^2-9}$ en $[-1,2]$; b) $G(x) = \int_x^{x+1} \frac{t\,dt}{t^2+2}$ en $\mathbf{R}$;

c) $H(x) = \int_{-2}^{3x-x^2} t e^{t^4}dt$ en $[0,2]$; d) $K(x) = \int_\pi^x \operatorname{sen}^2 t\,dt$ en $[0,4\pi]$.

8. Siendo $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+3t^4}\,dt$ y $g(x) = e^{2x}$, hallar $(f\circ g)'(0)$ y $(g\circ f)'(0)$.

9. Calcular $(f^{-1})'(0)$ si $f(x) = \int_\pi^x [1+\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)]\,dt$.

10. Calcular las siguientes primitivas:

a) $\int \frac{dx}{x^3+x-2}$ b) $\int x^3 e^{-x}dx$ c) $\int x \arctan x\,dx$ d) $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$ e) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$

f) $\int \frac{\cos x\,dx}{3+\cos^2 x}$ g) $\int \cos^5 x \operatorname{sen}^2 x\,dx$ h) $\int x^3 (\log x)^2 dx$ i) $\int \cos(\log x)\,dx$ j) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$

k) $\int \cos^2(\pi x)\,dx$ l) $\int e^{2x}\cos(e^x)\,dx$ m) $\int \operatorname{sen}^6 x\,dx$ n) $\int e^x \log(e^x+1)dx$ ñ) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

o) $\int \sqrt{x}\,e^{-2\sqrt{x}}dx$ p) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$ q) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}$ r) $\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ s) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$

11. Expresar $I_n(x) = \int \frac{dx}{[x^2+a^2]^n}$ en función de $I_{n-1}(x)$. Calcular $\int \frac{dx}{[x^2+1]^2}$ y $\int \frac{dx}{[x^2+2x+5]^3}$.

12. Expresar $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$ en función de I_{n-2}. Calcular I_{2n}, I_{2n+1}.

13. Calcular: $\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx$, $\int_0^\pi \cos mx \cos nx\,dx$, $\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx$, $m,n \in \mathbf{N}$.

14. Explicar por qué el cambio de variable resultados falsos si:

a) $\int_{-1}^1 dx$, $t = x^{2/3}$; b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$, $t = \frac{1}{x}$.

15. Sea f continua en $\mathbf{R}$ y sea f una primitiva de f ¿Si f es impar, es necesariamente f par? ¿Si f es par, es necesariamente f impar? ¿Si f es periódica es necesariamente f periódica?

16. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias. Hallar su valor si se puede:

a) $\int_\pi^\infty \frac{\arctan x}{x^3-8}\,dx$ b) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{4/3}}$ c) $\int_1^\infty \log(1+\frac{4}{x^2})dx$ d) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx$ e) $\int_0^\infty \frac{x\cos x}{e^x}\,dx$

f) $\int_0^\infty \frac{dx}{2e^x-1}$ g) $\int_1^\infty \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\,dx$ h) $\int_0^\infty x\,\mathrm{sen}^2(\frac{\pi}{x})\,dx$ i) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$ j) $\int_1^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

k) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x^2}\,dx$ l) $\int_1^\infty \frac{x+2e^{\cos x}}{x^3-2\sqrt{2}}\,dx$ m) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^4 x}{e^{x^4}-1}\,dx$ n) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{2x}-1}$

17. Sea $f(x)=\frac{1}{x}+4\arctan x$. Dibujar su gráfica y probar que $\pi+1\leq\int_1^2 f\leq 2\pi$.
Determinar si converge la integral impropia $\int_1^\infty f$. Hallar $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f$.

18. Aproximar $\log 2=\int_1^2\frac{dx}{x}$ utilizando las fórmulas de los trapecios ($n{=}2,n{=}4$) y Simpson ($n{=}2,n{=}4$; o sea, $m{=}1,m=2$).

19. Aproximar $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, $\int_0^1\sqrt{x^4+1}\,dx$ e $\int_1^2\frac{e^x}{x}dx$ utilizando Taylor y Simpson.

20. Probar las acotaciones:

i) $0\leq\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}(\mathrm{sen}\,x)\,dx\leq\frac{\pi}{2}$, ii) $\frac{2}{21}\leq\int_0^1\frac{x^6dx}{\sqrt{x^4+1}}\leq\frac{1}{7}$, iii) $\frac{3}{8}\leq\int_0^{1/2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx\leq\frac{2}{5}$.

21. Sea $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$. Estudiar si es derivable en $x=0$. Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de f en el intervalo $[-4,1]$. Calcular $\int_{-4}^4 f$. Probar que $\frac{7}{10}\leq\int_0^1 f\leq\frac{7}{8}$.

22. Estudiar para qué valores enteros de n se verifica que $3<\int_0^1\frac{nx}{4+x^4}\,dx<4$.

23. Hallar el valor de $I=\int_0^1\frac{x}{x^4-16}\,dx$ y un racional que aproxime I con error menor que 10^{-2}.

24. Sea $f(x)=\frac{x^2+2}{x^4+4}$. Hallar una primitiva de f . Probar que $\frac{1}{2}\leq\int_0^1 f\leq\frac{3}{4}$.

25. Sea $f(x)=\int_0^x\mathrm{sen}\,t^2dt$. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{sen}\,x}{f(x)}$. Utilizar el polinomio de Taylor de orden 3 de f en el origen para hallar un valor aproximado de $f(\frac{1}{2})$. ¿Es menor que 10^{-2} el error cometido?

26. Sea $f(x)=e^{2x-x^2}$. a) Aproximar $\int_0^1 f$ usando el desarrollo de Taylor hasta x^4 de f .
b) Sea $H(x)=\int_x^{x+1}f$, $x\in[0,2]$. Precisar en qué x alcanza sus valores máximo y mínimo.
c) Calcular el límite de $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, i) cuando $x\to 0$, ii) cuando $x\to\infty$.

27. Precisar dónde $f(x)=\frac{1}{x}[\sqrt[3]{1+3x}-1]$, $f(0)=1$, es derivable. Hallar $\mathrm{im}f$.
Probar que $\int_{-2/3}^0 f=6-\frac{3}{2}\log 3-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}$ y aproximar la integral por Simpson con $h=\frac{1}{3}$.
Determinar si converge $\int_1^\infty f$. Si $F(x)=\int_{-x}^0 f$, hallar $F'(3)$.

28. Hallar el área de la región acotada entre el eje x y la gráfica de $f(x)=|x^3-1|-2$.

29. Hallar el área de la región encerrada entre la gráfica de $g(x){=}|3{-}4x^{-2}|$ y su recta tangente en $x{=}2$.

30. Calcular el área de la región interior a la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

31. Hallar el área de la región encerrada entre la curva $y=x^3$ y la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x=a>0$.

32. Hallar el área de la región acotada comprendida entre $y=0$, la curva $x^2+y^2=4$ y la tangente a la curva en $(1,-\sqrt{3})$.

33. Hallar el valor mínimo, si existe, de $S(m)=\int_0^1|x^3-mx|dx$.

34. Determinar si es mayor o menor el área encerrada por la gráfica de las funciones i) $f(x)=\mathrm{e}^{-x/2}$, ii) $g(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ y el eje de las x en el intervalo $[0,1]$ o en el intervalo $[1,\infty)$.

35. Probar que el área de la región encerrada entre las gráficas $y=3x$ e $y=\mathrm{e}^x$ es menor que 3.

36. Describir las gráficas de las siguientes funciones escritas en coordenadas polares:

$$\text{a) } r=a\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\quad \text{b) } r=a\sec\theta\,,\quad \text{c) } r=\cos 2\theta\,,\quad \text{d) } r=|\cos 2\theta|\,.$$

37. Hallar el área de la región acotada por el eje x y la gráfica de la función $h(x)=1-|x-1|$, integrando en coordenadas i) cartesianas, ii) polares.

38. Hallar el área de la región encerrada entre la cardioide $r=1+\cos\theta$ y la circunferencia $r=\cos\theta$.

39. Hallar el área comprendida entre las espirales $r=2\mathrm{e}^{-\theta}$ y $r=\mathrm{e}^{-\theta}$ si i) $\theta\in[0,2\pi]$, ii) $\theta\geq 0$.

40. Hallar la longitud de las curvas: i) $y=\log x$, $x\in[1,\mathrm{e}]$; ii) $y=x^{2/3}$, $x\in[0,1]$.

41. El perímetro de una elipse de eje mayor $2a$ y de excentricidad k $\left(k^2=1-\frac{a^2}{b^2}\right)$ viene dado por $L=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\;d\theta$. Evaluar L integrando término a término el desarrollo de la raíz en potencias de $k^2 sen^2\theta$. Hallar aproximadamente el perímetro de la elipse $3x^2+4y^2=12$.

42. Un sólido tiene por base el triángulo del plano xy limitado por los ejes y la recta $x+y=1$. Cada sección producida por un plano perpendicular al eje x es un cuadrado uno de cuyos lados está en la base. Hallar su volumen.

43. Hallar el volumen del 'toro' obtenido al girar un círculo de radio r en torno a una recta, situada en el plano del círculo, que está a una distancia $d>r$ de su centro.

44. Sea R la región limitada por $y=\frac{x}{1+x}$ y el eje x en $[1,2]$. a) Hallar el área de R integrando respecto a i) x, ii) y. b) Hallar el volumen del sólido de revolución que genera R al girar en torno i) al eje x; ii) al eje y; iii) a la recta $y=1$.

45. Supongamos que $f(x)\to 3$ si $x\to\infty$. ¿Qué ocurre con el valor medio de f en $[0,b]$ cuando $b\to\infty$? Justificarlo.

46. Sea una varilla de longitud L situada en el eje x con un extremo en el origen. Hallar su centro de gravedad y su momento de inercia respecto del origen si su densidad es

$$\rho(x)=\begin{cases} x^2 \text{ si } 0\leq x\leq L/2 \\ L^2/4 \text{ si } L/2\leq x\leq L \end{cases}.$$

47. Una partícula avanza por el eje x con velocidad $v(t)=t(1+t^2)^a$ m/s en el instante t. Si inicialmente está en $x=0$, ¿para qué valores de a: i) recorre 1 m antes de 1 s, ii) recorre 1 m en un tiempo finito, iii) alcanza cualquier punto del semieje positivo en tiempo finito?

Introducción al cálculo en $\mathbf{C}$

1. Escribir los complejos: i) $-5\mathrm{i}$, $-3-\mathrm{i}\sqrt{3}$, $-\pi$, $4-3\mathrm{i}$, en la forma $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
ii) $3\mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}}$, $4\cos\frac{\pi}{6}-4\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,2}$, i^{765432} , en la forma $a+b\mathrm{i}$.

2. Calcular: $\frac{1}{\mathrm{i}}+\frac{3}{1+\mathrm{i}}$, $\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{10}$, $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{5}$, $\sqrt[4]{-16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}$, $\left|e^{3-\mathrm{i}|2+\mathrm{i}|}\right|$.

3. Si $z=x+\mathrm{i}y$, escribir la parte real y la parte imaginaria de: $z+\bar{z}+z\cdot\bar{z}$, z^{-2} , $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$.

4. Determinar si las siguientes igualdades son ciertas para todo z complejo:
$2\,\mathrm{Re}(z)=z+\bar{z}$, $\mathrm{Re}(z\cdot w)=\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Re}(w)$, $|z|=|\bar{z}|$, $z^2=|z|^2$, $\mathrm{sen}(2z)=2\,\mathrm{sen}\,z\cos z$.

5. Resolver las ecuaciones:
$z^2+\mathrm{i}z+2=0$, $z^3+8=0$, $z^4-16z^2+100=0$, $\mathrm{e}^z=1$, $\cos z=4$.

6. Representar los complejos que satisfacen:
$z-\bar{z}=i$, $|z-1|\leq|z+1|$, $|z-1|=2|z+1|$, $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Arg}(z^3)\leq\frac{\pi}{2}$.

7. Estudiar si $f(z)=|z|$ y $g(z)=|z|^2$ son continuas y derivables en $z=0$.

8. Estudiar si la función $f(z)=\sqrt{z}$ que hace corresponder a cada z la raíz con argumento principal más pequeño es continua en todo el plano complejo.

9. Demostrar que $\mathrm{e}^{z+w}=\mathrm{e}^z\mathrm{e}^w$. Probar que $f(z)=\mathrm{e}^z$ toma todos los valores complejos menos el 0, que no es inyectiva y que tiene periodo $2\pi\mathrm{i}$.

10. Definimos $\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)$, $z\neq0$ [$\mathrm{Arg}(z)$ es el argumento principal de z]. Comprobar que $\mathrm{e}^{\ln z}=z$. Hallar $\ln 1$, $\ln(2\mathrm{i})$, $\ln(1+\mathrm{i})$, $\ln(1-\mathrm{i})$. Estudiar la continuidad de $\ln z$.

11. Probar que si $z,w\in\mathbf{C}$ entonces $\big||z|-|w|\big|\leq|z-w|$. Probar que si la sucesión compleja $\{a_n\}$ converge entonces también lo hace la sucesión real $\{|a_n|\}$.

12. Hallar (si existe) el límite de las siguientes sucesiones de complejos:
$2^{-n/2}(1+\mathrm{i})^n$, $\left(\frac{1+5\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}\right)^n$, $2^{-n}(1+\mathrm{i})^n(1-\mathrm{i})^{-n}$, $(n-\mathrm{i})^3n^{-3}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n/(n+1)}$, $\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})/n}$, $\mathrm{e}^{-n\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}$.

13. Determinar si convergen: $\sum\frac{(4-3\mathrm{i})^n}{n!}$, $\sum\frac{2-n\mathrm{i}}{n^2}$, $\sum\mathrm{e}^{\mathrm{i}/n}$, $\sum\frac{\mathrm{i}^n}{n^2}$, $\sum\frac{(-\mathrm{i})^n}{\sqrt{n}}$, $\sum\frac{1}{[2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}]n^2}$.

14. Estudiar si la serie $\sum n^7z^n$ converge cuando i) $z=\frac{4-3\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}$, ii) $z=e^{-3\pi\mathrm{i}}$.

15. Determinar la región del plano complejo en que converge la serie $\sum\frac{z^n}{\mathrm{e}^n+n}$.

16. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias complejas y decidir si convergen para $z=\mathrm{i}$, $z=-\mathrm{i}$, $z=(1-\mathrm{i})^2$, $z=1+\mathrm{e}\mathrm{i}$, $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}|7+3\mathrm{i}|}$:

$$\sum\frac{(-1)^nz^n}{n^3}\ ,\ \sum\frac{2^nz^n}{n!}\ ,\ \sum\frac{n!z^n}{n^n}\ ,\ \sum\frac{\mathrm{i}^nn^nz^n}{2^n}\ ,\ \sum\frac{nz^n}{n+1}\ ,\ \sum\frac{\mathrm{i}^nz^n}{n+1}\ .$$

17. Desarrollar en serie de Taylor en torno a $z=0$, determinando el radio de convergencia:

$$\frac{3z}{1+z-2z^2}\ ,\ \mathrm{sen}\,z\cos z\ ,\ \frac{\mathrm{sen}^2z}{z}\ ,\ \frac{\mathrm{e}^z}{1+z}\ .$$