Examen de diciembre de 2001 de Cálculo I (grupo E). Soluciones:

El conjunto $A=\{x:(1-\frac{1}{x})^2\le 4\}$ es $\mathbf{A} = (-\infty,-1]\cup[\frac{1}{3},\infty)$:

$$(1-\tfrac{1}{x})^2\le 4 \Leftrightarrow |1-\tfrac{1}{x}|\le 2 \Leftrightarrow -3\le -\tfrac{1}{x}\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\text{si } x>0,\ 3x\ge 1 \text{ y } x\ge -1 \to x\ge 1/3\\ \text{si } x<0,\ 3x\le 1 \text{ y } x\le -1 \to x\le -1\end{cases}$$

La sucesión de término general $a_n=\sqrt{n^2+\log(1+n)}-n+\arctan n$ **tiende hacia** $\frac{\pi}{2}$:

$$a_n=\frac{\log(1+n)}{\sqrt{n^2+\log(1+n)}+n}+\arctan n=\frac{\log(1+n)/n}{\sqrt{1+\log(1+n)/n^2}+1}+\arctan n \;\to\; 0+\frac{\pi}{2}$$

La sucesión de término general $a_n=[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}]^7$ **tiende hacia** ∞ :

$$b_n=1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n}\to\infty \text{ (serie divergente) } \Rightarrow a_n=b_n^7\to\infty$$

Las series $\sum\frac{e^{-1/n}}{n}$ y $\sum ne^{-n}$, **una converge y otra diverge** :

$$\sum\frac{1}{n} \text{ divergente y } \frac{e^{-1/n}/n}{1/n}\to 1 \Rightarrow \sum\frac{e^{-1/n}}{n} \text{ es divergente}$$

$$\frac{n+1}{n}\,\frac{e^n}{e^{n+1}}\to e^{-1}<1 \text{ ó } \sqrt[n]{n}\,e^{-1}\to e^{-1}<1 \text{ prueban que la segunda converge}$$

Si f es dos veces derivable en todo **R** y es $f(0)=1, f'(0)=2, f(1)=0, f'(1)=3$, entonces $\mathbf{(f\circ f)'(0)=6}$:

$$(f\circ f)'(0) = f'(f(0))\,f'(0) = 3\times 2=6$$

(inyectiva no es porque es continua, crece al principio y luego decrece para llegar a (1,0); lo de (1/f)' es falsísimo)

El valor mínimo de $f(x)=\frac{1+x^2}{3+x^4}$ en $[0,\infty)$ **no existe** :

Basta ver que $f(x)>0$, tiende a 0 si $x\to\infty$ y nunca vale 0 ($x=0$ es mínimo local y $x=1$ máximo local).

El polinomio $P(x)=x^4+2x^3+1$ tiene exactamente **2** raíces reales distintas:

P no tiene raíces reales positivas $(+++)$ y tiene 0 ó 2 negativas $(+-+)$.
Como $x=-1$ es una raíz inmediata y no es múltiple ($P'(-1)\ne 0$) , hay exactamente 2 .
(También era fácil pintando la gráfica: decrece hasta $-3/2$, después crece, $P(-3/2)<0$ y $P\to\infty$ si $|x|\to\infty$)

La siguiente acotación es cierta: $\mathbf{\frac{1}{4}<\log\frac{13}{10}<\frac{1}{3}}$:

$$\log\frac{13}{10}=\log(1+\tfrac{3}{10})=\frac{3}{10}-\frac{9}{200}+\frac{9}{1000}+\cdots \Rightarrow \frac{1}{4}<\frac{51}{200}<\log\frac{13}{10}<\frac{3}{10}<\frac{1}{3}$$

El coeficiente de x^4 en el desarrollo de Taylor de $f(x)=\frac{\cos 2x}{(1+x^2)^{1/3}}$ en torno a $x=0$ es $\mathbf{\frac{14}{9}}$:

$$\cos 2x\,(1+2x)^{-1/3}=[1-\tfrac{4}{2}x^2+\tfrac{16}{24}x^4+\cdots][1-\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{(-1/3)(-4/3)}{2}x^4+\cdots]=$$
$$=[1-2x^2+\tfrac{2}{3}x^4+\cdots][1-\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{2}{9}x^4+\cdots]=\cdots+x^4(\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{9})+\cdots$$

El límite de $f(x)=x^{-6}[\cos(x^3)-\frac{1}{1-x^6}]$ cuando $x\to 0$ es $\mathbf{-\frac{3}{2}}$.

$$\frac{1-x^6/2+o(x^6)-[1+x^6+o(x^6)]}{x^6}=-\frac{3}{2}+\frac{o(x^6)}{x^6}\to-\frac{3}{2} \text{ cuando } x\to 0$$

[o L'Hôpital: $\dfrac{-3x^2\operatorname{sen}(x^3)-6x^5/(1-x^6)^2}{6x^5}=-\dfrac{\operatorname{sen}(x^3)}{2x^3}-\dfrac{1}{(1-x^6)^2}\to-\dfrac{1}{2}-1$ si $x\to 0$]

Examen de diciembre de 2002 de Cálculo I (grupo D). Soluciones:

El dominio de $f(x)=\log(5-|4-x^2|)$ es $\mathbf{(-3,3)}$:

$|4-x^2|<5 \Leftrightarrow -5<4-x^2<5 \Leftrightarrow -9<-x^2<1 \Leftrightarrow -1<x^2<9 \Leftrightarrow |x|<3$ (f es par y su dominio simétrico)

La sucesión de término general $[1+n+n^2]^{1/n}$ **tiende hacia** $\mathbf{1}$:

$a_n=[n^{1/n}]^2[n^{-2}+n^{-1}+1]^{1/n} \to 1$, pues sabemos que $n^{1/n}\to 1$

La serie $\sum \frac{1}{x^{2n}+n}$, **converge para** $\mathbf{|x|>1}$:

Diverge si $|x|\leq 1$, pues $\frac{1/[x^2+n]}{1/n}\to 1$ y $\sum\frac{1}{n}$ divergente.

Para $|x|>1$ converge: $\sum\frac{1}{x^{2n}+n}\leq\sum\frac{1}{x^{2n}}=\sum\left(\frac{1}{x^2}\right)^n$ geométrica convergente (o por el cociente).

$\mathbf{h(x)=\frac{sh(x^2)-x^2}{sh(x^6)}}\to 0$ cuando $x\to\infty$

$$\frac{e^{x^2}-e^{-x^2}-2x^2}{e^{x^6}-e^{-x^6}}=\frac{1-e^{-2x^2}-2x^2e^{-x^2}}{e^{x^6-x^2}-e^{-x^6-x^2}}\to \text{"}\frac{1-0-0}{\infty-0}=0\text{"}$$

[g(x) claramente tiende a 1 ; $\arcsin(\sin(x))-x\to-\infty$, pues $\arcsin x$ es acotada ($\arcsin(\sin(x))=x$ sólo si $|x|<\frac{\pi}{2}$)]

---

f(x) es **continua, pero no derivable** en x=0 :

$\lim_{x\to 0} x\arctan\frac{1}{x^3}=0$ ($0\times$acotado) , pero $\lim_{h\to 0^+}\arctan\frac{1}{h^3}=\frac{\pi}{2}\neq-\frac{\pi}{2}=\lim_{h\to 0^-}\arctan\frac{1}{h^3}$

El valor máximo de $g(x)=\frac{x^3-1}{x^3+x+2}$ en $[0,1]$ **se alcanza en x=1** :

$g'(x)=\frac{2x^3+9x^2+1}{[x^3+x+2]^2}>0$ si $x\geq 0 \Rightarrow$ g crece en $[0,1]$ (o más fácil: $g(1)=0$ y claramente $g(x)<0$ si $x\in[0,1)$)

[el denominador es positivo en el intervalo y el máximo debía existir; la g' sí se anula a la izquierda de -1]

La recta tangente a $4y^2-x^2=9$ en el punto x=4 y ordenada negativa es $\mathbf{10y+4x+9=0}$:

$x=4\to y=\pm\frac{5}{2}$; $8yy'-2x=0$, $y'=\frac{x}{4y}\Big|_{x=4,\ y=-5/2}=-\frac{2}{5}$; tangente: $y=-\frac{5}{2}-\frac{2}{5}(x-4)=\frac{-4x-9}{10}$

La siguiente desigualdad es cierta: $\mathbf{\cos 1>\frac{1}{2}}$:

$\cos 1=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\cdots \Rightarrow \cos 1>\frac{1}{2}$; o bien $1<\frac{\pi}{3}$ y $\cos x$ decrece en $[0,\pi] \Rightarrow \cos 1>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

[$\cos 3<0$ pues $\pi/2<3<3\pi/2$ y $\cos\frac{1}{2}>\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{3}{4}$ o bien $\cos\frac{1}{2}>1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}>\frac{3}{4}$]

La derivada sexta de $f(x)=(1+x^3)e^{-2x^3}$ en x=0 es $\mathbf{f^{VI}(0)=0}$:

$$(1+x^3)e^{-2x^3}=[1+x^3][1-2x^3+2x^6+\cdots]=\cdots+(2-2)x^6+\cdots=\cdots+\frac{f^{VI}(0)}{6!}x^6+\cdots \Rightarrow f^{VI}(0)=0$$

$h(x)=\frac{sh(x^2)-x^2}{sh(x^6)}\to\mathbf{\frac{1}{6}}$ cuando $x\to 0$:

$$\frac{x^2+x^6/6+o(x^6)-x^2}{x^6+o(x^6)}=\frac{1/6+o(x^6)/x^6}{1+o(x^6)/x^6}\to\frac{1}{6}\text{ cuando } x\to 0$$

[o L'Hôpital: $\lim_{x\to 0}\frac{2x\,ch(x^2)-2x}{6x^5ch(x^6)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3ch(x^6)}\frac{ch(x^2)-1}{x^4}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2x\,sh(x^2)}{4x^3}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{sh(x^2)}{x^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{2x\,ch(x^2)}{2x}$]

Soluciones del test de diciembre de 2003 de Cálculo I (grupo C)

1. $a_n=\operatorname{sen}\left(n^2\pi+\frac{\pi}{n}\right)=\operatorname{sen}(n^2\pi)\cos(\frac{\pi}{n})+\cos(n^2\pi)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})=(-1)^n\operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})$,
que **converge** hacia 0 , pues $(-1)^n$ es acotado, $\frac{\pi}{n}\to 0$, $\operatorname{sen}x$ es continua en 0 y $\operatorname{sen}0=0$.

---

2. $\sum\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$. Raíz o cociente: $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt[n]{n}}$, $\frac{n\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{(n+1)\mathrm{e}^{-nx}}\to\mathrm{e}^{-x}\Rightarrow\begin{cases}\text{si } x>0 \text{ converge } (\mathrm{e}^{-x}<1)\\ \text{si } x<0 \text{ diverge } (\mathrm{e}^{-x}>1)\end{cases}$.

Si $x=0$ estos criterios no deciden, pero sabemos que $\sum\frac{1}{n}$ diverge.
Los x para los que la serie converge son, pues, los del conjunto $\boldsymbol{\{x>0\}}$.

---

3. $\forall x,x^*\in\mathbf{R},\ x\neq x^*\underset{g\text{ inyectiva}}{\Rightarrow}g(x)\neq g(x^*)\underset{f\text{ inyectiva}}{\Rightarrow}f(g(x))\neq f(g(x^*))$; $\boldsymbol{f\circ g}$ es inyectiva.

[$f+g$ y $f\cdot g$ no tienen por qué ser inyectivas en $\mathbf{R}$. Por ejemplo,
$f(x)=x$ y $g(x)=-x$ lo son y, sin embargo, $(f+g)(x)\equiv 0$ y $(f\cdot g)(x)=-x^2$ no lo son].

---

4. $f(1)=1$. Si $x\leq 2$ es $f(x)=\sqrt[3]{|x-2|}=(2-x)^{1/3}$, $f'(x)=-\frac{1}{3}(2-x)^{-2/3}$, $f'(1)=-\frac{1}{3}$.
La recta tangente en $x=1$: $y=1-\frac{1}{3}(x-1)=\frac{1}{3}(4-x)$, corta $y=0$ en $\boldsymbol{x=4}$.

---

5. $P(x)\equiv x^4-4x-3\underset{x\to\pm\infty}{\to}\infty$. $P'(x)=4(x^3-1)\Rightarrow P$ decrece hasta $x=1$ y crece luego. $P(-1)=1$, $P(1)=-6$ y $P(2)=5\Rightarrow$ sus dos raíces reales x_1 y x_2 están en $[-1,1]$ y $[1,2]$.
Por tanto, $A=\{x:P(x)\leq 0\}=[x_1,x_2]\subset\boldsymbol{[-1,2]}$.
[$P(1-\sqrt{2})=1-4\sqrt{2}+12-8\sqrt{2}+4-4+4\sqrt{2}-3=2(5-4\sqrt{2})<0$ pues $25<32$].

---

6. $f(x)=x+2\log(x^2+3)\Rightarrow f'(x)=1+\frac{2x}{x^2+3}=\frac{(x+3)(x+1)}{x^2+3}\Rightarrow\begin{cases}f \text{ decrece en } [-3,-1]\\ f \text{ crece en } [-1,1]\end{cases}$.
El valor máximo ha de ser $f(-3)=-3+2\log 12=4\log 2+2\log 3-3$ ó $f(1)=1+4\log 2$.
Como $2\log 3-3<1\Leftrightarrow\log 3<2\Leftrightarrow 3<\mathrm{e}^2$ (obvio), **el máximo se alcanza en $\boldsymbol{x=1}$** .
[Hallando $f(-3)$, $f(1)$ y $f(-1)=4\log 2-1$, era claro que bastaba comparar los de arriba].

---

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-x^2}{n+x^2}=1\ \forall x\ \Rightarrow\ \{f_n(x)\}\to f(x)=1$ puntualmente en todo $\mathbf{R}$.
$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{-2x^2}{n+x^2}\right|=\frac{2x^2}{n+x^2}\underset{x\in[0,2]}{<}\frac{8}{n}<\varepsilon$, si $n\geq N>\frac{8}{\varepsilon}\Rightarrow$ **converge uniformemente**.

---

8. Es claro que $\arctan 1=\frac{\pi}{4}>\frac{3}{4}$ y que $\arctan 2<\frac{\pi}{2}\approx 1.57$ (cota del $\arctan x$) $<\frac{8}{5}=1.6$.
Es cierto que $\boldsymbol{\arctan\frac{3}{5}>\frac{1}{2}}$, pues $\arctan\frac{3}{5}=\frac{3}{5}-\frac{3^3}{3\cdot 5^3}+\cdots>\frac{3}{5}-\frac{9}{125}=\frac{66}{125}>\frac{1}{2}$,
o porque $\arctan\frac{3}{5}>\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}>\frac{1}{2}$, pues $\frac{3}{5}>\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 3\sqrt{3}>5\Leftrightarrow 27>25$.

---

9. $f(x)=\mathrm{e}^x\frac{\operatorname{sen}x}{x}=\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\cdots\right]\left[1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+\cdots\right]$
$=\cdots+[\frac{1}{120}-\frac{1}{12}+\frac{1}{24}]x^4+\cdots\Rightarrow\frac{f^{IV}(0)}{24}=-\frac{1}{30}\ \Rightarrow\boldsymbol{f^{IV}(0)=-\frac{4}{5}}$.

---

10. $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left[\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}-1\right]=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1+t^3}-1}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1+\frac{1}{2}t^3+\cdots-1}{t^3}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ (o por L'Hôpital).

O bien: $f(x)=\frac{x^3\left[(1+x^{-3})-1\right]}{\sqrt{1+x^{-3}}+1}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}$.

Examen de noviembre de 2004 de Cálculo I (grupo C) (soluciones)

1. $f(x)=\sqrt{\log|1-x^2|-1}$ está definida si $x\neq\pm1$ (para que lo esté el $\log$) y si además es:

$$\log|1-x^2|\geq 1\Leftrightarrow|1-x^2|\geq \mathrm{e}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{o bien } 1-x^2\geq \mathrm{e}\Leftrightarrow x^2\leq 1-\mathrm{e}<0 \text{ (ningún } x)\\ \text{o bien } 1-x^2\leq -\mathrm{e}\Leftrightarrow x^2\leq 1+\mathrm{e}\Leftrightarrow |x|\geq\sqrt{1+\mathrm{e}}\end{cases}$$

Por tanto $\boxed{\mathrm{dom} f=(-\infty,-\sqrt{1+\mathrm{e}}\,]\cup[\sqrt{1+\mathrm{e}},\infty)}$.

---

2. $A=\{\frac{n}{\sqrt{n^3+8}}:n\in\mathbf{N}\}=\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{\sqrt{35}},\frac{\sqrt{2}}{3},\dots\}$. Es una sucesión $\{a_n\}$ que tiende a 0 ($\frac{1}{\sqrt{n+8n^{-2}}}\to 0$).
Como todos los $a_n>0$ y $a_n\to 0$, el $0\notin A$ es el **ínfimo** (**no mínimo**). Al ser convergente, está acotada y el supremo existe. Y este supremo será alguno de los a_n (con lo que tiene **máximo**), ya que a partir de un N todos son menores que $\frac{1}{3}$ (por ejemplo) y el máxA será el máx$\{a_1,\dots,a_{N-1}\}$. Podemos hallarlo: si $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3+8}}$, como $f'(x)=\frac{16-x^3}{(x^3+8)^{3/2}}$, el máximo de $f(x)$ se toma en $x=\sqrt[3]{16}$ y el de $f(n)=a_n$ se dará en el n anterior o posterior: $f(2)<f(3)$ (pues $\frac{1}{4}<\frac{9}{35}$) $\Rightarrow$ máx$A=\frac{3}{\sqrt{35}}$.

---

3. $f(x)=(x-\frac{1}{x})\,\mathrm{e}^{-x}\underset{x\to-1}{\longrightarrow}f(-1)=0$ pues f es continua en $x=-1$. $f(x)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty$ pues $\mathrm{e}^{-x}\to\infty$ y el paréntesis $\to-\infty$. Como $\{a_n\}=\{\cos\frac{1}{n}\}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$ y f es continua en $x=1$, $f(a_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f(1)=0$.
Como $\{\mathrm{e}^{-n}\}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, $\mathrm{e}^{-n}>0$ y $f(x)\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}-\infty$ [$()\to-\infty$, $\mathrm{e}^{-x}\to 1$], $\boxed{f(\mathrm{e}^{-n})\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}-\infty}$ (y no a $+\infty$).
[O directamente: $f(\mathrm{e}^{-n})=(\mathrm{e}^{-n}-\mathrm{e}^{n})\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-n}}\to-\infty$, pues $\mathrm{e}^{-n}\to0$, $\mathrm{e}^{n}\to\infty$ y $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-n}}\to\mathrm{e}^0=1$].

---

4. $f(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1}{x^3}\text{ , si } x\neq 0\\ \frac{\pi}{2}\text{ , si } x=0\end{cases}$. Como $f(x)\underset{x\to0^-}{\longrightarrow}-\frac{\pi}{2}$ (pues $\arctan x\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\frac{\pi}{2}$),
f es **discontinua** (y por tanto **no derivable**) en $x=0$.

---

5. $y^2-2y+4x^2=0\Rightarrow 2yy'-2y'+8x=0$, $y'=\frac{4x}{1-y}$. En $(\frac{2}{5},\frac{2}{5})$ es por tanto $y'=\frac{8/5}{3/5}=\frac{8}{3}\Rightarrow$
la recta tangente es $y=\frac{2}{5}+\frac{8}{3}(x-\frac{2}{5})=\frac{8x-2}{3}$, que corta $y=0$ en $\boxed{x=\frac{1}{4}}$.
[Si se dibuja $\frac{x^2}{(1/2)^2}+\frac{(y-1)^2}{1^2}=1$ está claro que ese es el único punto posible].

---

6. $f(x)=2x+\mathrm{e}^x$, $f'(x)=2+\mathrm{e}^x>0\Rightarrow f$ tiene inversa f^{-1}. $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(f^{-1}(1))}\underset{f(0)=1}{=}\frac{1}{f'(0)}=\boxed{\frac{1}{3}}$.

---

7. y_M e y_m existen por ser $f(x)=\frac{3x+4}{x^2+1}$ continua en $[0,1]$. $f'(x)=\frac{3x^2+3-(3x+4)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{(1-3x)(x+3)}{(x^2+1)^2}$.
$f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}$ ($-3\notin[0,1]$). $f(1/3)=\frac{9}{2}=y_M$, $f(0)=4$, $f(1)=\frac{7}{2}=y_m\Rightarrow\boxed{y_M<7\,,\,y_m<4}$.
[No es preciso derivar para ver que estas desigualdades son ciertas:
como $f(1)=\frac{7}{2}$ es $y_m\leq\frac{7}{2}<4$, y si $x\in(0,1)$ es $f(x)<\frac{3+4}{0+1}=7$].

---

8. $f(x)=(x-\frac{1}{x})\,\mathrm{e}^{-x}\Rightarrow f'(x)=(1+\frac{1}{x^2}-x+\frac{1}{x})\,\mathrm{e}^{-x}=-\frac{P(x)}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}$, llamando $P(x)=x^3-x^2-x-1$.
Descartes asegura que existe un único cero positivo de P, pero no nos aclara si tiene 0 ó 2 negativos.
$P'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)\Rightarrow P$ crece hasta $-\frac{1}{3}$ [con $P(-\frac{1}{3})=-\frac{22}{27}$], luego decrece hasta valer $P(1)=-2$ y vuelve a crecer hasta ∞ [corta $y=0$ en $(1,2)$]. P (igual que f') se anula $\boxed{1}$ vez.

---

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{1-2n}=\mathrm{e}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\mathrm{e}^{-2})^n=\mathrm{e}\frac{\mathrm{e}^{-2}}{1-\mathrm{e}^{-2}}=\frac{1}{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}=\boxed{\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,1}}$.

---

10. a) $\sum\frac{3^n+(-1)^n}{n!}$. Cociente: $\frac{3^{n+1}+(-1)^{n+1}}{3^n+(-1)^n}\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{3-(-1/3)^n}{1+(-1/3)^n}\frac{1}{n+1}\to 3\cdot 0=0\Rightarrow$ **converge**.

b) $\sum\frac{2n^3+11}{\sqrt[3]{n^{11}+n^2}}$ se comporta como $\frac{n^3}{n^{11/3}}=\frac{1}{n^{2/3}}$: $\frac{(2n^3+11)/(n^{2/3}\sqrt[3]{n^9+1})}{1/n^{2/3}}=\frac{2+n^{-3}}{\sqrt[3]{1+n^{-9}}}\to 2>0$.
Como $\sum\frac{1}{n^{2/3}}$ es divergente, la nuestra también **diverge**.

Examen de diciembre de 2005 de Cálculo I (C) (soluciones)

1. La función $f(x)=\log\big[\log(x^2-3|x|+3)\big]$ está definida si el corchete es positivo, es decir, si
$$x^2-3|x|+3>1 \Leftrightarrow |x|^2-3|x|+2=\big(|x|-1\big)\big(|x|-2\big)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(2,\infty)$$

---

2. Como $f(x)=2x-\sqrt{x^3+1}\underset{x>0}{=}x\big[2-\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}\,\big]\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}-\infty$, la afirmación falsa es $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

[f continua en $[-1,\infty)\Rightarrow \lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)=-2$, $f(\frac{2n}{n+1})\to f(2)=1$ y $f(\frac{1}{n})\to f(0)$ y está acotada].

---

3. Si $f(x)=\begin{cases} x+\arctan\frac{1}{x^2}\,,\ x\neq 0\\ \frac{\pi}{2}\,,\ \text{ si } x=0\end{cases}$, para $x\neq 0$ es $f'(x)=1+\frac{-2x^{-3}}{1+(x^{-2})^2}=1-\frac{2x}{x^4+1}\underset{x\to0}{\longrightarrow}1=f'(0)$,

según teorema conocido (f continua en $x=0$). $\big[$O con la definición: $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-\frac{\pi}{2}}{x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim\limits_{x\to0}f'(x)=1\big]$.

---

4. Si $g=f\circ f\circ f$ la regla de la cadena dice que $g'(x)=f'(f(f(x)))\cdot f'(f(x))\cdot f'(x)$, y como:

$f(x)=x^3+x-2$, $f(1)=0$, $f(0)=-2$, $f'(x)=3x^2+1$ es $g'(1)=f'(-2)f'(0)f'(1)=13\cdot1\cdot4=52$.

---

5. $y^2+x^2=2y+2x\Rightarrow 2yy'+2x=2y'+2\Rightarrow y'(2)=\frac{1-x}{y-1}\Big|_{(2,0)}=1$. [Más corto que $y=1-\sqrt{1+2x-x^2}\ldots$].

La recta tangente en $(2,0)$ es, pues, $y=0+1\cdot(x-2)$, que corta el eje y en $y=-2$.

$\big[$Dibujando la circunferencia $\big($de centro $(1,1)$ y radio $\sqrt{2}$ $\big)$ quedaría bastante claro$\big]$.

---

6. Como $h(x)=\frac{x^3-2}{x^2+1}\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}\pm\infty$ está claro que h no decrece en $(-\infty,0]$ y que no tiene asíntota horizontal.

$h'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3-2)}{(x^2+1)^2}=\frac{x(x^3+3x+4)}{(x^2+1)^2}\Rightarrow h$ crece si $x\geq0$ y mínimo en $x=0$ $\big($no inyectiva en $[-2,2]\big)$.

$h(0)<0$, $h\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\infty$, h crece si $x\geq0$, $h(x)<0$ si $x<0$ [ó máximo en $(-1,-\frac{3}{2})$] $\Rightarrow$ $h(x)=1$ para un solo x .

$\big[$Sin derivadas: $h(x)=1\Leftrightarrow x^3-x^2-3=0$, $\left.\begin{matrix}+--\text{, 1 pos}\\ ---\text{, 0 neg}\end{matrix}\right\}$ 1 raíz. $h(-2)=h(0)=-2\Rightarrow$ no inyectiva$\big]$.

---

7. y_M e y_m han de existir por ser f continua en $[-2,3]$. $f(x)=(2+x)\,e^{-x/3}\Rightarrow f'(x)=\frac{1-x}{3}\,e^{-x/3}\Rightarrow$

f crece en $[-2,1]$ y decrece en $[1,3]\Rightarrow y_M=f(1)=3e^{-1/3}<3$, y >2 ya que $e^{1/3}<\frac{3}{2}$ pues $e<3<\frac{27}{8}$

$\big($o bien, porque $3e^{-1/3}=3\big[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{18}-\cdots\big]>3-1>2\,\big)$. El y_m es $f(-2)=0$ $\big(<f(3)=3e^{-1}\big)$.

Las única pareja de desigualdades que se cumple es, pues, $y_M>2$ e $y_m\geq0$.

---

8. Como el denominador tiende a ∞ es claro que $a_n=\dfrac{3}{n\,+\,\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}}$ converge hacia 0 .

Y como $\dfrac{a_n}{1/n}=\dfrac{3}{1+\frac{\operatorname{sen}(n\pi/3)}{n}}\to1$ y sabemos que $\sum\frac{1}{n}$ diverge, la serie $\sum a_n$ diverge.

---

9. Aplicamos cociente o raíz a la serie de potencias $\sum\frac{8^nx^{3n}}{n^3}$: $\frac{8^{n+1}|x|^{3n+3}n^3}{8^n|x|^{3n}(n+1)^3}$, $\frac{8|x|^3}{(n^{1/n})^3}\to8|x|^3$. Por tanto,

si $|x|^3<\frac{1}{8}\Leftrightarrow|x|<\frac{1}{2}$ converge y si $|x|>\frac{1}{2}$ diverge. Para $|x|=\frac{1}{2}$ es $\sum|\cdot|=\sum\frac{1}{n^3}$ convergente.

La serie converge exactamente para los x del intervalo $\big[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big]$.

---

10. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x^2}-e^{x^2}}{x^4}=\dfrac{1+\frac{1}{2}2x^2+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}4x^4+\cdots-(1+x^2+\frac{1}{2}x^4+\cdots)}{x^4}=\dfrac{-x^4+\cdots}{x^4}\underset{x\to0}{\longrightarrow}-1$.

O bien: $f(x)\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{2x(1+2x^2)^{-1/2}-2xe^{x^2}}{4x^3}=\frac{(1+2x^2)^{-1/2}-e^{x^2}}{2x^2}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{-2x(1+2x^2)^{-3/2}-2xe^{x^2}}{4x}=\frac{-(1+2x^2)^{-3/2}-e^{x^2}}{2}\underset{x\to0}{\longrightarrow}-1$.

[Se podría abreviar haciendo el cambio $t=x^2$].

Soluciones del examen del 29 de noviembre de 2006 de Cálculo I (C)

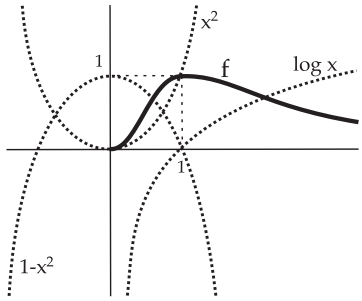
1. Que $\forall K>0\ \exists\delta>0$ tal que $0<|x|<\delta\Rightarrow f(x)>K$ significa que $f(x)\underset{x\to0}{\to}\infty$.
Que $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que $0<|x-1|<\delta\Rightarrow|f(x)-1|<\varepsilon$ significa que $f(x)\underset{x\to1}{\to}1$.
Que $\forall\varepsilon>0\ \exists M>0$ tal que $x>M\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$ significa que $f(x)\underset{x\to\infty}{\to}0$.
Que $\forall K>0\ \exists M>0$ tal que $x>M\Rightarrow f(x)>K$ significa que $f(x)\underset{x\to\infty}{\to}\infty$.

Se tiene que $f(x)=\frac{\operatorname{sen}(\pi x^2)}{x}=\frac{\pi x\operatorname{sen}(\pi x^2)}{\pi x^2}\underset{x\to0}{\to}0$, $f(x)\underset{x\to1}{\to}0$ (f continua en 1) y $\boxed{f(x)\underset{x\to\infty}{\to}0}$ ($\frac{\text{acotado}}{\infty}$).
$\big[$Veámoslo directamente: $\forall\varepsilon>0\ \exists M=\frac{1}{\varepsilon}\ /\ x>M\Rightarrow|f(x)|\le\frac{1}{x}<\varepsilon\,\big]$.

2. Para $f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\le0\\ e^x & \text{si } x>0\end{cases}$ es $\lim\limits_{x\to0^+}f=1\neq0=\lim\limits_{x\to0^-}f\Rightarrow f$ discontinua (y, por tanto, no derivable) en $x=0$.

3. $f(x)=5|x-1|-x^2=\begin{cases}5-5x-x^2\,,\ x\le1\\ 5x-5-x^2\,,\ x\ge1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-5-2x\,,\ x<1\\ 5-2x\ ,\ x>1\end{cases}\Rightarrow f'=0$ si $x=\pm\frac{5}{2}$ y $f'(1)$ no existe.
Los extremos en $[0,3]$ se darán en uno de estos puntos: $\boxed{f(0)=5}$, $\boxed{f(1)=-1}$, $f(\frac{5}{2})=\frac{5}{4}$ ó $f(3)=1$.
Así pues, la única pareja de desigualdades válidas es: $y_M\ge4$, $y_m<1$.

4. $f(x)=\frac{x}{x^2-\log x}$ es continua $\forall x>0$ pues $x^2-\log x>0$.



$f'(x)=\frac{1-x^2-\log x}{(x^2-\log x)^2}=0$ si $x=1$ y $\begin{cases}f'>0\,,\ 0<x<1\\ f'<0\,,\ x>1\end{cases}$.
$f(1)=1$, $f(x)\underset{x\to0^+}{\to}0$ ($\frac{0}{\infty}$), $f(x)=\frac{1}{x-\log x/x}\underset{x\to\infty}{\to}0$.
Máximo de $f=1$. $f'>0$ en $[2,\infty)\Rightarrow f$ inyectiva en $(2,\infty)$.
La única afirmación **falsa** es, pues, $\operatorname{im}f=(0,\infty)$ (es $(0,1]$).

5. Como $f(x)\underset{x\to0^+}{\to}0$ y la sucesión $\frac{1}{n^2}\to0$, $\boxed{f(\frac{1}{n^2})\to0}$. Como $f(x)\underset{x\to\infty}{\to}0$ y $\sqrt{n}\to\infty$, $f(\sqrt{n})\to0$.
$\sum f(n)$ diverge pues se comporta como la divergente $\sum\frac{1}{n}$ $\big[\frac{f(n)}{1/n}=\frac{1}{1-\log n/n^2}\to1\big]$.
$\sum(-1)^nf(n)$ converge por Leibniz $\big[f(n)$ positiva, decreciente y $\to0$, según el problema anterior$\big]$.

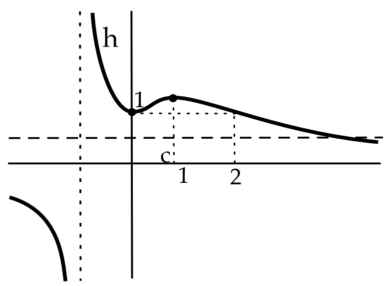
6. $f(x)=(\arctan3x)(1-x)^{-2}=\big[3x-\frac{(3x)^3}{3}+\frac{(3x)^5}{5}-\cdots\big]\big[1+2x+\frac{(-2)(-3)(-x)^2}{2}+\frac{(-2)(-3)(-4)(-x)^3}{6}+\cdots\big]$
$=\big[3x-9x^3+\frac{(3x)^5}{5}-\cdots\big]\big[1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\big]=\cdots+(3\cdot4-9\cdot2)x^4+\cdots=\cdots\boxed{-6x^4}+\cdots$

7. Precisar para qué valores de x converge la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^{3n}}{2n^2+1}$.

$\frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{2n^2+1}{2(n+1)^2+1}\frac{|x|^{3n+3}}{|x|^{3n}}$ ó $\frac{(n^{1/n})^2|x|^3}{(n^{1/n})^2(2+1/n^2)^{1/n}}\to|x|^3<1\Leftrightarrow|x|<1$. Si $x=1$ $\big(\sum\frac{n^2}{2n^2+1}\big)$ y si $x=-1$ $\big(\sum\frac{(-1)^nn^2}{2n^2+1}\big)$ el término general no tiende a 0, con lo que divergen. La serie de potencias converge para $\boxed{x\in(-1,1)}$.

8. Sea $h(x)=\frac{2x^2+1}{x^3+1}$. Hallar asíntotas. Estudiar cuántos máximos y mínimos locales posee h.
¿Existe $c\in(-2,2)$ tal que $h(c)=0$? Precisar cuántas soluciones tiene la ecuación $h(x)=\frac{1}{2}$.

$h\underset{x\to\pm\infty}{\to}0$, $h\underset{x\to-1^+}{\to}\infty$, $h\underset{x\to-1^-}{\to}-\infty$. $h'(x)=\frac{x(4-3x-2x^3)}{(x^3+1)^2}=0$
si $x=0$ y si lo hace el polinomio $P(x)=4-3x-2x^3$.
$P'(x)=-3-6x^2<0\Rightarrow P$ se anula en un único c
[$c\in(0,1)$, pues $P(0)>0>P(1)$].



h decrece en $(-1,0)$, crece en $(0,c)$ y decrece después $\Rightarrow$
mínimo local en $x=0$ (su valor 1) y máximo en $x=c$.
Nunca es $h(x)=0$ (numerador>0). [$h(-2)=-\frac{9}{7}<0<h(2)=1$, pero h es discontinua en el intervalo].
La gráfica muestra que $h(x)=\frac{1}{2}$ para un único x [o bien $h=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^3-4x^2-1=0$ y $\begin{array}{c}+\,-\,-\\ -\,-\,-\end{array}$].