Análisis I (A y B) **febrero90**

1 . Consideremos $f(x) = \frac{x - sen(x)}{arctg(x^3)}$. Calcular el límite de f cuando x tiende a 0 . Sea la sucesión $a_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$. ¿Es convergente? Determinar el límite, si existe, de la sucesión $\{f(a_n)\}$. [2 puntos]

2 . Sea $f(x) = \frac{\cos x}{1+|\operatorname{sen} x|}$. ¿Es periódica? Estudiar su continuidad y derivabilidad. Dibujar su gráfica. [3 puntos]

3 . Sea $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$. Estudiar sus simetrías y asíntotas y dibujarla a grandes rasgos.

Estudiemos ahora la función $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ sobre el intervalo $x \in [-1,2]$.

¿Para qué x de ese intervalo alcanza F su valor máximo? ¿Y el valor mínimo? [3 puntos]

4 . Determinar si son convergentes las siguientes integrales impropias: $\int_{0^+}^1 \frac{dx}{x^4+x^2}$; $\int_1^\infty \frac{dx}{x^4+x^2}$.
Calcular el valor en caso de convergencia. [2 puntos]

Análisis I (A) **junio90**

1 . Sea $f(x) = |4x-3| - x^2$.

a. Determinar los valores máximo y mínimo que alcanza la función f en el intervalo [-3,3] .

b. ¿Existe algún $x \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$ para el que f(x)=0 ? [3 puntos]

2 . Hallar el valor del $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen(x^2)-x^2}{x^{2n}}$ para todos los valores de n entero. [2 puntos]

3 . Sea $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$. **a.** Dibujar la gráfica de f . **b.** Determinar si converge $\int_1^\infty f(x)\,dx$. [3 puntos]

4 . Sea $f(x) = \begin{cases} \log(2-x) & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \le x \le 3 \end{cases}$ y sea $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a. Determinar para que x del intervalo (0,3) es F continua y para cuales es derivable.

b. Hallar F(3) . [2 puntos]

Análisis I (A y B) **septiembre90**

1 . Considérese la sucesión $a_n = \frac{300 \cos n - 2n}{n^2}$. Determinar un número natural N tal que los términos de la sucesión difieran de su límite menos de 10^{-2} para todo $n \ge N$. [2 puntos]

2 . Calcular el $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{ax}}{sen\, x + \log(1-x)}$ para el único valor de a en que existe. [2 puntos]

3 . Sea $f(x) = sen(2x) + sen(23x)$. Probar que existe al menos un $c \in (0,\pi)$ tal que $f'(c) = 0$. [1 punto]

4 . Sea $f(x) = x^{-3} e^{-6/x}$.

a) Determinar el signo de f(x) , las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los x para los que f posee punto de inflexión y con esos datos esquematizar la gráfica de f .

b) Probar que $\int_3^\infty f(x)\,dx$ converge y que su valor es menor que $\frac{1}{18}$. [5 puntos]

Análisis I (A y B) febrero91

1. Determinar si converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n\,(-3)^{-n}$. [1 punto]

2. Determinar si converge la integral impropia $\int_3^{\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x-1}}$. [1 punto]

3 . Probar que el error cometido al calcular $e^{-1/2}$ mediante el polinomio de Taylor de e^x de orden 4 en $x=0$ es menor que 0.001 . [1 punto]

4. Dada $f(x) = \frac{\log(1+x^3)}{x^{5/3}}$, ¿es posible definir f(0) para que f sea continua y derivable en x=0? [1 punto]

5. Sea la función $g(x) = 6\log|x| + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}$. Dibujar su gráfica.

[ayuda: determinar cuántos ceros posee la derivada analizando su numerador] [3 puntos]

6. a. Hallar el área de la región acotada entre el eje x y la gráfica de la función $f(x) = |x^3-1| - 2$.

b. Si f es la función que acabamos de definir y $F(x) = \int_{1-x}^{1+x} f(t)\,dt$, hallar $F'(2)$. [3 puntos]

Análisis I (A y B) junio91

1 . Determinar si converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{-n} \frac{n+24}{25n}$. [1 punto]

2 . Sea $P_2(x)$ el polinomio de Taylor de orden 2 de $\cos x$ en $x=0$. Determinar (sin tablas ni calculadora) si $P_2(-1)$ es mayor o menor que $\cos(-1)$. [1 punto]

3 . Sea $f(x) = x \log\left(1+4x^{-2}\right)$. Estudiar sus simetrías. Determinar su límite cuando $x\to\infty$. Estudiar su comportamiento en $x=0$. Hallar sus puntos de inflexión. Probar que existe un $x\in(1,2)$ para el que $f'(x)=0$. Dibujar su gráfica. [4 puntos]

4. Calcular (sin tablas) $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$. Probar que $\frac{4}{27} \le \int_0^1 x^2e^{-x^2}dx \le \frac{1}{3}$. [2 puntos]

5. Determinar para qué valor de x se hace máxima la integral $\int_x^{x+1} \frac{t\,dt}{t^2+2}$. [2 puntos]

Análisis I (A y B) septiembre91

1. Determinar si converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctag} n}{4n^2-3}$. [1 punto]

2. Calcular el $\lim_{x\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x^3} - \frac{a}{x^2} \right]$ para los valores de a que sea finito. [1 punto]

3 . Sea $g(x) = \frac{x^2-5x}{x-9}$. Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de g en el intervalo [2,4] .

Probar que $\int_2^4 g(x)dx < 2$. Calcular, sin utilizar tablas, dicha integral. [3 puntos]

4. Sea $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}$. **a.** Hallar dominio, asíntotas, analizar f' y f'' y dibujar su gráfica. Probar que no existe $\lim_{x\to 0} [xf(x)]$.

b. Determinar si converge la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$. [5 puntos]

Análisis I (A) **febrero92**

1. Determinar si converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3+n!}$. [1 punto]

2 . Sean $h(x)=\frac{2x - \operatorname{sen} x}{x + 2\operatorname{sen} x}$ y $L=\lim_{x\to\infty} h$. Determinar un M tal que $|h(x)-L|<0.1$ si $x>M$. [1 punto]

3 . Considérese la parte de la grafica de $g(x)=1-(x-2)^3$ contenida en el cuadrante $x\geq 0$, $y\geq 0$. Determinar los puntos de ese trozo de la gráfica para los que la recta tangente en ellos corte el eje y en el punto i) más alto, ii) más bajo. [2 puntos]

4 . **a.** Escribir los cuatro primeros términos del desarrollo de Taylor de $\sqrt[3]{1+3x}$.

Sea la función $f(x)=\frac{1}{x}[\sqrt[3]{1+3x}-1]$ si $x\neq 0$, $f(0)=1$.

b. Precisar en qué puntos es f continua y derivable. **c.** Determinar la imagen de f [$\{f(x): x\in \mathbf{R}\}$].

d. Comprobar, integrando paso a paso, que $\int_{-2/3}^{0} f = 6-\frac{3}{2}\log 3-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}$.

e. Encontrar un valor aproximado de esta integral utilizando el método de Simpson con $h=1/3$.

f. Determinar si converge $\int_1^{\infty} f$. **g.** Si $F(x)=\int_{-x}^{0} f$, hallar $F'(3)$. [6 puntos=0.5+1.5+1+1.5+0.5+0.5+0.5]

Análisis I (A) **junio 92**

1. Determinar, si existe, un valor de la constante b tal que la función: $f(x)=\frac{e^{bx^4}-\cos bx}{x^2}$ tienda hacia 0 cuando $x\to\infty$ y tienda hacia 2 cuando $x\to 0$. [1.5 puntos]

2. Dibujar a grandes rasgos la curva $3y^2=21+20x-x^4$ y determinar los puntos de dicha curva situados a mayor y menor distancia del origen. [2 puntos]

3. **a)** Probar que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2^{3n+2}}=\frac{2x}{8-x^2}$, precisando los x para los que se da la igualdad.

b) Hallar el valor exacto de $\int_0^1 \frac{2x\,dx}{8-x^2}$ y una fracción que aproxime dicha integral: i) por Simpson con $h=\frac{1}{2}$, ii) sumando los dos primeros términos de algún desarrollo en serie. [2.5 puntos]

4 . **a)** Dibujar la gráfica de $g(x)=|3-4x^{-2}|$. **b)** Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de g y la recta tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa $x=2$. [4 puntos]

Análisis I(A) **septiembre92**

1 . Precisar para que valores de x converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi^{-n}x^n$. [1.5 puntos]

2 . Sea $g(x)=x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}$ si $x\neq 0$, $g(0)=0$. Determinar si existe $g'(0)$. Hallar, si existe, el $\lim_{x\to\infty} g$. [1.5 puntos]

3 . Calcular $\int_{-2}^{4}\left(|x+4|-3|x|\right)\,dx$. [1.5 puntos]

4 . Sea $f(x)=\frac{1}{2e^x-1}$. **a)** Determinar asíntotas, crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Dibujar la gráfica de f .

b) Hallar a , b y c tales que $x^{-2}[f(x)-(a+bx+cx^2)]$ tienda hacia 0 cuando $x\to 0$.

c) Si $F(x)=\int_0^{\log x} f$, determinar el valor de $x\in[1,e]$ que hace máxima $F(x)$.

d) Estudiar si converge la integral impropia $\int_0^{\infty} f$. [5.5 puntos]

Análisis I (C) febrero93

1 . **a)** Determinar los x para los que converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$ y hallar su suma.
b) Precisar para **i)** $x=1/4$ y **ii)** $x=-1/4$, cuántos términos de la serie se deberían sumar para aproximar el valor exacto de la suma con un error menor que 10^{-3}. [1.5 puntos]

2 . Sea C la curva $x^2+y^2 = 4$ y sea T la recta tangente a dicha curva en el punto $(1,-\sqrt{3})$.
a) Hallar el punto de T más próximo al punto $(2,0)$. **b)** Hallar, usando integrales, el área de la región acotada comprendida entre C, T y el eje x. [3 puntos]

3 . **a)** Dada $g(x) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)$, evaluarla en $x=\frac{4}{n}$, $n\in\mathbf{N}$, y esbozar su gráfica usando estos datos.
b) ¿Converge la sucesión $\{g(4/n)\}$? ¿Posee alguna subsucesión convergente?

Sea $f(x) = x\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)$ si $x\neq 0$, $f(0)=0$.

c) Estudiar si es f continua y derivable en $x=0$. **d)** Determinar el límite de f cuando $x\to\infty$.
e) Hallar los mínimos de f en $x>0$. Estudiar concavidad y convexidad. Dibujar la gráfica de f .
f) Probar que el máximo absoluto de f en todo **R** se alcanza en un x del intervalo $[2,3]$.
g) Aproximar $\int_2^4 f$ por Simpson con $h=1$ $(n=2)$. **h)** Determinar si converge $\int_0^{\infty} f$.
[5.5 puntos (**e)**=2 ptos, 0.5 los demás)]

Análisis I (C) junio93

1 . Determinar si converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\text{sen}\, n}{2+n}$. [1 punto]

2 . Hallar (si existe) un a tal que $k(x) = |x^{7/3}-x^2|$ sea continua y no derivable en $x=a$.
Hallar (si existe) el valor mínimo de k en el intervalo $[-8,-1]$. [2 puntos]

3 . Sea $g(x) = \frac{\log(1+2x^2)-\log(1+x^2)}{\text{arc tan}(x^2)}$. Hallar el límite de g cuando i) $x\to 0$, ii) $x\to\infty$. [1 punto]

4 . Hallar el área de la región acotada limitada por los ejes y la gráfica de $h(x) = \text{tag}(x-1)$. [1 punto]

5 . Sea $f(x) = (x^2-3)\,e^{-x}$. a) Dibujar la gráfica de f .
b) Hallar los valores a tales que la recta tangente a dicha gráfica en $x=a$ pase por $(1,0)$.
c) Hallar un racional que aproxime $\int_0^1 f$ sumando 4 términos de un desarrollo en serie.
d) Determinar si converge $\int_2^{\infty} f$. e) Si $F(x) = \int_0^{\log x} f$, hallar $F'(1)$. [5 puntos (2+1+1+0.5+0.5)]

Análisis I (C) septiembre 93

1 . Sea la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\log n}$. Hallar, razonadamente, un valor no nulo de x para el que converja y otro para el que diverja. [1 punto]

2 . Determinar, si existe, el límite de $x\left[\cos\frac{1}{x} - 1\right]$ cuando x tiende a 0 y a ∞ . [1 punto]

3 . Calcular $\sqrt[10]{1.2}$ con error menor que 0.01 utilizando el desarrollo de $(1+x)^{1/10}$. [1 punto]

4 . Hallar, si existen, dos números reales positivos cuya suma sea 4 y tales que la suma de uno de ellos más la raíz cuadrada positiva del otro sea i) máxima, ii) mínima. [1.5 puntos]

5 . Hallar el área de una de las infinitas regiones iguales encerradas entre las gráficas de las funciones $s(x)=|\text{sen}\,x|$ y $c(x)=|\cos x|$. [1.5 puntos]

6 . Sea $f(x)=\frac{1}{x} + 4\,\text{arctag}\,x$. a) Hallar asíntotas, extremos, puntos de inflexión y dibujar su gráfica.
b) Probar que $\pi+1\leq\int_1^2 f \leq 2\pi$. Determinar si converge $\int_1^{\infty} f$. Hallar $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f$. [4 puntos (2.5+1.5)]

Análisis I (A) **febrero95**

1. Determinar si converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^n}$. [1 punto]

2. Hallar todos los números reales x tales que $e^{2|\log x|} < 8x$. [1 punto]

3. Determinar si converge la integral impropia $\int_{0^+}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$. [1 punto]

4. Hallar el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$ y la recta tangente a dicha curva en el punto de abscisa $x=a$, $a>0$. [1.5 puntos]

5. **a)** Precisar el número de raíces reales del polinomio $P(x) = 3x^4-3x+1$.
b) Determinar (utilizando **a)**) si el punto de la curva $y = x^3$ más cercano al punto $(0,1)$ está a la derecha o a la izquierda de $x=1/2$. [2 puntos]

6. **a)** Sea $f(x) = \sqrt{1+9x^4}$. Escribir los tres primeros términos no nulos de su desarrollo en serie de Taylor en torno a $x=0$.
b) Determinar para qué valores de b existe el límite de $\frac{f(x)-1}{x^b}$ cuando: i) $x\to 0^+$, ii) $x\to\infty$.
c) Hallar aproximadamente la longitud L del tramo de la curva $y = x^3$ comprendido entre el origen y el punto $(1/2,1/8)$ utilizando el método de los trapecios con $n=1$. Razonar si es posible utilizar desarrollos de Taylor para estimar L . Probar que $1/2 < L < 9/16$. [1.5 puntos]

Análisis I (A) **junio95**

1. Determinar si converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{\,n\cos 2}$. [1 punto]

2. Hallar, si existe, el límite de $g(x) = \frac{\log(1+x) - x}{\operatorname{sen} x - x}$ si x tiende a **i)** 0, **ii)** ∞, **iii)** -1^+. [2 puntos]

3.a) Determinar cuántos ceros reales posee el polinomio $P(x) = 1+4x^3-3x^4$ y precisar entre qué dos enteros consecutivos se encuentra cada uno de ellos. [1 punto]

3.b) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \frac{x-1}{x^4+1}$. [2 puntos]

3.c) Sea la función f de **3.b)** . i) Aproximar el valor de $\int_0^1 f$ utilizando Simpson con $h=1/2$.
ii) Probar que converge $\int_1^\infty f$ y que su valor es menor que $\frac{\pi}{8}$.
iii) Sea $F(x) = \int_0^x f$ con $x\in[0,\infty)$.
Encontrar, si existen, los x en los que F(x) toma sus valores máximo y mínimo. [2 puntos]

Dato no necesario: $\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{8} \log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\arctan(x\sqrt{2}+1)+\arctan(x\sqrt{2}-1)\right]$

4. Hallar el área de la región acotada encerrada entre el eje x y la gráfica de $h(x)=1-|x-1|$, integrando en coordenadas i) cartesianas , ii) polares . [2 puntos]

Análisis I (A) **septiembre95**

1. Determinar si converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$. [1 punto]

2 . Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de $f(x) = x+2|\cos x|$ en el intervalo $[0,\pi]$.
Hallar un polinomio P(x) de segundo grado tal que $\frac{f(x)-P(x)}{x^2} \to 0$ cuando $x\to 0$. [2.5 puntos]

3. Sea $g(x)=x^2 e^{1/x} e^{-x}$. Hallar sus límites en 0 y $\pm\infty$. Estudiar crecimiento y decrecimiento.
Precisar cuántos puntos de inflexión posee. Dibujar la gráfica. Ver si converge $\int_1^\infty g$. [3.5 puntos]

4. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)=\int_{-1}^{x} \frac{t^3}{t^4-4}\, dt$ en $x=1$. [1 punto]

5. Hallar el valor aproximado del área de la región comprendida entre la gráfica de $h(x) = \arctan(x^2)$ y la recta $y =\pi/4$ con un error menor que 0.04 [2 puntos]

Análisis I (grupo residual) primer parcial junio 97

1. a) Determinar para qué valores de x define una función $f(x)$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n[-2]^n}$. b) Hallar $f'(-1)$.

1*. Definamos una sucesión $a_1,a_2,...,a_n,...$, a partir de un primer elemento $a_1>0$, mediante la ley de recurencia: $a_{n+1} = \frac{4a_n+2}{a_n+2}$, $n\geq 1$. Calcular $\lim_{n\to\infty} a_n$, si existe, cuando $a_1=3$.

2. Sea $V(\alpha)$ el volumen del sólido de revolución engendrado haciendo girar, en torno al eje x, la porción de la gráfica de $f(x) = (x-1)^3+\alpha x+1-\alpha$ comprendida entre $x=0$ y $x=2$.

a) Esbozar la forma del sólido para $\alpha=-1$.
b) Calcular el máximo y el mínimo valor de la función $V(\alpha)$ en el intervalo $-1\leq\alpha\leq 0$.

3. Discutir la convergencia de la integral impropia $\int_0^{\infty} \frac{3-3\cos x}{x^3 \ln x}\, dx$.

4. a) ¿Existe el límite de $g(x) = \frac{x-\operatorname{sen} x}{x \arctan(x^2)}$ cuando $x\to 0$? b) Misma cuestión cuando $x\to\infty$.

Análisis I (grupo residual) primer parcial septiembre 97

1. Si cada uno de los números $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ satisface la desigualdad $-6 \leq k_n \leq 3$, ¿se puede asegurar, sin más información, que converge la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{[n k_n]^2}{2^n + k_n}$?

2. Un foco puntual de luz está situado en el punto de coordenadas $(3,0)$, próximo a una elipse opaca de ecuación $x^2+4y^2=4$. El punto $(-3/2, 2)$, ¿está iluminado o en sombra?

3. Hallar el valor mínimo, si existe, de $S(\alpha) = \int_0^1 |x^3-\alpha x|\, dx$.

4. Precisar si converge la integral impropia $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x\, dx}{e^{x^4}-1}$.