Cálculo I (grupo A) — febrero 96 (27% de apr./pres. [pres. 88%])

1. Estudiar si la serie $\sum n^7 z^n$ converge cuando i) $z = \frac{4-3i}{5+i}$, ii) $z = e^{-3\pi i}$

[1.25 puntos]

2. Discutir si son convergentes las integrales impropias: **a)** $\int_1^\infty \frac{x+2e^{\cos x}}{x^3+2\sqrt{2}}$, **b)** $\int_{-\infty}^{-1} \frac{x+2e^{\cos x}}{x^3+2\sqrt{2}}$

[1.25 puntos]

3. Demostrar, utilizando sólamente la definición ε-δ, que $f(x) = 1+\sqrt{4+x}$ es continua en $x=0$.

[1.25 puntos]

4. Calcular $\lim_{x\to\infty} \left[\cos \frac{1}{x} \right]^{\ln x}$.

[1.25 puntos]

5. Precisar cuántos ceros reales tiene el polinomio $P(x)$ cuya derivada es $P'(x) = 3x^2+2x-8$ y tal que la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto de abscisa $x=0$ pasa por $(1,-1)$.

[1.25 puntos]

6. Hallar el área de la menor de las dos regiones acotadas por las curvas $x^2+y^2=2$ y $x=y^2$.

[1.25 puntos]

7. Sea $f(x) = e^{2x-x^2}$.

a) Hallar aproximadamente $\int_0^1 f$ utilizando el desarrollo de Taylor de orden 4 en $x=0$ de f .

b) Sea la función $H(x) = \int_x^{x+1} f$, definida en el intervalo cerrado $[0,2]$. Determinar en qué puntos x alcanza sus valores máximo y mínimo.

[2.5 puntos]

Cálculo I (grupo A) — septiembre 96 (23% de apr./pres. [pres. 87%])

1. Demostrar rigurosamente que si la sucesión $\{a_n\}$ es acotada y sus únicos puntos de acumulación son 10^7 y 10^{-7}, y la sucesión $\{b_n\}$ es divergente hacia $+\infty$, entonces la sucesión $\{a_n b_n\}$ es divergente hacia $+\infty$.

2. Discutir para qué valores positivos de x es convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2-5n}}{n^3}$.

3. Analizar la gráfica de la función $y = \ln\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$ ¿Cuántos puntos de inflexión posee?

4. De entre las diversas rectas que pasan por el punto $(1,2)$, ¿cuál es la que determina con la parábola $y=x^2$ la región de mínima área posible?

5. ¿Para qué valores enteros de n se verifica que $3 < \int_0^1 \frac{nx}{4+x^4}\,dx < 4$?

6. Calcular el límite de $\frac{1}{x}\int_0^x e^{2t-t^2}\,dt$ i) cuando $x\to 0$, ii) cuando $x\to\infty$.

Cálculo I (grupos A,B) — febrero 99 (20% de apr./pres. [pres. 79%])

1. Determinar todos los valores de x para los que converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}\, x^n$.

[2 puntos]

2. Encontrar, si existe, el punto de la gráfica de la función $f(x)=2\arctan(x-2)$ para el que es mínima la suma de sus distancias a ambos ejes coordenados.

[2 puntos]

3. Determinar si la sucesión de funciones $f_n(x)=\frac{n+x}{n+2}$ converge uniformemente en $[-2,2]$.

[1.5 puntos]

4. ¿Posee función inversa la función f definida para todo $x\geq 2$ por $f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\log t}$?

[1 punto]

5. Determinar si converge la integral impropia $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{1+\frac{1}{x}}}$.

[1 punto]

6. Hallar el valor de la integral $I=\int_0^1 \frac{x}{x^4-16}\,dx$.

Hallar un número racional que aproxime I con un error menor que 10^{-2} .

[2.5 puntos]

Cálculo I (grupos A,B) — septiembre 99 (25% de apr./pres. [pres. 43%])

1. Discutir, según los valores de la constante a , cuántas soluciones reales tiene la ecuación $e^x = ax$.

[1.5 puntos]

2. Hallar el desarrollo de Tayor hasta x^6 de la función $f(x)=[36+x^3]^{-1/2}$.
Hallar un racional que aproxime con error menor que 10^{-2} : i) $f(2)$, ii) $f(-1)$.

[1.5 puntos]

3. Sea $H(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{36+t^3}}$ para $x\in[-1,6]$.
Determinar, si existen, los x que hacen i) máximo , ii) mínimo el valor de $H(x)$.

[1.5 puntos]

4. Sea $f(x)=x^3+6\ln(2-x)$.
Determinar cuántos máximos locales y cuántos puntos de inflexión posee. Dibujar su gráfica.
Hallar el área de la región encerrada entre la gráfica de f y el eje x en el intervalo $[-1,1]$.

[2.75 puntos]

5. Determinar si converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n^3+\cos^3 n}}$.

[1.25 puntos]

6. Discutir la convergencia de la integral $\int_0^1\left[\frac{n}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]dx$ según los valores de $n\in\mathbf{N}$.

[1.5 puntos]

Cálculo I (grupo A) — febrero 00 (30% de apr./pres. [pres. 76%])

1. Sea $f(x) = \frac{e^x}{1-|x|}$. Determinar si es derivable en $x=0$.
Hallar, si existen, el valor máximo y el valor mínimo de f en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$.

[2.5 puntos]

2. Hallar todos los números reales x para los que converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7x)^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

[1.5 puntos]

3. Sea $f_n(x) = e^{x-n}$, $n\in N$. Determinar si la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge puntual y uniformemente en **i)** $(-\infty,0]$, **ii)** en en $[0,\infty)$.

[1.5 puntos]

4. Sea $f(x) = \frac{x^2+2}{x^4+4}$. **a)** Hallar una primitiva de f . **b)** Probar que $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 f \leq \frac{2}{3}$.

[2 puntos]

5. Hallar el $\lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x e^{-t^2}dt - \arctan(x^2)}{\log[1+x^4]}$.

[1.5 puntos]

6. Estudiar la convergencia de $\int_1^{\infty} \frac{\arctan\left(x+\frac{1}{x}\right)}{(1+x^2)^a}dx$ en función del parámetro real a .

[1 punto]

Cálculo I (grupo A) — septiembre 00 (55% de apr./pres. [pres. 27%])

1. Hallar el punto P sobre la gráfica de $f(x) = e^{-x}$ en el primer cuadrante para el que es máxima el área del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a dicha gráfica en P y cuyos catetos están sobre los ejes coordenados.

[1.75 puntos]

2. Sea $g(x) = x^2\arctan\frac{1}{x} - \sqrt{1+x}$.
a) Calcular, si existe, $\lim_{x\to\infty} g(x)$. **b)** Hallar una primitiva de $g(x)$.

[2.5 puntos]

3. Sea $H(x) = |x-1|\int_{-1}^{x} \operatorname{sen} t^3\,dt$.
a) Hallar un racional que aproxime $H(0)$ con un error menor que 10^{-3} .
b) Calcular, si existe, $H'(1)$.

[2.5 puntos]

4. Determinar si converge la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]$.

[1.5 puntos]

5. Estudiar la convergencia de $\int_0^{\infty}[x^3+\operatorname{sen}x]^{\alpha}dx$ según los valores de la constante real α .

[1.75 puntos]

Cálculo I (grupo E) — febrero 01 (42% de apr./pres. [pres. 46%])

1. Calcular el límite de la función $h(x)=\dfrac{\arctan x-\operatorname{senh} x}{x\,(\cosh x-\cos x)}$ cuando **i)** $x\to 0$, **ii)** $x\to\infty$.

[2 puntos]

2. Sea $g(x)=\dfrac{x^3+x^2-7}{x^3-2x^2+x-2}$. **i)** Calcular la primitiva $G(x)$ de $g(x)$ que cumple $G(0)=-1$.
ii) Probar que $g(x)>1$ si $x\in[0,1]$ y que hay un único $c\in(0,1)$ tal que $G(c)=0$.

[2.5 puntos]

3. Determinar si converge la integral impropia $\int_{2^+}^{3}\sqrt{g(x)}\,dx$, siendo $g(x)$ la función del problema **2.**

[1 punto]

4. Elegir una opción:
a) Encontrar todos los valores de $a\in\mathbf{R}$ para los que converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n+2}{e^n+n}$.
b) Determinar la región del plano complejo en que converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{e^n+n}$.

[1.5 puntos]

5. **i)** Determinar para todo $n\in\mathbf{N}$ en qué $x\geq 0$ alcanza su valor máximo la función $f_n(x)=\int_x^{2x}\dfrac{dt}{t^3+6n^6}$.
ii) Probar que la serie de funciones $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ converge uniformemente en $[0,\infty)$.

[2 puntos]

6. Sea $f(x)=x\left(1+x^3\right)^{-1/5}$. Hallar los 3 primeros términos no nulos de su desarrollo de Taylor en $x=0$. Aproximar por un racional $f(1/2)$ con error menor que 0.001 .

[1 punto]

Cálculo I (grupo E) — septiembre 01 (48% de apr./pres. [pres. 27%])

1. **a)** Determinar los valores de x para los que la serie $\sum(-2x)^{3n}$ es convergente.
b) Decidir si converge para $x=\arctan\frac{3}{5}$.

[2 puntos]

2. Sea la función $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$. **a)** Estudiar si es derivable en $x=0$. **b)** Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de f en el intervalo $[-4,1]$. **c)** Calcular la integral $\int_{-4}^{4}f(x)\,dx$.

[3 puntos]

3. Estudiar la convergencia puntual y uniforme en el intervalo $[0,1]$ de:
a) la sucesión de funciones $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{n^3+x}}$, $n=1,2,3,\ldots$; **b)** la serie $\sum f_n(x)$.

[2 puntos]

4. Considérese la región del cuarto cuadrante limitada por la gráfica de $f(x)=-e^{-ax}$ ($a>0$) y el eje x . Probar que la recta tangente a $f(x)$ en $x=0$ divide dicha región en dos partes de igual área.

[1.5 puntos]

5. Dada $F(x)=\int_2^x\dfrac{dt}{\sqrt{\log t+t}}$. **a)** Determinar la convergencia de la integral impropia $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$.
b) Hallar (si existe) el $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F(2x)}{F(x)}$.

[1.5 puntos]

Cálculo I (grupo E) — febrero 02 (19% de apr./pres. [pres. 52%])

1. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 + \arctan n}{\sqrt{1+n^3x^2}}$. **a)** Discutir para qué valores de x es convergente la serie. **b)** Estudiar si dicha serie converge uniformemente en $[1,2]$.

[2 puntos]

2. **a)** Estudiar en qué puntos es continua la función $f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)\log|1-x^2|$, $f(-1)=f(0)=f(1)=0$.
b) Determinar si existe $f'(0)$. Probar que existe algún $c\in(0,1)$ tal que $f'(c)=0$.

[2.5 puntos]

3. Aproximar $\log\frac{3}{4}$ con un polinomio de Taylor de orden 2 , dando una cota del error cometido.

[1 punto]

4. Calcular la integral $\int_{-\pi/6}^{0} \frac{\cos x}{3\,\mathrm{sen}\,x - 2\cos^2 x}\,dx$.

[2 puntos]

5. Sea $F(x) = \int_{-1/x}^{1/x^2} e^{-t^4}\,dt$. **a)** Hallar $F'(1)$. **b)** Estudiar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F(n)$ converge.

[1.5 puntos]

6. Estudiar la convergencia de la integral $\int_0^1 \frac{e^x - \cos x}{x^{3/2}}\,dx$.

[1 punto]

Cálculo I (grupo E) — septiembre 02 (25% de apr./pres. [pres. 30%])

1. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^{n-1}}{(x^2+6)^n}$. **a)** Discutir para qué valores de x es convergente.
b) Estudiar si converge uniformemente en $[5,6]$.

[2 puntos]

2. Estudiar en qué puntos es continua la función: $f(x) = \frac{x^2\,\mathrm{sen}\,\pi x}{1-\cos\pi x}$ si $x\notin\mathbf{Z}$, $f(x)=0$ si $x\in\mathbf{Z}$.

[1.5 puntos]

3. Calcular el coeficiente de x^4 del desarrollo de Taylor en torno a $x=0$ de $\frac{\log(1+2x)}{1+2x}$.

[1 punto]

4. Sea $f(x) = x^2 e^{-x^2}$. **a)** Si $H(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$, hallar el valor de x para el que $H(x)$ es máximo.
b) Dibujar aproximadamente la gráfica de f y probar que el valor máximo de H es menor que $1/2$.

[2.5 puntos]

5. Calcular la integral $\int_4^5 \frac{dx}{x-4\sqrt{x-4}}$.

[1.5 puntos]

6. Estudiar la convergencia de la integral $\int_2^{\infty} \frac{x}{x^n-8}\,dx$ según los valores de $n\in\mathbf{N}$.

[1.5 puntos]

Cálculo I (grupo D) **febrero 03** (32% de apr./pres. [pres. 69%])

1. Sea $f(x) = x + 2\cos x$. **Elegir 2 de los 3 apartados siguientes:**

a) Hallar, si existe, el valor mínimo de f en el intervalo $[0,1]$.

b) Probar que existe f^{-1}, función inversa de $f(x)$ para $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, y hallar la derivada $(f^{-1})'(2)$.

c) Hallar $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [f(x)]^2\, dx$.

[2 puntos]

2. Sea $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{1 - e^{-x^3}}$. Determinar (si existen): **a)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

[2 puntos]

3. Sea $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^3) + 1}{\int_{-1}^{x} \operatorname{sen}(t^3)\, dt + x + 4}$. Calcular, si existe, $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

[1 punto]

4. Determinar los valores de x para los que converge $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, 3^n x^{n-1}$ y hallar su suma para esos valores.

[2 puntos]

5. Sea $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + x^{2n}}$. **a)** Hallar, para cada valor de x , el límite de la sucesión $f_n(x)$.

b) Estudiar si converge uniformemente $f_n(x)$ en el intervalo $[0\ 2]$.

[1.5 puntos]

6. Estudiar la convergencia de la integral $\int_4^{\infty} \dfrac{\arctan(1/x)}{(2x-8)^{1/3}}\, dx$.

[1.5 puntos]

Cálculo I (grupo D) **septiembre 03** (35% de apr./pres. [pres. 40%])

1. Sea $f(x) = \int_0^{x-x^3} \dfrac{dt}{\sqrt{2 - \operatorname{sen}^2 t}}$. **a)** Hallar $f'(x)$, indicando los x para los que existe.

b) Determinar los puntos del intervalo $[0, 2]$ en los que f alcanza sus valores máximo y mínimo.

[2 puntos]

2. Sea $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x}$, $f(0)=1$. **a)** Hallar $f'(0)$. **b)** Determinar los límites $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ y la imagen de f .

Elegir entre **c)** y **d)**: **c)** Hallar la derivada $f^{(2003)}(0)$. **d)** Estudiar el crecimiento y decrecimiento de f .

[3 puntos]

3. Hallar, si existe, un punto del intervalo $(0, 1)$ en el que la recta tangente a $f(x) = \arctan \dfrac{x}{2-x}$ sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(1, \pi/4)$.

[1.5 puntos]

4. Sea la sucesión definida por $a_{n+1} = \dfrac{n+2}{3n+1} a_n$, con $a_1=1$.

a) Determinar la convergencia de la serie $\sum a_n$. **b)** Hallar el límite de la sucesión a_n , si converge.

[1.5 puntos]

5. Sea $f(x) = x \log\left(1 + \dfrac{4}{x^2}\right)$. **a)** Hallar una primitiva de f . **b)** Estudiar la convergencia de $\int_1^{\infty} f$.

[2 puntos]