Cálculo I (grupo C) **febrero 04** (32 % de apr./pres. [pres. 69 %])

1. Determinar para qué puntos de la gráfica de $f(x) = e^{x^2-x}$ la recta tangente pasa por el origen. (1.5 puntos)

2. Determinar el área máxima que puede tener un rectángulo que tenga dos lados sobre los semiejes x, y positivos y un vértice sobre la gráfica de $f(x) = \left[x^3+4\right]^{-1/2}$. (1.5 puntos)

3. Determinar todos los números reales c para los que converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2c-1)^{n^2}}{n+1}$. (2 puntos)

4. Sea $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Elegir entre **a)** y **b)**:

a) Hallar $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-\left(x^2+\frac{1}{2}x^4\right)}{x^6}$. **b)** Hallar el valor de la integral $\int_0^{1/2} f(x)dx$. (1.5 puntos)

5. Estudiar en qué intervalos crece y decrece la función $f(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2}dt - e^{x^4}$. Determinar en cuántos puntos del intervalo $[0,\infty)$ se anula $f(x)$. (1.5 puntos)

6. Analizar la convergencia de $\int_0^{\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x^a}$, según el valor de $a \in \mathbf{R}$. (2 puntos)

Cálculo I (grupo C) **septiembre 04** (45 % de apr./pres. [pres. 40 %])

1. Sea $f(x) = \frac{\arctan(\operatorname{sen} x) - x}{\log(1+x^3)}$. Hallar (si existe): a) $\lim_{x\to 0} f(x)$, b) $\lim_{x\to\infty} f(x)$. (2 puntos)

2. Sea $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Determinar su dominio e intervalos de crecimiento y decrecimiento. Probar que existe un único $c \in \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ tal que $f(c) = \frac{2}{3}$. (1.5 puntos)

3. Determinar para qué valores de $a \in \mathbf{R}$ converge la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{a^n}$. Precisar para qué valores de a la suma de la serie anterior es $\frac{1}{3}$. (2 puntos)

4. Sea $f(x) = \int_1^x \mathrm{e}^{4\arctan t}\,dt$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=1$. Probar que f posee inversa en todo $\mathbf{R}$ y calcular $\left(f^{-1}\right)'(0)$. (1.5 puntos)

5. Estudiar la convergencia de la integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4-1}}$. (1.5 puntos)

6. Calcular el área de una de las regiones comprendidas entre la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y esta misma gráfica trasladada horizontalmente una distancia $\frac{\pi}{3}$ hacia la derecha. (1.5 puntos)

Cálculo I (grupo C) **febrero 05** (59 % de apr./pres. [pres. 72 %])

1. Sea $f(x) = e^{\operatorname{sh} x} + x$ con dominio $\mathbf{R}$. a) Hallar los tres primeros términos no nulos de su desarrollo de Taylor en $x = 0$. b) Probar que existe su función inversa f^{-1} y calcular $(f^{-1})'(1)$. [2 puntos]

2. Determinar si converge la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n \operatorname{sen}^2 n}{\sqrt{2n^5+1}} + \frac{(-1)^n}{\log n} \right)$. [1 punto]

3. Hallar, si existe, el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{\operatorname{sen}^2 x}$. [1 punto]

4. Calcular la integral $\int_1^e x \log x \, dx$. [1 punto]

5. Sea $F(x) = \int_{-2}^{3x-x^2} t e^{t^4} dt$, con $x \in [0,2]$.
Determinar en qué x del intervalo alcanza su valor máximo y su valor mínimo. [2 puntos]

Elegir dos entre 6a, 6b y 6c

6a. i) Determinar los puntos donde converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$.
ii) Analizar si converge uniformemente en $\mathbb{R}$ la serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{5^n}$. [1.5 puntos]

6b. Calcular la primitiva $\int \frac{x+2}{x^3-8} dx$. [1.5 puntos]

6c. Determinar si converge la integral impropia $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^{3/2}} dx$. [1.5 puntos]

Cálculo I (grupo C) **septiembre 05** (40 % de apr./pres. [pres. 40 %])

1. Sea $f(x) = \arctan(\log x^2)$, si $x \neq 0$; $f(0) = -\pi/2$.
Hallar $f'(x)$ para $x \neq 0$. Estudiar si f es continua y derivable en $x = 0$. [1.5 puntos]

2. Determinar cuántas veces se anula la función $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} - x - 1$ en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. [1 punto]

3. Sea $F(x) = \int_{1-2x}^{x} t e^{-t^4} dt$. Hallar $F(1)$, $F'(1)$ y $(F \circ F)'(1)$.
Razonar si $F(0)$ es mayor o menor que $F(1)$. [2 puntos]

4. Calcular: $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x \, dx$. [1 punto]

5. Determinar los puntos donde converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n^3+1}} (x-1)^n$. [2 puntos]

6. Calcular: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{x^4}$. [1 punto]

Elegir uno entre 7a y 7b

7a. Sea $f_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{n}$. i) Calcular los valores máximo y mínimo en $[0,\infty)$ de cada $f_n(x)$.
ii) Determinar si converge uniformemente en $[0,\infty)$ la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. [1.5 puntos]

7b. Determinar si converge la integral impropia $\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x)}{x^{3/2}} dx$. [1.5 puntos]

Cálculo I (grupo C) **febrero 06** (39 % de apr./pres. [pres. 84 %])

1. Sea $f(x)=\arctan x-\frac{1}{3}\log x$. Estudiar cuántas veces se anulan f' y f en el intervalo $[1,\infty)$. Probar que f es inyectiva en $[3,\infty)$. [1.5 puntos]

2. Estudiar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, siendo $a_{n+1}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2} a_n$ y $a_1=1$. [1 punto]

3. Determinar todos los reales x para los que converge la serie: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\log n}$. [1.5 puntos]

4. Sea $f(x)=\dfrac{x^2-\operatorname{sen}^2 x}{\log(1+x^4)}$. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. [1.5 puntos]

5. Calcular la integral $\int_{-1}^{1} x\arctan x\,dx$. [1 punto]

6. Determinar si converge la integral impropia $\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^{2x}-1}dx$. [1.5 puntos]

7. Sea $F(x)=\int_{-1}^{x} t\,e^{t^3}dt$, con $x\in[-1,\infty)$. i) Hallar, si existen, los x del intervalo en los que F alcanza sus valores máximo y mínimo. ii) Probar que $F(0)>-\frac{1}{2}$. [2 puntos]

Cálculo I (grupo C) **septiembre 06** (48 % de apr./pres. [pres. 53 %])

1. Sea $f(x)=(x^2+1)\,e^{3x-x^2}$. Hallar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
Probar que f' se anula en un punto del intervalo $(1,2)$ y que no lo hace más veces en su dominio.
Estudiar cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x)=1$. (3 puntos)

Elegir entre 2a y 2b:

2a. Sea $f_n(x)=(\operatorname{sen} x)^n$. Hallar el límite puntual de $\{f_n(x)\}$ en $[0,\pi]$.
Discutir si la convergencia es uniforme. (1.5 puntos)

2b. Hallar el desarrollo de Taylor en torno a $x=0$ hasta x^4 de $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{1+x^2}$. (1.5 puntos)

3. Determinar si converge la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. (1 punto)

4. Calcular la integral $\int_0^{\pi/2}\cos 2x\cos x\,dx$. (1.5 puntos)

5. Sea $f(x)=x-\int_1^x\cos(\operatorname{sen} t)\,dt$. Hallar, si existen, los puntos del intervalo $[1,4]$ donde f alcanza sus valores máximo y mínimo. (1.5 puntos)

6. Determinar si converge la integral impropia $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{e^{x^2}-1}dx$. (1.5 puntos)

Cálculo I (grupo C) **febrero 07** (43 % de apr./pres. [pres. 65 %])

1. Precisar si converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\arctan n}$ para: a) $x=0$, b) $x=1$, c) $x=e$. [1.5 puntos]

2. Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de $f(x)=\frac{1+x}{\log(1+x)}$ en el intervalo $[1,3]$.
Determinar el dominio y la imagen de f. [2 puntos]

3. Hallar $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$, si $f(x)=\frac{1+2x-e^{2x-2x^2}}{x^3+\operatorname{sen} x^3}$. [2 puntos]

4. Calcular la integral $\int_0^{1/2} \frac{2x^3-x^2}{2x^2-x-1}\,dx$. [1.5 puntos]

5. Sea $F(x)=\int_0^{x^3} \frac{2e^s}{1+s}\,ds-1$. Hallar $F'(2)$. Estudiar cuántas veces se anula F en el intervalo $[0,1]$. [1.5 puntos]

6. Analizar la convergencia de $\int_0^{\infty} \frac{\log(1+e^{ax})}{1+x^2}dx$ para: i) $a=0$, ii) $a=-1$, iii) $a=1$. [1.5 puntos]

Cálculo I (grupo C) **septiembre 07** (38 % de apr./pres. [pres. 48 %])

1. Sea $f(x)=(x^2+\cos x)\arctan\frac{1}{x^2}$. Hallar, si existen, $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$. [1.5 puntos]

2. Sea $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $f(0)=\frac{1}{2}$. **a]** Determinar su dominio. **b]** Hallar, si existe, $f'(0)$.
c] Probar que f es decreciente en todo su dominio. **d]** ¿Cuántas soluciones tiene $f(x)=-1$?
Si $I=\int_3^8 f$, **e]** calcular I, **f]** probar que $I<\frac{5}{3}$ (no se necesita **e]**). [4 puntos]

3. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n}\right)^n x^n$, según los valores de x. [1.5 puntos]

4. Sea $F(x)=\int_{-1}^{x} t\left[e^t-e^{t^4}\right]dt$. **a]** Hallar $F'(-1)$. **b]** Calcular $F(1)$.
c] Determinar los valores máximo y mínimo de F en $[-1,1]$, si existen. [2 puntos]

5. Analizar si converge la integral $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$. [1 punto]