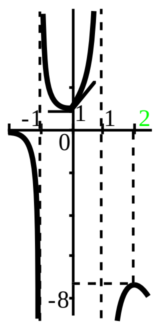
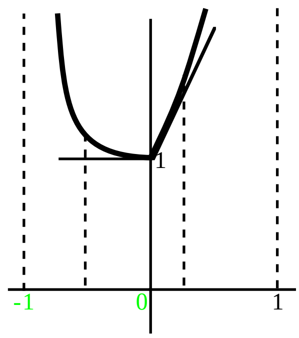
Cálculo I (grupo A) feb2000 soluciones

1. Sea $f(x) = \dfrac{e^x}{1-|x|}$. Determinar si es derivable en $x=0$.
Hallar, si existen, el valor máximo y el valor mínimo de f en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$.

$$f(x) = \begin{cases} e^x/(1+x)\ ,\ x\le 0 \\ e^x/(1-x)\ ,\ x\ge 0 \end{cases} \ \to\ f'(x) = \begin{cases} x\,e^x/(1+x)^2\ ,\ x<0 \\ (2-x)e^x/(1-x)^2\ ,\ x>0 \end{cases}$$

$\to\ f'(0^-) = 0 \neq 2 = f'(0^+)$, f no derivable en $x=0$.





f es continua en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$ $\to$ existen máximo y mínimo.
$f'(x) = 0$ sólo si $x=2$ [fuera del intervalo, $f(2)=-e^2\approx -7.4$].
Máximo y mínimo estarán o en extremos del intervalo o en puntos sin derivada: $x = -\frac{1}{2}$, $x=0$ ó $x = \frac{1}{4}$.

$f'<0$ en $[-\frac{1}{2}, 0)$, $f'>0$ en $(0, \frac{1}{4}]$ $\to$ el **mínimo** se alcanza en **x=0** , y su valor es $f(0) = \mathbf{1}$.
El **máximo** será el mayor entre $f(-1/2) = 2e^{-1/2}$ y $f(1/4) = \mathbf{\frac{4}{3}e^{1/4}}$ [el dibujo sugiere que $f(1/4)$].
$\frac{4}{3}e^{1/4} > 2e^{-1/2} \Leftrightarrow e^{3/4} > \frac{3}{2}$. Esto es cierto, por ejemplo, porque $e^{3/4} = 1+\frac{3}{4} + \ldots > 1+\frac{3}{4} > \frac{3}{2}$.

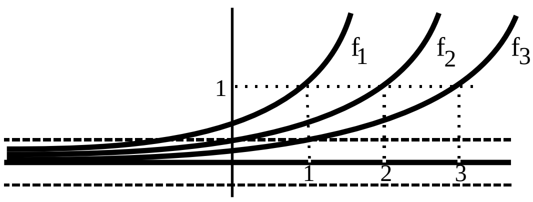
2. Hallar todos los números reales x para los que converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7x)^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Serie de potencias. Cociente en valor absoluto: $\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}}\ \dfrac{7^{n+1}|x|^{n+1}}{7^n|x|^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 7|x| < 1$, $R = \frac{1}{7}$.

Para $x = \frac{1}{7}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ diverge $\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{n} \right)$. Para $x = -\frac{1}{7}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^n}{\sqrt{n^2+1}}$ converge (Leibniz).

La serie converge si $\mathbf{x \in [-\frac{1}{7}, \frac{1}{7})}$.

3. Sea $f_n(x) = e^{x-n}$, $n\in\mathbf{N}$. Determinar si la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge puntual y uniformemente **i)** en $[0,\infty)$, **ii)** en $(-\infty,0]$.



$e^{x-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall x\in\mathbf{R}$ (converge puntualmente en todo $\mathbf{R}$).

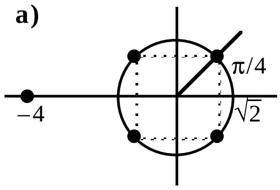
En $(-\infty,0]$ parece que la convergencia es **uniforme** (toda la gráfica de f_n se mete en la banda para n gordo):

$$\left|e^{x-n}-0\right| = e^x e^{-n} \le e^{-n} < \varepsilon \quad \text{si } n\ge N>\log\frac{1}{\varepsilon}\ \ \forall x\le 0 .$$

En $[0,\infty)$ la convergencia **no es uniforme** porque por grande que sea n la gráfica de f_n se sale de la banda de altura 2ε (porque cada una de las f_n tiende a ∞ cuando $x\to\infty$).

4. Sea $f(x)=\frac{x^2+2}{x^4+4}$. **a)** Hallar una primitiva de f . **b)** Probar que $\frac12 \le \int_0^1 f \le \frac23$.

a)



$x^4=-4=4e^{i\pi} \;\to\; x=\sqrt2\, e^{i\pi/4}, \sqrt2\, e^{i3\pi/4}, \sqrt2\, e^{i5\pi/4}, \sqrt2\, e^{i7\pi/4} = 1\pm i\,,\ -1\pm i$

(o bien $x^4=\pm 2i=(a\pm ib)^2=a^2-b^2\pm i2ab \to a=\pm b, ab=\pm1 \to a=\pm1,\ b=\pm1$)

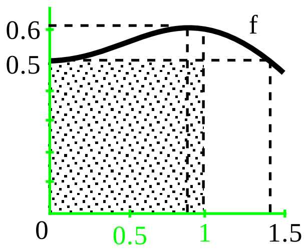
$\to\ x^4+4=[x-1-i][x-1+i][x+1-i][x+1+i] = [x^2-2x+2][x^2+2x+2]$.

$$\frac{x^2+2}{x^4+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+2} \to \begin{cases} A+C=0\\ -2A+2C+B+2D=1\\ 2A+2C-2B+2D=0\\ 2B+2D=2\end{cases} \to B=D=\frac12\,,\ A=C=0\ .$$

$$\frac12\int\frac{dx}{[x+1]^2+1}+\frac12\int\frac{dx}{[x-1]^2+1} = \mathbf{\frac12\,[\arctan(x+1)+\arctan(x-1)]} \;\to\; \int_0^1 f = \mathbf{\frac12 \arctan 2}\ .$$

b) $\arctan 2>\arctan\sqrt3=\frac{\pi}{3}>1 \;\to\; \int_0^1 f>\frac12$ (pero no basta $\frac12\arctan 2<\frac{\pi}{4}$ mayor que $\frac23$).

(El $\arctan 2$ no se puede aproximar con el desarrollo de $\arctan x$ que sólo converge para $|x|\le1$).



Sin calcular la primitiva podemos justificar las dos cotas.
Por ejemplo, dibujando la gráfica: $f(0)=\frac12$ [$=f(\sqrt2)$] , $f(1)=\frac35=0.6$.

$$f'(x)=-2x\,\frac{x^4+4x^2-4}{[x^4+4]^2}=0 \;\to\; x_M=\sqrt{2\sqrt2-2}\approx 0.9 \;\to\; f(x_M)=\frac{\sqrt2+1}{4}\approx 0.6<\frac23\ .$$

$$\frac12\le f\le\frac23 \text{ en } [0,1] \Rightarrow \frac12\le\int_0^1 f\le\frac23$$

[o directamente, $\frac12\le f \Leftrightarrow \frac{x^4}{2}\le x^2$ cierto en [0,1]; $f\le\frac23 \Leftrightarrow 0\le 2x^4-3x^2+2=2[x^2-1]^2+x^2$]

También podíamos desarrollar el integrando: $f(x)=\frac14[x^2+2][1-\frac{x^4}{4}+\frac{x^8}{32}-\dots]=\frac12+\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{16}+\dots$

$\Rightarrow \int_0^1 f = \frac12+\frac1{12}-\frac1{40}-\frac1{112}+\dots \Rightarrow \int_0^1 f>\frac12$ (el siguiente es +) , $\int_0^1 f<\frac12+\frac1{12}=\frac7{12}<\frac23$.

5. Hallar el $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\int_0^x e^{-t^2}dt-\arctan(x^2)}{\log[1+x^4]}$.

$$x\int_0^x e^{-t^2}dt = x\int_0^x[1-t^2+\tfrac12 t^4+\dots]\,dt = x\,[x-\tfrac13x^3+\tfrac1{10}x^5+\dots] \quad (\forall x\in\mathbf{R})$$

$$\lim_{x\to0}\frac{[x^2-\frac13x^4+\dots]-[x^2-\frac13x^6+\dots]}{x^4-\frac12x^8+\dots}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac13x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=\mathbf{-\frac13}$$

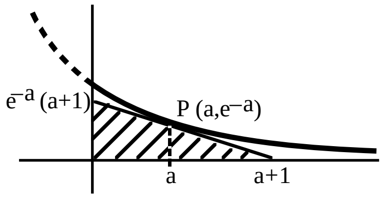
6. Estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\arctan\left(x+\frac1x\right)}{(1+x^2)^a}\,dx$ en función del parámetro real a .

Como $\displaystyle\frac{\arctan\left(x+\frac1x\right)}{(1+x^2)^a}\underset{x\to\infty}{\sim}\frac1{x^{2a}}$, es decir, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2a}}{(1+x^2)^a}\arctan\left(x+\frac1x\right)=\frac{\pi}{2}>0$

y la $\int_1^\infty\frac{dx}{x^{2a}}$ es convergente si y solo si $a>\frac12$, el criterio de comparación por paso al límite asegura que la integral impropia inicial converge si y solo si $\mathbf{a>\frac12}$.

Cálculo I (grupo A) sept2000 soluciones

1. Hallar el punto P sobre la gráfica de $f(x) = e^{-x}$ en el primer cuadrante para el que es máxima el área del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a dicha gráfica en P y cuyos catetos están sobre los ejes coordenados.



Recta tangente a f en x=a : $y = e^{-a} - e^{-a}(x-a) = e^{-a}(a+1-x)$.

Corta x=0 en $e^{-a}(a+1)$ y corta y=0 en a+1 .

Debe ser máxima el área del triángulo:

$$A(a) = \tfrac{1}{2}e^{-a}(a+1)^2 \ , \ \ a\in[0,\infty) \ .$$

$$A'(a) = \tfrac{1}{2}e^{-a}[2(a+1)-(a+1)^2] = \tfrac{1}{2}e^{-a}(a+1)(1-a) = 0 \ \text{ si } \ a=1 \ \ (a\geq 0) \ .$$

Como $A'>0$ si $0<a<1$ y $A'<0$ si $a>1$, A es máxima si a=1 .

El punto P es el $(1,e^{-1})$ y el área del triángulo de área máxima es $A(1) = \frac{2}{e}$.

2. Sea $g(x) = x^2\arctan\frac{1}{x} - \sqrt{1+x}$.

a) Calcular, si existe, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$. **b)** Hallar una primitiva de g(x) .

a) Cuando x es gordo $\arctan\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$, así que $x^2\arctan\frac{1}{x} \sim x$ mayor que $\sqrt{1+x}$ y el límite va a ser ∞ :

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} x\left[x\arctan\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1+x}}{x}\right] = \text{"}\infty\cdot[1-0]\text{"} = \infty \ , \ \text{ pues } \lim_{x\to\infty} x\arctan\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\arctan t}{t} = 1 \ .$$

[de otra forma, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{t\to 0^+}\left[\frac{\arctan t}{t^2} - \frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\right] = \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{t-t^3/3+\ldots-t\sqrt{t}\sqrt{t+1}}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1-t^2/3+\ldots-\sqrt{t}\sqrt{t+1}}{t} = \infty$]

b) $\int x^2\arctan\frac{1}{x}\,dx = \text{(partes)} = \frac{x^3}{3}\arctan\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\int x^3\,\frac{-1/x^2}{1+[1/x]^2}\,dx = \frac{x^3}{3}\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\int\frac{x^3+x-x}{1+x^2}\,dx$

$$\to \int g(x)dx = \frac{x^3}{3}\arctan\frac{1}{x} + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6}\log(1+x^2) - \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}$$

[Más largo sería hacer $\int x^2\arctan\frac{1}{x}\,dx = (\ t=1/x\ ) = -\int\frac{\arctan t}{t^4}\,dt = \text{(partes)} = \frac{\arctan t}{3t^3} - \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^3[1+t^2]} = (*)$

$$\frac{1}{t^3[t^2+1]} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} + \frac{Dt+E}{t^2+1} = \frac{At^2[t^2+1]+Bt[t^2+1]+C[t^2+1]+[Dt+E]t^3}{t^3[t^2+1]} \ \to \ \left\{\begin{array}{l} A+D=0,\ D=1 \\ B+E=0,\ E=0 \\ A+C=0,\ A=-1 \\ B=0 \\ C=1 \end{array}\right. \ \to$$

$$(*) = \frac{1}{3}\log t + \frac{1}{6t^2} - \frac{1}{6}\log(1+t^2) = -\frac{1}{3}\cancel{\log x} + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6}\log(x^2+1) + \frac{1}{6}\cancel{\log x^2} \ \ ]$$

3. Sea $H(x) = |x-1|\int_{-1}^{x} \operatorname{sen} t^3\, dt$.

a) Hallar un racional que aproxime $H(0)$ con un error menor que 10^{-3} .
b) Calcular, si existe, $H'(1)$.

a) $H(0) = \int_{-1}^{0} \operatorname{sen} t^3 dt = \int_{-1}^{0} [t^3 - \frac{t^9}{6} + \frac{t^{15}}{120} - \dots]\, dt = -\frac{1}{4} + \frac{1}{60} - \frac{1}{1920} + \dots \;\to\; H(0) \approx -\frac{1}{4} + \frac{1}{60} = -\frac{7}{30}$,

con un error (serie alternada decreciente) menor que el primer término omitido $\frac{1}{1920} < 10^{-3}$.

b) $H(x) = \begin{cases} [1-x]\int_{-1}^{x} \operatorname{sen} t^3 dt \text{ si } x\leq 1 \\ [x-1]\int_{-1}^{x} \operatorname{sen} t^3 dt \text{ si } x\geq 1 \end{cases} \to H'(x) = \begin{cases} -\int_{-1}^{x} \operatorname{sen} t^3 + [1-x]\operatorname{sen} x^3 \text{ si } x<1 \to H'(1^-) = -\int_{-1}^{1} \operatorname{sen} t^3 \\ \int_{-1}^{x} \operatorname{sen} t^3 + [x-1]\operatorname{sen} x^3 \text{ si } x>1 \to H'(1^+) = \int_{-1}^{1} \operatorname{sen} t^3 \end{cases}$

Como $\int_{-1}^{1} \operatorname{sen} t^3 dt = 0$, por ser el integrando impar, $H'(1)$ existe y su valor es $H'(1)=0$.

4. Determinar si converge la serie $\sum_{n=2}^{\infty} [\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}]$.

Como $a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n-1}\sqrt{n+1}\,[\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}]} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ [es decir, $\frac{a_n}{1/n^{3/2}} \underset{n\to\infty}{\to} 1>0$]

y la serie $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ es convergente, nuestra serie converge (a pesar de que cada sumando divergía)

De otra forma. Nuestra serie es casi una telescópica y es fácil hallar sus sumas parciales:

$S_n = [\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}}] + [\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}}] + [\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}}] + \dots + [\frac{1}{\sqrt{n-2}} - \frac{1}{\sqrt{n}}] + [\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}] = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Como $S_n \underset{n\to\infty}{\to} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, nuestra serie converge y su valor es ese número.

5. Estudiar la convergencia de $\int_0^{\infty} [x^3 + \operatorname{sen} x]^{\alpha}\, dx$ según los valores de la constante real α .

Tiene impropiedades en 0 (si $\alpha<0$) y en ∞

(y ninguna más, ya que $x^3 + \operatorname{sen} x > 0\ \forall x$, pues si $0<x\leq 1$ los dos sumandos son >0 y si $x>1$ es $x^3>1$ y $\operatorname{sen} x\leq 1$).

La integral impropia convergerá cuando lo hagan las dos integrales $\int_1^{\infty}$ e $\int_{0^+}^{1}$.

En el infinito, $[x^3 + \operatorname{sen} x]^{\alpha} \sim x^{3\alpha}$ ($\lim_{x\to\infty} \frac{[x^3 + \operatorname{sen} x]^{\alpha}}{x^{3\alpha}} = \lim_{x\to\infty} [1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}]^{\alpha} = 1$).

Como $\int_1^{\infty} x^{3\alpha} dx$ converge si $3\alpha<-1 \Leftrightarrow \alpha < -\frac{1}{3}$, la nuestra lo hace para esos mismos valores.

Cerca de $x=0$ es $\operatorname{sen} x \sim x \;\to\; [x^3 + \operatorname{sen} x]^{\alpha} \sim x^{\alpha}$ ($\lim_{x\to 0} \frac{[x^3 + \operatorname{sen} x]^{\alpha}}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to 0} [\frac{x + o(x)}{x}]^{\alpha} = 1$).

La $\int_{0^+}^{1} x^{\alpha} dx$ converge si $\alpha>-1$, al igual que la nuestra.

Por tanto, la integral $\int_0^{\infty} [x^3 + \operatorname{sen} x]^{\alpha} dx$ converge si $-1 < \alpha < -\frac{1}{3}$.