Cálculo I (grupo A) feb96 soluciones

1. Estudiar si la serie $\sum n^7 z^n$ converge cuando i) $z=\frac{4-3i}{5+i}$, ii) $z=e^{-3\pi i}$

Serie de potencias con $\frac{n^7}{(n+1)^7} \to 1 = R$ radio de convergencia.

i) Si $z=\frac{4-3i}{5+i}$, como $|z| = \frac{|4-3i|}{|5+i|} = \frac{5}{\sqrt{26}} < 1$, la serie **converge**.

ii) Si $z=e^{-3\pi i} = -1$, $\sum (-1)^n n^7$ **diverge** (el término general no tiende a 0).

2. Discutir si son convergentes las integrales impropias: **a)** $\int_1^\infty \frac{x+2e^{\cos x}}{x^3+2\sqrt{2}}$, **b)** $\int_{-\infty}^{-1} \frac{x+2e^{\cos x}}{x^3+2\sqrt{2}}$

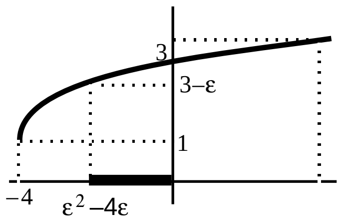
a) Sólo es impropia en ∞ . Cuando $x\to\infty$, $\frac{x+2e^{\cos x}}{x^3+2\sqrt{2}} \sim \frac{1}{x^2} \Rightarrow$ **Converge**.

b) Impropia en $-\infty$ y $-\sqrt{2}$. Si $x\to -\sqrt{2}$, $\frac{x+2e^{\cos x}}{[x+\sqrt{2}][x^2-\sqrt{2}x+2]} \sim \frac{1}{x+\sqrt{2}} \Rightarrow \int_{-\sqrt{2}}^{-1}$ **diverge**
(y, por tanto, la dada también)

3. Demostrar, utilizando sólamente la definición ε-δ, que $f(x)=1+\sqrt{4+x}$ es continua en $x=0$.

Hay que ver: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si $|x|<\delta \Rightarrow |1+\sqrt{4+x}-3|<\varepsilon$.

Como $|\sqrt{4+x}-2| = \frac{|x|}{\sqrt{4+x}+2} \le \frac{|x|}{2}$, basta tomar $\delta=2\varepsilon$.



De otra forma, $|\sqrt{4+x}-2|<\varepsilon \Leftrightarrow 2-\varepsilon<\sqrt{4+x}<2+\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon^2-4\varepsilon<x<\varepsilon^2+4\varepsilon$
Si $|x|<\delta=4\varepsilon-\varepsilon^2$ (ε pequeño) $\Leftrightarrow \varepsilon^2-4\varepsilon<x<4\varepsilon-\varepsilon^2 \Rightarrow \varepsilon^2-4\varepsilon<x<4\varepsilon+\varepsilon^2$
[Este δ es el que sugiere el dibujo de la gráfica de la función]

4. Calcular $\lim_{x\to\infty}\left[\cos\frac{1}{x}\right]^{\ln x}$.

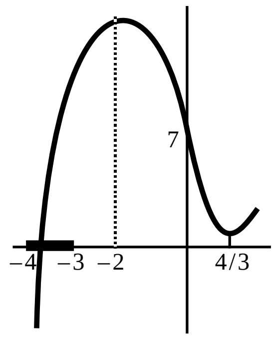
$f(x)=\left[\cos\frac{1}{x}\right]^{\ln x} \to 1^\infty$ indeterminación. $\left[\cos\frac{1}{x}\right]^{\ln x} = e^{\ln(\cos[1/x])\ln x} \to e^{0\cdot\infty}$

$\frac{\ln(\cos[1/x])}{1/\ln x}$ ($\frac{0}{0}$ y L'Hôpital) $\to -\frac{\text{sen}[1/x]}{\cos[1/x]}\frac{(\ln x)^2}{x} \to \frac{0}{1}\cdot 0 = 0$ cuando $x\to\infty$ [se sabe que $\frac{(\ln x)^2}{x}\to 0$]

Por tanto $f(x)\to \boxed{1}$, cuando $x\to\infty$

[Haciendo el límite de $f(1/t)=[\cos t]^{-\ln t}$ cuando $t\to 0^+$ las cuentas salen muy parecidas]

5. Precisar cuántos ceros reales tiene el polinomio $P(x)$ cuya derivada es $P'(x) = 3x^2+2x-8$ y tal que la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto de abscisa $x=0$ pasa por $(1,-1)$.



$P(x) = x^3+x^2-8x+C$. Recta tangente en $x=0$: $y = C-8x$.

Pasa por $(1,-1)$ $\rightarrow$ $C=7$ $\rightarrow$ $\mathbf{P(x) = x^3+x^2-8x+7}$.

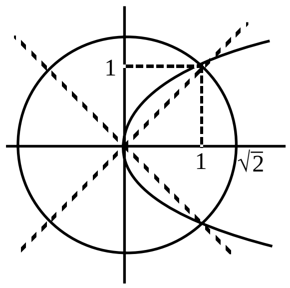
$P(x)$ posee 0 ó 2 raíces positivas $[+\,+\,-\,+]$ y 1 negativa $[-\,+\,+\,+]$.

$P'(x) = [3x-4][x+2]$ $\Rightarrow$ El mínimo de P está en $x=4/3$. $P(4/3) = \frac{13}{27}$.

$\Rightarrow$ $P(x)$ sólo tiene **1 raíz** (negativa)

[que está entre -4 y -3 : $P(-4)=-9$, $P(-3)=13$]

6. Hallar el área de la menor de las dos regiones acotadas por las curvas $x^2+y^2=2$ y $x=y^2$.



Las curvas se cortan si $x^2+x-2=0 \rightarrow x=1,-2=y^2 \rightarrow (1,1)$ y $(1,-1)$.

Lo más corto: Area = A = $\frac{1}{4}$ Area del círculo + $2\int_0^1 (y-y^2)\,dy = \boxed{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}}$.

Integrando respecto a y : $A = \int_{-1}^{1}(\sqrt{2-y^2}-y^2)\,dy = \frac{\pi}{2}+1-\frac{2}{3}$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{2-y^2}\,dy = [\,y=\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\,] = 4\int_0^{\pi/4}\cos^2 t\,dt = 2\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{\pi}{2}+1$$

Respecto a x : $A = 2\int_0^1\sqrt{x}\,dx + 2\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx$

En polares: $x=y^2 \rightarrow r = \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}$. $A = \frac{2}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos^2\theta}{\mathrm{sen}^4\theta}\,d\theta + \frac{2}{2}\int_0^{\pi/4}2\,d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1+\tan^2\theta}{\tan^4\theta}+\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{3\tan^3\theta}\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}+\frac{\pi}{2}$

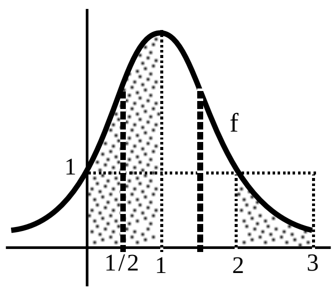
7. Sea $f(x) = e^{2x-x^2}$.

a) Hallar aproximadamente $\int_0^1 f$ utilizando el desarrollo de Taylor de orden 4 en $x=0$ de f .

b) Sea la función $H(x) = \int_x^{x+1} f$, definida en el intervalo cerrado $[0,2]$.
Determinar en qué puntos x alcanza sus valores máximo y mínimo.

a) $f(x) = e^{2x}e^{x^2} = [1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4+\dots]\,[1-x^2+\frac{1}{2}x^4-\dots] = 1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4+\dots$

$$\rightarrow \int_0^1 f \approx x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{6}x^5\Big|_0^1 = \boxed{2}$$



b) $H'(x) = f(x+1)-f(x) = e^{1-x^2}-e^{2x-x^2} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2=2x-x^2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Para comparar $H(0)$, $H(1/2)$ y $H(2)$ lo mejor es pintar la gráfica de f :

$f>0$, $f\rightarrow 0$ cuando $x\rightarrow\pm\infty$, $f'(x)=2(1-x)e^{2x-x^2}$. Máximo si $x=1$.

El máximo de H se tiene cuando **x=1/2** y el mínimo cuando **x=2** :

$H(2) < 1 < H(0)\approx 2 < H(1/2)$ [H crece hasta $x=1/2$ y luego decrece]

[máximos y mínimos debían alcanzarse por ser H continua en un intervalo cerrado]

1. Demostrar rigurosamente que si la sucesión $\{a_n\}$ es acotada y sus únicos puntos de acumulación son 10^7 y 10^{-7}, y la sucesión $\{b_n\}$ es divergente hacia $+\infty$, entonces la sucesión $\{a_nb_n\}$ es divergente hacia $+\infty$.

Existirá un N_1 tal que si $n\geq N_1$ será $a_n > 10^{-8}$ (por ejemplo)

[como $\{a_n\}$ es acotada, $\exists K$ tal que $-K \leq a_n \leq K$; en $[-K,10^{-8}]$ sólo hay un número finito de términos, pues si no constituirían una subsucesión acotada y habría otros puntos de acumulación].

Así pues, $\forall M$ será $a_nb_n > 10^{-8}b_n > M$ si $n \geq \max\{N_1,N_2\}$,

siendo el N_2 el entero tal que $b_n > 10^8 M$ si $n\geq N_2$, entero que existe por tender b_n hacia $+\infty$.

2. Discutir para qué valores positivos de x es convergente la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2-5n}}{n^3}$.

Cociente: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{x^{n^2-3n-4}}{(n+1)^3}\,\dfrac{n^3}{x^{n^2-5n}} = \dfrac{n^3}{(n+1)^3}\,x^{2n-4} \rightarrow 0\ ,\ 1\ ,\ \infty$ si, respectivamente, $0\leq x<1$, $x=1$, $x>1$.

Por tanto, si $0\leq x<1$ converge, si $x>1$ diverge y el cociente no decide si $x=1$. Pero para este último caso, sabemos que $\sum \frac{1}{n^3}$ converge. Por tanto, los valores positivos para los que converge la serie son $\mathbf{0 \leq x \leq 1}$.

3. Analizar la gráfica de la función $y = \ln\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$ ¿Cuántos puntos de inflexión posee?

Dominio $=(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$, valores de x para los que $\dfrac{x^3+1}{x} > 0$.

$y \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \infty$, $y \underset{x\to -1^-}{\longrightarrow} -\infty$, $y \underset{x\to \pm\infty}{\longrightarrow} \infty$ (y si x gordo, $y \sim 2\ln|x|$).

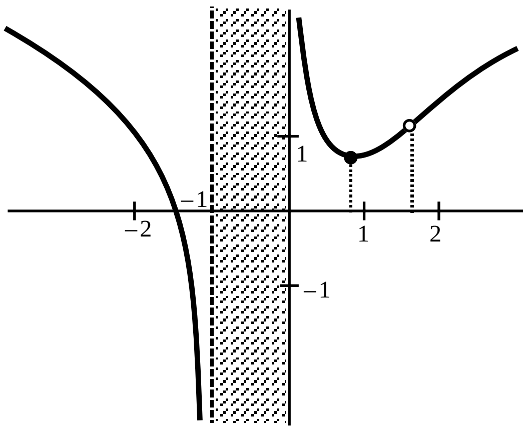
$y' = \dfrac{2x^3-1}{x(x^3+1)} \Rightarrow$ decrece en $(-\infty,-1)$ y $(0,2^{-1/3})$ y crece después.

Mínimo local en $\left(2^{-1/3}, \ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2\right)$ (por encima de $y=0$)

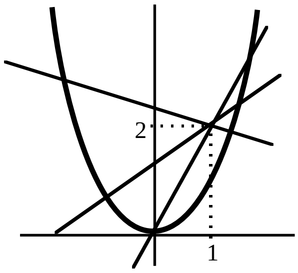
$y'' = \dfrac{1+8x^3-2x^6}{x^2(x^3+1)^2} = 0$ si $x_\pm^3 = 2 \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$, $1 < x_+ < 2$ único p. de infl.

($x_- \in (0,1)$ no está en el dominio)

$y=0 \Leftrightarrow q \equiv x^3-x+1=0$, $q(-2)<0, q(-1)>0 \Rightarrow$ único corte en $(-2,-1)$



4. De entre las diversas rectas que pasan por el punto (1,2), ¿cuál es la que determina con la parábola $y=x^2$ la región de mínima área posible?



Rectas por (1,2) : $y=2+m(x-1)$.

Cortan $y=x^2$ en dos puntos $x_\pm = \frac{1}{2}\left[m\pm\sqrt{m^2-4m+8}\,\right]\ \forall m$.

Área encerrada: $A(m)=\int_{x_-}^{x_+}(2-m+mx-x^2)\,dx=\cdots=\frac{1}{6}\left[m^2-4m+8\right]^{3/2}$

$A'(m)=\frac{1}{6}\,\frac{3}{2}\left[m^2-4m+8\right]^{1/2}(2m-4)=0 \Rightarrow$ mínimo si $\mathbf{m=2}$.

La recta es **$y=2x$** (y el área $\frac{1}{6}\,4^{3/2}=\frac{4}{3}$ $\left[=\int_0^2(2x-x^2)\,dx\right]$).

[Se necesitan cosas más fuertes que el TFC para derivar directamente $\int_{a(m)}^{b(m)} f(x,m)dx$]

5. ¿Para qué valores enteros de n se verifica que $3<\int_0^1 \frac{nx}{4+x^4}dx<4$?

$A=\int_0^1\frac{x\,dx}{4+x^4}=[x^2=t]=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{4+t^2}=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{(1/2)\,dt}{1+(t/2)^2}=\frac{1}{4}\arctan\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{24}+\frac{1}{160}-\cdots\right]$ alternada y decreciente.

(O bien $\frac{x}{4+x^4}=\frac{x}{4}\,\frac{1}{1+x^4/4}=\frac{x}{2}\left[1-\frac{x^4}{4}+\frac{x^8}{16}-\cdots\right]$ e integrando se llega a lo mismo).

Tomando sólo los dos primeros términos deducimos que $\frac{11}{96}<A<\frac{1}{8} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} nA<\frac{n}{8}\leq 4 \text{ si } n\leq 32 \\ nA>\frac{11n}{96}\geq 3 \text{ si } n\geq\frac{288}{11}>27 \end{array}\right\}$

Por tanto, si **$27\leq n\leq 32$** se satisface $3<nA<4$ [con más sumandos tal vez se encontraría algún n más].

Otras formas de aproximar A (sin la serie): $\arctan\frac{1}{2}<\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}<\frac{3.2}{6}=\frac{8}{15}$ ($>\frac{1}{2}$, peor cota)

Acotando el integrando: $\frac{1}{5}<\frac{1}{4+t^2}<\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{10}<A<\frac{1}{8}$ (la primera es peor y la segunda es la de antes).

6. Calcular el límite de $\frac{1}{x}\int_0^x e^{2t-t^2}dt$ i) cuando $x\to 0$, ii) cuando $x\to\infty$.

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x e^{2t-t^2}dt=$ [L'Hôpital y TFC] $=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x-x^2}}{1}=\mathbf{1}$ (o utilizando el desarrollo de febrero: $\frac{x+x^2+\ldots}{x}\to 1$).

Cuando $x\to\infty$, no vale Taylor, ni L'Hôpital, pues el numerador no tiende a ∞ :

$\int_0^x e^{2t-t^2}dt \underset{x\to\infty}{\longrightarrow}$ cte , porque la impropia es convergente ($\int_0^\infty e^{-t}dt$ converge y $\frac{e^{2t-t^2}}{e^{-t}}=e^{3t-t^2}\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$).

Por tanto, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x e^{2t-t^2}dt=\mathbf{0}$.