Cálculo I (grupos A,B) **feb99** **soluciones**

1. Determinar todos los valores de x para los que converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}\, x^n$.

Serie de potencias: $R = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{e^{-\sqrt{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = 1$, puesto que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Por tanto, converge en $(-1,1)$ y diverge si $|x|>1$. Veamos que $\boxed{\text{converge en } [-1,1]}$:

Si $x=1$, $\sum e^{-\sqrt{n}}$ converge, pues $\sum \frac{1}{n^2}$ converge y $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{1/n^2} = 0$, ya que $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}} = [\,x=t^2\,] = \lim_{t\to\infty} \frac{t^4}{e^t} = 0$

[o (más largo) aplicando 4 veces L'Hôpital; que $n^4/e^n \to 0$ se sabe de clase; pero no habíamos probado que $n^2/e^{\sqrt{n}} \to 0$].

[También se podría aplicar el criterio integral: $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx = [\,x=t^2\,] = 2\int_0^\infty t\,e^{-t}\,dt = -2te^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$]

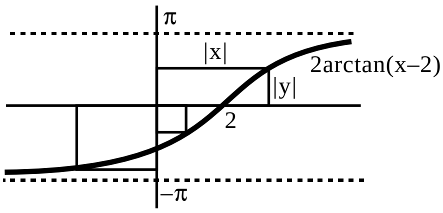
Si $x=-1$, también converge, porque $\sum [-1]^n e^{-\sqrt{n}}$ es absolutamente convergente como acabamos de ver

[o por Leibniz, ya que la serie es alternada, $e^{-\sqrt{n}} \to 0$ y esta sucesión es claramente decreciente].

2. Encontrar, si existe, el punto de la gráfica de la función $f(x) = 2\arctan(x-2)$, para el que es mínima la suma de sus distancias a ambos ejes coordenados.

Las distancias a los ejes son $|x|$ y $|y|$. La función a minimizar es:

$D(x) = |x| + |2\arctan(x-2)|$, con tres expresiones distintas:



$$D(x) = \begin{cases} -x-2\arctan(x-2)\ ,\ x\le 0 \\ x-2\arctan(x-2)\ ,\ 0\le x\le 2 \\ x+2\arctan(x-2)\ ,\ 2\le x \end{cases} \rightarrow\ D'(x) = \begin{cases} -1-2/[1+(x-2)^2]\ ,\ x<0 \\ 1-2/[1+(x-2)^2]\ ,\ 0<x<2 \\ 1+2/[1+(x-2)^2]\ ,\ 2<x \end{cases}$$

[era claro que si x<0 decrecía y si x>2 crecía; podíamos ahorrarnos 1ª y 3ª derivadas]

En $(0,2)$: $D'(x) = \frac{(x-2)^2-1}{1+(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{1+(x-2)^2}$ $\rightarrow$ D crece en (0,1) y decrece en (1,2)

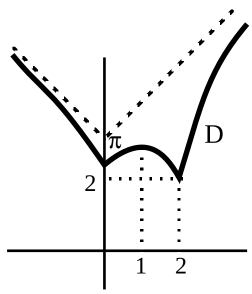
[en $x=1$ hay, pues, un máximo local; el valor de D en él es $D(1) = 1+\frac{\pi}{2} \approx 2.57$].

El mínimo se ha de alcanzar en $x=0$ ó en $x=2$

(puntos sin derivada: $D'(0^-)=-7/5$, $D'(0^+)=3/5$; $D'(2^-)=-1$, $D'(2^+)=3$).

Como $D(0) = 2\arctan 2 > 2 = D(2)$ [pues $\arctan 2 > \arctan\sqrt{3} > \pi/3 > 1$] ,

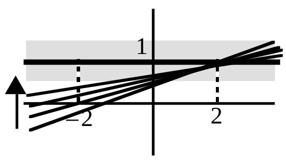
el punto buscado es el $\boxed{(2,0)}$.



3. Determinar si la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{n+x}{n+2}$ converge uniformemente en $[-2,2]$.

El límite puntual es: $\lim_{n\to\infty} \frac{n+x}{n+2} = 1$ para todo x . Veamos que es uniforme:

$$\left| \frac{n+x}{n+2} - 1 \right| = \frac{|x-2|}{n+2} \le \frac{|x|+2}{n+2} \le \frac{4}{n+2} \le \frac{4}{n} < \varepsilon \ \text{ si } \ n>4/\varepsilon \quad \forall x\in[-2,2].$$



$\forall\varepsilon\ \exists N$ (cualquier entero > $4/\varepsilon$) / si $n\ge N$ es $|f_n-1| < \varepsilon\ \ \forall x\in[-2,2]$.

[el dibujo de las f_n sugería claramente la convergencia uniforme y que el N de $x=-2$ valía para los demás x]

4. ¿Posee función inversa la función f definida para todo $x\geq 2$ por $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\log t}$?

Como $f'(x) = \frac{1}{\log x^3} 3x^2 - \frac{1}{\log x^2} 2x = \frac{x^2-x}{\log x} > 0$ si $x\geq 2 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $[2,\infty)$

$\Rightarrow f$ es inyectiva en $[2,\infty) \Rightarrow f$ posee función inversa en ese intervalo.

[Que conste que la primitiva no se puede calcular]

5. Determinar si converge la integral impropia $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+\frac{1}{x}}}$.

$$\frac{1/x^{1+1/x}}{1/x} = \frac{1}{x^{1/x}} = \frac{1}{e^{\log x / x}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1$$ (pues $\frac{\log x}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$, como sabemos, o por L'Hôpital una vez).

Como $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ diverge, nuestra integral también es $\boxed{\text{divergente}}$ [primitiva tampoco calculable].

6. Hallar $I = \int_0^1 \frac{x}{x^4-16}dx$ y un número racional que aproxime I con un error menor que 10^{-2} .

Con un poco de vista: $u=x^2 \to I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{u^2-16} = \frac{1}{16}\left[\log|u-4|-\log|u+4|\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{16}\log\frac{3}{5}}$

$\frac{du}{u^2-16} \;||\; A/[u-4] + B/[u+4] \to A=1/8, B=-1/8$

Sin vista: $x^4-16 = [x^2-4][x^2+4] = [x-2][x+2][x^2+4]$ (o porque las raíces son 2 , -2 , $2i$ y $-2i$)

$$\frac{x}{x^4-16} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \to A[x+2][x^2+4] + B[x-2][x^2+4] + [Cx+D][x^2-4] = x$$

$x=2 \to 32A=2,\ A=1/16$; $x=-2 \to -32B=-2,\ B=1/16$; x^3: $A+B+C=0 \to C=-1/8$; x^0: $8A-8B-4D=0 \to D=0$.

$$\to I = \frac{1}{16}\left[\log|x-2|+\log|x+2|-\log|x^2+4|\right]_0^1 = \frac{1}{16}\log\frac{3}{5}$$

Para aproximar I con un racional podemos desarrollar el resultado. Para tener una serie alternada:

$$I = -\frac{1}{16}\log\frac{5}{3} = -\frac{1}{16}\log\left(1+\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{16}\left[\frac{2}{3}-\frac{2}{9}+\frac{8}{81}-\ldots\right] \approx \boxed{-\frac{1}{36}}$$ con $|E| < \frac{1}{2\text{x}81} < 10^{-2}$.

Mucho más largo es acotar el error (pues es mayor que el primer término despreciado y necesitamos el resto) si escribimos:

$$I = -\frac{1}{16}\log\left(1-\frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{16}\left[\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+\frac{8}{3\text{x}125}+\ldots\right]\ ;\ f=\log(1+x),\ f'=(1+x)^{-1},\ f''=-(1+x)^{-2},\ \ldots$$

Cortando en $\frac{2}{5}$ no basta: $|E| = \frac{1}{16}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{[1+c]^2}\left[\frac{2}{5}\right]^2 \underset{c\in(-2/5,1)}{<} \frac{1}{8\text{x}25}\,\frac{1}{[3/5]^2} = \frac{1}{72} > 10^{-2}$ [la calculadora dice que el error sí es menor, pero la cota obtenida es mayor]

Con dos términos ($I \approx \boxed{-\frac{3}{100}}$) sí se ve análogamente (pero trabajando algo más) que se cumple que $|E|<10^{-2}$.

Otra posibilidad (que no exige calcular la integral) es desarrollar el integrando:

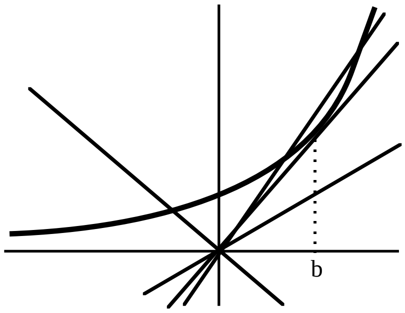
$$-\frac{x}{16}\,\frac{1}{1-x^4/16} \underset{|x|<2}{=} -\frac{1}{16}\left[x+\frac{x^5}{16}+\frac{x^9}{16^2}+\ldots\right] \to I = -\frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{6\text{x}16}+\frac{1}{10\text{x}16^2}+\ldots\right] \approx \boxed{-\frac{1}{32}}$$

con $|E| = \frac{1}{16^2}\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{10\text{x}16}+\ldots\right] < \frac{1}{6\text{x}16^2}\,\frac{1}{1-1/16} = \frac{1}{6\text{x}15\text{x}16} < 10^{-2}$

Otra más: $-x/16 <$ integrando $< -x/15$ en $[0,1] \Rightarrow -1/32 < I < -1/30 \Rightarrow$ todo racional del intervalo vale.

Cálculo I (grupos A,B) **sept99** **soluciones**

1. Discutir, según los valores de la constante a, cuántas soluciones reales tiene la ecuación $e^x = ax$.

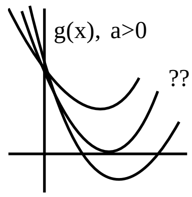


Si **a=0** , claramente no hay raíz.

Si **a<0** , hay **1** [$g(x) \equiv e^x - ax \to \mp\infty$ si $x \to \pm\infty$ y g es creciente en todo **R**, pues $g'(x) > 0\ \forall x$].

Si **a>0** , $g'(x) = e^x - a$, g decrece hasta $x = \ln a$ y luego crece; como $g(\ln a) = a(1 - \ln a)$ el mínimo es:

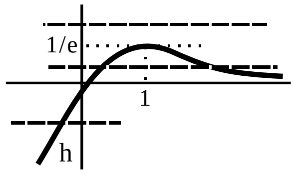
>0 si **0<a<e** $\to$ **0** raíces,
$=0$ si **a=e** $\to$ **1** raíz,
<0 si **a>e** $\to$ **2** raíces.



De otra forma: habrá **1** raíz cuando ax y e^x sean tangentes en un $x=b$; o lo que es lo mismo, si la recta $y = e^b + e^b(x-b)$ [tangente a e^x en b] pasa por $(0,0)$: $0 = e^b(1-b) \to b=1 \to$ **a=e** .

Lo más corto: $e^x = ax \Leftrightarrow h(x) \equiv xe^{-x} = \frac{1}{a}$; $h'(x) = (1-x)e^{-x}$; $h(1) = \frac{1}{e} \to$

si **0<a<e** $\to$ $1/a > 1/e$ $\to$ **0** raíces; si **a=e** $\to$ **1** raíz;
si **a>e** $\to$ $0 < 1/a < 1/e$ $\to$ **2** raíces; si **a<0** , **1** raíz.



2. Hallar el desarrollo de Tayor hasta x^6 de la función $f(x) = [36+x^3]^{-1/2}$.
Hallar un racional que aproxime con error menor que 10^{-2} : i) $f(2)$, ii) $f(-1)$.

$$f(x) = 36^{-1/2}\left[1+\frac{x^3}{36}\right]^{-1/2} = \frac{1}{6}\left[1-\frac{1}{2}\frac{x^3}{36}+\frac{3}{8}\frac{x^6}{36^2}-\dots\right] = \frac{1}{6}-\frac{x^3}{2^4 3^3}+\frac{x^6}{2^8 3^4}-\dots, \text{ si } \left|\frac{x^3}{36}\right|<1 \Leftrightarrow |x|<\sqrt[3]{36}\ (>3)$$

i) $f(2) = \frac{1}{6} - \frac{1}{54} + \frac{1}{324} - \dots$ serie alternada decreciente $\Rightarrow$ $\mathbf{f(2)} \approx \mathbf{\frac{4}{27}}$ con $|\text{error}| < \frac{1}{324} < 10^{-2}$.

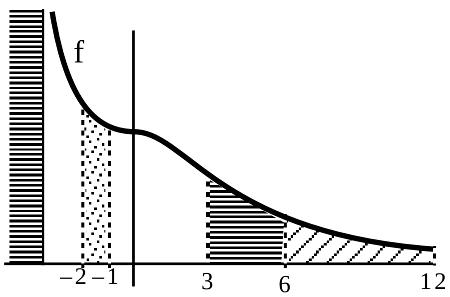
ii) $f(-1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{432} + \frac{1}{20736} + \dots$ serie no alternada (errror mayor que el primer término despreciado).

Necesitamos el resto de Taylor. A ver si tenemos suerte y basta el primero:

$$f'(x) = -\frac{3}{2}\frac{x^2}{[36+x^3]^{3/2}} \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{6} + R_0(-1) = \frac{1}{6} + \frac{f'(c)}{1!}(-1) = \frac{1}{6} + \frac{3c^2}{2[36+c^3]^{3/2}},\ c \in (-1,0)\ ;$$

$$|R_0(-1)| < \frac{3}{2}\frac{1}{35^{3/2}} < \frac{1}{100}\ \left(\text{pues } 150 < 35^{3/2} \Leftrightarrow 6^2 5^4 < 7^3 5^3 \Leftrightarrow 180 < 343\right) \Rightarrow \mathbf{f(-1)} \approx \mathbf{\frac{1}{6}} \text{ con } |\text{error}| < 10^{-2}.$$

3. Sea $H(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{36+t^3}}$ para $x \in [-1,6]$.
Determinar, si existen, los x que hacen i) máximo , ii) mínimo el valor de $H(x)$.



El integrando f es continuo, positivo y decreciente (↑) en todo el dominio $[-\sqrt[3]{36}, \infty)$; $f \to 0$ si $x \to \infty$, $f \to \infty$ si $x \to -\sqrt[3]{36}^{\,+}$.

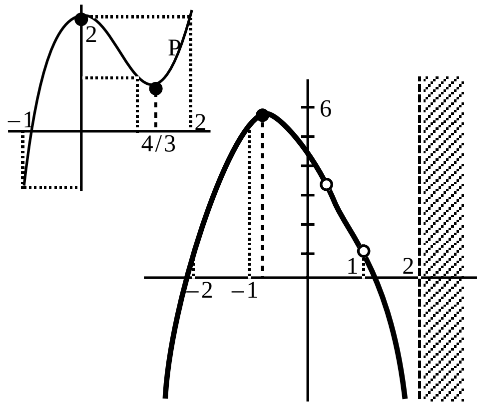
$$H'(x) = \frac{2}{\sqrt{36+8x^3}} - \frac{2}{\sqrt{36+8x^3}} = \frac{\sqrt{36+8x^3} - \sqrt{9+2x^3}}{\sqrt{9+2x^3}\sqrt{36+8x^3}} = \frac{27-x^3}{\sqrt{\ }\sqrt{\ }[\sqrt{\ }+\sqrt{\ }]}$$

H crece si $x<3$ y decrece si $x>3$ $\Rightarrow$ **máximo** de H si **x=3** .

Como $H(-1) = \int_{-1}^{-2} f = -\int_{-2}^{-1} f < 0$ y $H(6) = \int_6^{12} f > 0$,
el valor **mínimo** se da cuando **x=–1** .

4. Sea $f(x) = x^3 + 6\ln(2-x)$.
Determinar cuántos máximos locales y cuántos puntos de inflexión posee. Dibujar su gráfica.
Hallar el área de la región encerrada entre la gráfica de f y el eje x en el intervalo $[-1,1]$.

$\operatorname{dom} f = (-\infty,2)$; $f(x) \to -\infty$ si $x \to 2^-$ ó $-\infty$ $\left[\, x^3[1+6x^{-3}\ln(2-x)] \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \text{"}-\infty.[1+0]=-\infty\text{"} \text{ (L'Hôpital) } \right]$



$$f'(x) = 3\,\frac{x^3-2x^2+2}{x-2} = 0 \iff P(x) \equiv x^3-2x^2+2 = 0 \text{ ??}$$

$+-+$ (0 ó 2 raíces positivas ??); $--+$ (1 negativa [máx de f]);

$P'(x) = 3x^2-4x$, $P(4/3)=22/27>0$, $P(0)=P(2)=2$, $P(\pm1)=\pm1$

$\Rightarrow$ hay raíz de P [máximo] en $c\in(-1,0)$; no hay mínimos.

$$f''(x) = 6\,\frac{[x-1][x^2-3x+1]}{[x-2]^2} = 0 \text{ si } x=1 \text{ ó } \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.4 \quad \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2} \notin \text{dom} \right]$$

$\Rightarrow$ f convexa ($\cup$) entre los 2 puntos de inflexión
y cóncava en el resto de $\operatorname{dom} f$.

$f(1)=1$, $f(0)=6\ln2\approx4.1$, $f(-1)=6\ln3-1\approx5.6$, $f(-2)=12\ln2-8\approx0.3$.

5. Determinar si converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n^3+\cos^3 n}}$.

$$\sum |a_n| \le \sum \frac{1}{\sqrt{n^3+\cos^3 n}} \quad \text{que converge, porque } \sum \frac{1}{n^{3/2}} \text{ converge y } \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{}}{1/n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+(\cos^3 n/n^3)}} = 1 .$$

Por el criterio de comparación por desigualdades $\sum |a_n|$ converge
$\Rightarrow$ la serie dada **converge** (absolutamente).

6. Discutir la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{n}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] dx$ según los valores de $n\in\mathbf{N}$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln(1+x)} \underset{\text{en } 0}{\sim} \int_0^1 \frac{dx}{x} \text{ divergente, pero la diferencia de divergentes puede ser convergente.}$$

Desarrollamos por Taylor el integrando: $\displaystyle\frac{nx-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \frac{x(n-1)+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}$.

Si **n=1** , tiene límite (1/2) en $x=0$ y la impropia **converge**.

Si **n≠1** , el integrando se parece a $\displaystyle\frac{1}{x} \left(\frac{\frac{n}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}}{1/x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} n-1>0 \right)$ en $x=0$ y **diverge**.