Matemáticas (grupo B) **Soluciones del examen final de febrero** (15 de febrero de 2016)

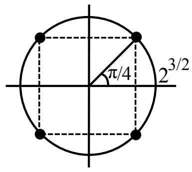
1. Hallar los números complejos z tales que $z^4=-64$ y escribir el polinomio $P(x)=x^4+64$ como producto de polinomios de segundo grado con coeficientes reales. [1 punto]

Buscamos las 4 raíces complejas de $-64=2^6 e^{i\pi}$, dadas por $2^{3/2}e^{i\phi}$, $\phi=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$.

Son, por tanto: $z_{1,4}=2\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i\right]=\boxed{2\pm 2i}$, $z_{2,3}=2\sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i\right]=\boxed{-2\pm 2i}$,

complejos conjugados (mucho más largo hallando $z=a+bi$ que cumplan $z^2=\pm 8i$). Entonces:

$P(x)=[(x-2-2i)(x-2+2i)][(x+2-2i)(x+2+2i)]=\boxed{(x^2-4x+8)(x^2+4x+8)}$.



2. Hallar el límite de la sucesión $a_n = n\arctan n - n^2\arctan\frac{2}{n}$. [1 punto]

$n(\arctan n - 2\frac{n}{2}\arctan\frac{2}{n}) \to \boxed{-\infty}$ $\left[\infty(\frac{\pi}{2}-2)\text{, pues } \frac{\arctan x}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1 \text{ y } \frac{2}{n}\to 0\right]$.

3. Sea $g(x)=x(\log|x|)^2$, $g(0)=0$. **a]** Determinar si es continua y derivable en $x=0$. **b]** Estudiar su crecimiento y hallar sus puntos de inflexión. **c]** Dibujar su gráfica. [2 puntos]

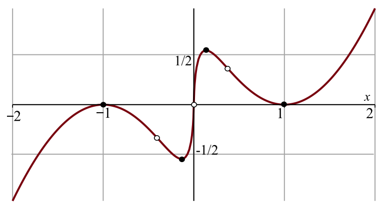
a] Como $\frac{(\log|x|)^2}{1/x}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{2\log|x|}{-1/x}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{2/x}{1/x^2}=2x\underset{x\to 0}{\to}0=g(x)$, g es **continua** en $x=0$.

Y como $\frac{g(h)-g(0)}{h}=(\log|h|)^2\underset{h\to 0}{\longrightarrow}\infty$, **no es derivable** en el punto.

b] $g'(x)=\log|x|(\log|x|+2)\to$ crece en $(-\infty,-1]\cup[-e^{-2},e^{-2}]\cup[1,\infty)$.

$g''(x)=\frac{2}{x}(\log|x|+1)\to(-e^{-1},-e^{-1})$, $(0,0)$, (e^{-1},e^{-1}) inflexión.

c] Impar. $g\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\infty$. Máximo local $g(e^{-2})=\frac{4}{e^2}\begin{smallmatrix}<1\\>4/9\end{smallmatrix}$. Mínimo local $g(1)=0$. Pendiente infinita en el origen.



4. Precisar todos los a para los que converge $\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}a^n(1-a)^n$ y hallar su suma para $a=\frac{1}{2}$. [1.4 puntos]

Geométrica: converge $\Leftrightarrow \left|\frac{a-a^2}{2}\right|<1 \Leftrightarrow a^2-a+2>0\ [\forall a]$ y $a^2-a-2=(a+1)(a-2)<0 \Leftrightarrow \boxed{a\in(-1,2)}$.

La suma de la serie para esos a es: $\frac{1}{1-(a-a^2)/2}=\frac{2}{a^2-a+2}$. En particular, si $a=\frac{1}{2}$, suma $\boxed{\frac{8}{7}}$.

5. **a]** Calcular el desarrollo de Taylor hasta x^2 de e^{2x+x^2}. [1.4 puntos]

b] Discutir, según los valores de la constante a, el valor del $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x+x^2}-1-ax}{x\log(1+x)}$.

a] $e^{2x+x^2}=1+(2x+x^2)+\frac{1}{2}(2x+x^2)^2+\cdots=[1+2x+2x^2+\cdots][1+x^2+\cdots]=\boxed{1+2x+3x^2+\cdots}$.

b] $\log(1+x)=x+\cdots$. $\frac{(2-a)x+3x^2+\cdots}{x^2+\cdots}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}3$, si $a=2$. Si $a<2$, $\underset{x\to 0^\pm}{\longrightarrow}\pm\infty$. Si $a>2$, $\underset{x\to 0^\pm}{\longrightarrow}\mp\infty$.

6. Sea $f(x)=\frac{1}{1-\sqrt{x}}$. **a]** Calcular $\int_4^9 f$. **b]** Precisar si converge $\int_0^1 f$. [1.4 puntos]

a] $t=\sqrt{x}$, $dx=2t\,dt \to 2\int_2^3\frac{t-1+1}{1-t}dt=-2-2\big[\log|1-t|\big]_2^3=\boxed{-2-2\log 2}$.

b] Impropia en 1^-, donde se comporta como $\frac{1}{1-x}$ $\left[\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}=1+\sqrt{x}\underset{x\to 1^-}{\longrightarrow}2\right]$. **Diverge**. (O a partir de la primitiva).

7. Sean $h(x)=\frac{4x-1}{(x+4)(x^2+1)}$ y $H(x)=\int_0^{x/2}h$. **a]** Calcular $H'(2)$. **b]** Determinar el $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{H(x)}{x}$. [1.8 puntos]

c] Precisar cuántos ceros tiene H en el intervalo $[\frac{1}{2},4]$ [se podría responder sin integrar h, pero no ayuda h'].

a] h continua si $x>-4$, $\frac{x}{2}$ derivable $\Rightarrow H'(x)=\frac{1}{2}\frac{2x-1}{[(x/2+4)[(x/2)^2+1]}$, $\boxed{H'(2)=\frac{3}{20}}$.

b] $\int^{\infty}h$ converge ($\sim\int^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ pues $\frac{f(x)}{1/x^2}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}4$) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{H(x)}{x}=\boxed{0}$ $\left(\frac{\text{constante}}{\infty}\right)$.

c] $H(\frac{1}{2})=\int_0^{1/4}<0$ y es H creciente en $[\frac{1}{2},4]$. Si $H(4)=\int_0^2>0$, tendrá $\boxed{1}$ cero:

$\int_0^2 h=\int_0^2\left[\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+4}\right]dx=\cdots=\int_0^2\left[\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x+4}\right]dx=\frac{1}{2}\log(x^2+1)-\log|x+4|\Big]_0^2=\frac{1}{2}\log\frac{20}{9}>0$.

O bien: En $[1,2]$ es $h(x)\underset{\text{mín numer, máx denom}}{\geq}\frac{3}{6\cdot 5}=\frac{1}{10}\Rightarrow$ área sobre el eje $>\frac{1}{10}$. Y bajo el eje es fácil ver que es $<\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$.