1. Hallar todos los números reales x que satisfacen $\log(4x^3-3x)\leq 0$. [1.2 puntos]

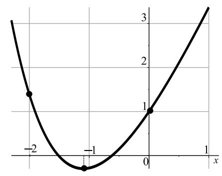
El paréntesis debe ser positivo para que el logaritmo esté definido y ser ≤ 1 para que su logaritmo sea ≤ 0:

$$0<4x^3-3x\leq 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{l} x\left(2x-\sqrt{3}\right)\left(2x+\sqrt{3}\right)>0 \;\Leftrightarrow\; \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\infty\right) \\ 4x^3-3x-1=(x-1)(2x+1)^2\leq 0 \;\Leftrightarrow\; (-\infty,1] \end{array} \;\Rightarrow\; \boxed{x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]}.$$

2. Hallar el límite de la sucesión $a_n=n^2\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right]$. [1.2 puntos]

Como $(1+\bullet)^{1/2}=1+\frac{\bullet}{2}+\cdots$, $a_n=n^2\left[1+\frac{1}{2n^2}+\cdots-1\right]\to\boxed{\frac{1}{2}}$. O bien $n\left[\sqrt{n^2+1}-n\right]=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}\to\boxed{\frac{1}{2}}$.

3. Estudiar cuántas veces se anula $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+3x$ en el intervalo $[-2,0]$. [1.2 puntos]



$f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}+3=0$ si $x=-\log 3$ (algo menor que -1). Antes f decrece y luego crece.
$f(-2)=\mathrm{e}^2-6>\frac{25}{4}-6>0$, $f(0)=1>0$ (el teorema de Bolzano, solo, no nos dice nada).
Como $f(-\log 3)=3(1-\log 3)<0$ ó $f(-1)=\mathrm{e}-3<0$ (por ser $\mathrm{e}<3$), la función se anula exactamente **2 veces** en el intervalo [un cero está en $(-2,-\log 3)$ y otro en $(-1,0)$].

4. Sea $g(x)=\frac{\arctan(2x^2)}{x^2}$, $g(0)=2$. **a]** Precisar si es continua en $x=0$ y hallar, si existe, $g'(0)$. **b]** Determinar si converge la integral impropia $\int_1^\infty g$. [1.6 puntos]

a] Desarrollando el numerador: $g(x)=\frac{2x^2+\frac{8}{3}x^6+\cdots}{x^2}=2+\frac{8}{3}x^4+\cdots\Rightarrow g$ **continua** y $\boxed{g'(0)=0}$ [de hecho es C^∞].

[Con L'Hôpital se alarga: $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x/(1+4x^4)}{2x}=2$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan(2x^2)-2x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4/(1+4x^4)-4}{3x}=0$].

b] **Converge** pues $\frac{g(x)}{1/x^2}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}$ y lo hace $\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}$. O bien $\int_1^\infty g\leq\frac{\pi}{2}\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}$ convergente. [Se podría dar su valor con bastantes cálculos].

5. Determinar para qué x converge la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n+3}x^n$ y precisar si converge para $x=\operatorname{sh}1$. [1.6 puntos]

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{(n+1)(n+4)}{(n+3)(n+2)}|x|$, $\sqrt[n]{|a_n|}=\left[\frac{n+1}{n+3}\right]^{1/n}|x|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}|x|$. Por tanto, converge si $|x|<1$ y diverge si $|x|>1$.

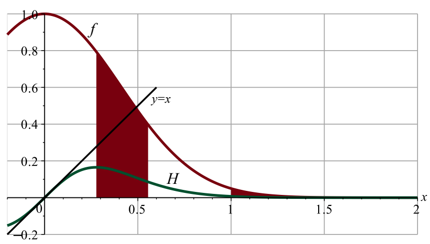
Para $x=1$ y -1 quedan $\sum\frac{n+1}{n+3}$ y $\sum(-1)^n\frac{n+1}{n+3}$, ambas divergentes ($a_n\not\to 0$). Converge si $\boxed{x\in(-1,1)}$.

Como $\operatorname{sh}1=1+\frac{1}{6}+\cdots>1$ (términos todos positivos), o $\frac{\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}}{2}>\frac{5/2-1/2}{2}=1$, la serie **diverge** para ese valor.

6. Calcular $\int_{-\log 3}^{-\log 2}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x-1}\,dx$ [1.2 puntos]

$t=\mathrm{e}^x$, $dt=\mathrm{e}^x dx$, $\begin{array}{l}x=-\log 2\to t=1/2\\ x=-\log 3\to t=1/3\end{array}\to\int_{1/3}^{1/2}\frac{t-1+1}{t-1}dt=\frac{1}{6}+\Big[\log|t-1|\Big]_{1/3}^{1/2}=\frac{1}{6}+\log\frac{1}{2}-\log\frac{2}{3}=\boxed{\frac{1}{6}+\log 3-2\log 2}$.

7. Sea $H(x)=\int_x^{2x}\mathrm{e}^{-3s^2}ds$. **a]** Hallar la ecuación de la tangente a su gráfica en $x=0$. **b]** Probar que $0<H(1)<\frac{1}{8}$. **c]** Precisar los x en los que H alcanza sus valores extremos en el intervalo $[0,1]$. [2.0 puntos]



a] $H'(x)=2\mathrm{e}^{-12x^2}-\mathrm{e}^{-3x^2}=\mathrm{e}^{-12x^2}\left[2-\mathrm{e}^{9x^2}\right]$. $H'(1)=\frac{2-\mathrm{e}^9}{\mathrm{e}^{12}}<0$.

$H'(0)=1$, $H(0)=\int_0^0=0\Rightarrow$ la recta tangente es $\boxed{y=x}$.

b] $0<f(x)=\mathrm{e}^{-3x^2}<\mathrm{e}^{-3}$ en $[1,2]\Rightarrow 0<H(1)=\int_1^2 f<\frac{1}{\mathrm{e}^3}<\frac{1}{8}$.

c] $H'(x)=0$ si $9x^2=\log 2\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{\log 2}}{3}$. $x^*=\frac{1}{3}\sqrt{\log 2}\in(0,1)$.

Valor mínimo $\boxed{H(0)=0}$, pues, según H', H crece hasta x^* y decrece hasta 1, donde sigue siendo positiva.

El **valor máximo** se da para $x=\frac{1}{3}\sqrt{\log 2}$ [no es calculable, podríamos dar una cota: $H(x^*)<\int_{\sqrt{\cdot}/3}^{2\sqrt{\cdot}/3}1=\frac{\sqrt{\cdot}}{3}<\frac{2}{3}$].