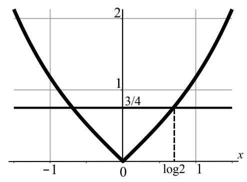
Elegir entre 1 y 1*

1. Determinar todos los números reales x que cumplen la desigualdad $|\operatorname{sh} x| \le \frac{3}{4}$. [1.2 puntos]

Dibujando la gráfica de $|\operatorname{sh} x|$ (par), se ve que basta hallar el x tal que

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 2e^{2x} - 3e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{3\pm 5}{4},\ x = \log 2 \Rightarrow \boxed{[-\log 2, \log 2]}\,.$$

O discutiendo $-\frac{3}{2} \le e^x - e^{-x} \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^{2x} - 3e^x - 2 = (2e^x+1)(e^x-2) \le 0,\ x \le \log 2 \uparrow \\ 2e^{2x} + 3e^x - 2 = (2e^x-1)(e^x+2) \ge 0,\ x \ge \log \frac{1}{2} \end{cases}$



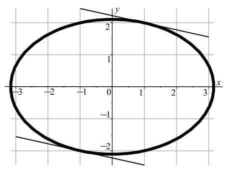
1*. Hallar los puntos de la elipse $4x^2+9y^2=40$ en los que la recta tangente tiene pendiente $-\frac{2}{9}$. [1.2 puntos]

Derivando implícitamente:

$$8x+18yy'=0,\ y' = -\frac{4x}{9y} = -\frac{2}{9} \to y = 2x \to 40x^2 = 40,\ x = \pm 1\,.$$

Los puntos pedidos son $\boxed{(1,2)}$ y $\boxed{(-1,-2)}$.

[Más largo es derivar explícitamente las funciones $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{10-x^2}$].



2. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\arctan x, & x<0 \\ 1 + x\arctan\frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$, $f(0)=1$. **a]** Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. **b]** Estudiar si es continua y derivable en $x=0$. [2 puntos]

a] $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\arctan x}{x} = \boxed{0}\ \left[\frac{-\pi/2}{\infty}\right]$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[1+\frac{\arctan t}{t}\right] = \boxed{2}\ \left[1+\frac{t+\cdots}{t}\right]$.

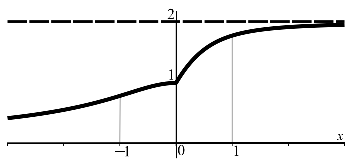
b] $\frac{\arctan x}{x} = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \cdots \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 1$ [y además la serie nos dice que $f'(0^-)=0$].

$f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1 + 0\times\frac{\pi}{2} = 1$. Ambos límites coinciden con $f(0)=1 \Rightarrow$ **continua**.

Si $x>0$, $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \arctan\frac{1}{h} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} = f'(0^+) \ne f'(0^-) \underset{\uparrow}{=} 0 \Rightarrow$ **no derivable**.

[Bastante más largo sin Taylor: $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\arctan h - h}{h^2} \overset{\text{L'H}}{\to} \frac{\frac{1}{1+h^2}-1}{2h} = -\frac{h}{2} \underset{h\to 0^-}{\longrightarrow} 0 = f'(0^-)$].

[Y más largo aún es calcular el límites de las derivadas para $x<0$ y $x>0$ $\left(\frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{\arctan x}{x^2}\right.$ y $\left.\arctan\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)$, no olvidando que si el límite de estas no existiese, podría existir $f'(0)$, que hay f derivables que no son C^1].



3. $g(x) = \log\frac{x^2-2x+3}{x^2+2}$. **a]** Estudiar en qué intervalos crece y decrece. **b]** Precisar cuántas veces se anula g en $[0,1]$ y cuántas soluciones tiene $g(x)=1$ en todo su dominio. [1.8 puntos]

a] Como numerador $(x-1)^2+2$ y denominador x^2+2 son claramente positivos, $g \in C^\infty$ en todo $\mathbf{R}$.

$$g'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+3} - \frac{2x}{x^2+2} = \frac{2x^2-2x-4}{(x^2-2x+3)(x^2+2)} = \frac{2(x+1)(x-2)}{(x^2-2x+3)(x^2+2)} \Rightarrow g \text{ **decrece en** } [-1,2] \text{ **y crece en el resto**}.$$

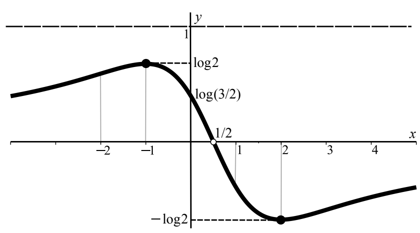
b] Es fácil hallar los x tales que $g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+3}{x^2+2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in [0,1]$.

O también aseguran ese **único cero** Bolzano y el crecimiento:

$g(0) = \log\frac{3}{2} > 0 > \log\frac{2}{3} = g(1)$, g continua y decrece en $[0,1]$.

$g(2) = -\log 2$, $g \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \log 1 = 0 \Rightarrow$ máximo absoluto $g(-1) = \log 2 < 1$.

Por tanto, **no hay ningún** x **que cumpla** $g(x)=1$.



Se podría responder sin analizar la gráfica: $g=1 \Leftrightarrow (e-1)x^2+2x+2e-3=0$, con $\Delta = -\underbrace{\left(2e^2-5e+2\right)}_{=e(2e-5)+2} < 0$.

4. Precisar todos los x para los que converge la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n(x+1)^{2n}}{(2n)!}$. [1 punto]

Cociente: $\dfrac{4^{n+1}|x+1|^{2n+2}(2n)!}{4^n|x+1|^{2n}(2n+2)|} = \dfrac{4|x+1|^2}{(2n+1)(2n+2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0<1 \;\; \forall x \;\Rightarrow$ converge en todo $\mathbf{R}$ $\big[$a $f(x)=\cos(2x+2)\big]$.

5. Sean $h(x)=\frac{4-x^4}{4+x^4}$ y $H(x)=\displaystyle\int_0^x h(s)\,ds$. **a]** Calcular los tres primeros términos no nulos del desarrollo de Taylor de $h(x)$ en $x=0$. **b]** Probar que $\frac{3}{4}<H(1)<1$.
c] Determinar los x en los que H alcanza sus valores extremos en el intervalo $[0,1]$.
¿Existe el valor máximo o mínimo de H en $[0,\infty)$? [2.2 puntos]

a] $h(x)=\frac{8}{4+x^4}-1=\frac{2}{1-(-x^4/4)}-1=2\big[1-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{16}x^8-\cdots\big]-1=\boxed{1-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{8}x^8-\cdots}$.

$\big[$O haciendo el producto $\big[1-\frac{1}{4}x^4\big]\big[1-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{16}x^8-\cdots\big]$, o buscando cociente $c_0+c_4x^4+c_8x^8+\cdots$ $\big]$.

b] Desarrollo válido si $\frac{|x|^4}{4}<1$, $|x|<\sqrt{2} \;\Rightarrow\; \int_0^1 h = 1-\frac{1}{10}+\frac{1}{72}-\cdots \underset{>9/10>3/4}{\overset{<1}{}}$, por ser serie de Leibniz.

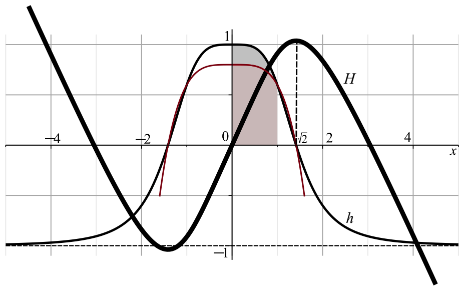
De otra forma: en $[0,1]$ es $\frac{3}{5}<\frac{4-x^4}{5}\le f\le\frac{4-0}{4+0}=1 \;\Rightarrow\; \frac{3}{4}<\frac{19}{25}=\frac{1}{5}\int_0^1(4-s^4)\,ds<\int_0^1 h<\int_0^1 1=1$.

c] Como h continua en todo $\mathbf{R}$, el TFC nos da la derivada $\forall x$:

$H'(x)=\frac{4-x^4}{4+x^4} \;\Rightarrow$ crece en $\big[-\sqrt{2},\sqrt{2}\,\big]$ y decrece en el resto

$\Rightarrow$ $H(0)$ **mínimo**, $H(1)$ **máximo**. O porque, por ser $h\ge 0$ en $\big[-\sqrt{2},\sqrt{2}\,\big]$, hasta 1 estamos añadiendo áreas positivas.

Que $h \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} -1 \;\Rightarrow\; H \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ (impropia divergente) (●).



No hay mínimo en $[0,\infty)$ **y** $H\big(\sqrt{2}\big)$ **es el valor máximo**.

$\big[$ (●) Para comparar h por paso al límite en el infinito, donde es negativa, se debe sacar el $-$ fuera: $\frac{x^4-4}{x^4+4}\overset{\infty}{\approx}1$.
Que H decrezca, por si solo, no prueba que no haya mínimo, pues podría tender a un número mayor que 0 $\big]$.

6. **a]** Calcular $\displaystyle\int_0^{\log 3}\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$. **b]** Estudiar si converge $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$. [1.8 puntos]

a] Con el cambio $t=\sqrt{e^x+1}$, $x=\log(t^2-1)$, $dx=\frac{2t}{t^2-1}\,dt$, $x=0\to t=\sqrt{2}$, $x=\log 3\to t=2$, queda:

$$\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{2\,dt}{t^2-1}\underset{\bullet}{=}\log\Big|\frac{t-1}{t+1}\Big|\Big]_{\sqrt{2}}^{2}=\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\log 3=\boxed{\log\big(1+\tfrac{2\sqrt{2}}{3}\big)} \quad \Big[\frac{2}{t^2-1}\underset{\bullet}{=}\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}=\frac{A(t-1)+B(t+1)}{(t+1)(t-1)} \quad \begin{matrix} t=1\to B=1 \\ t=-1\to A=-1\end{matrix}\Big].$$

[Algo más largo es hacer dos cambios sucesivos más habituales: $e^x=u\to\int_1^3\frac{du}{u\sqrt{u+1}}$ y luego $\sqrt{u+1}=t$ $\big]$.

b] Integrando $\sim e^{-x/2}$ $\Big[$es decir, $\frac{1/\sqrt{1+e^x}}{e^{-x/2}}=\frac{1}{\sqrt{e^{-x/2}+1}}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}1\Big]$ e $\int^{\infty}e^{-x/2}$ converge $\Rightarrow$ la nuestra **converge**.

Se podría asegurar con la primitiva calculada, y con ella además podemos dar el valor de la impropia:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=\log\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\Big]_0^{\infty}=\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\lim_{x\to\infty}\log\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}=2\log\big(1+\sqrt{2}\,\big).$$