Matemáticas (grupo A) — **Soluciones del final de septiembre** (8 de septiembre de 2017)

Elegir entre 1 y 1*

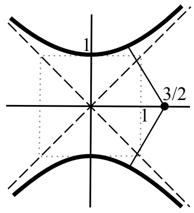
1. Si $z=2\mathrm{i}$, $w=\mathrm{i}-1$, escribir z, w y $\frac{z}{w}$ en la forma $re^{\mathrm{i}\theta}$ y escribir w^5 en la forma $a+b\,\mathrm{i}$. [1.3 puntos]

$z=\boxed{2\,e^{\mathrm{i}\,\pi/2}}$. $w=\boxed{\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\,3\pi/4}}$ $\big[r=\sqrt{1+1}$, $\tan\theta=-1$ y tercer cuadrante$\big]$. $\frac{z}{w}=\frac{2}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\,(\pi/2-3\pi/4)}=\boxed{\sqrt{2}\,e^{-\mathrm{i}\,\pi/4}}=1-\mathrm{i}$.

$w^5=4\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\,15\pi/4}=4\sqrt{2}\,\big[\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4}\big]=\boxed{4-4\mathrm{i}}$. $\big[$Más corto que $(\mathrm{i}-1)^5=\underset{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^5}-\underset{-5}{5\mathrm{i}^4}+\underset{-10\mathrm{i}}{10\mathrm{i}^3}-\underset{+10}{10\mathrm{i}^2}+5\mathrm{i}-1\,\big]$.

1*. Hallar los puntos de la hipérbola $y^2-x^2=1$ más cercanos al punto $\left(\frac{3}{2},0\right)$. [1.3 puntos]

La distancia al cuadrado desde el punto $\left(\frac{3}{2},0\right)$ a un punto (x,y) de cualquiera de las dos ramas de la hipérbola es $D(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(1+x^2)$. $D'(x)=4x-3$.
Por tanto, el mínimo de D se toma si $x=\frac{3}{4}$ (antes D decrece y después crece).
Los puntos más cercanos son, pues, $\boxed{\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)}$ y $\boxed{\left(\frac{3}{4},-\frac{5}{4}\right)}$.

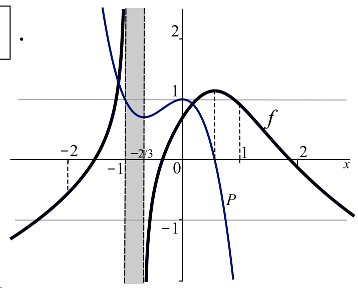


2. Sea $f(x)=\log\frac{3x+2}{x^3+1}$. **a]** Precisar su dominio D y sus asíntotas verticales. **b]** Calcular $f'(1)$. **c]** Probar que f' sólo tiene un cero y esbozar la gráfica de f. **d]** ¿Es f inyectiva en $[1,\infty)$? ¿Lo en todo D? [2.3 puntos]

a] $\frac{3x+2}{x^3+1}>0$ si $x>-\frac{2}{3}$ y si $x<-1$ $\Rightarrow$ $\boxed{D=(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{2}{3},\infty\right)}$. $f\underset{x\to-2/3^+}{\longrightarrow}-\infty$ $[\log 0^+]$. $f\underset{x\to-1^-}{\longrightarrow}\infty$ $[\log\infty]$.

b] $f(x)=\log(3x+2)-\log(x^3+1)$, $f'(x)=\frac{3}{3x+2}-\frac{3x^2}{x^3+1}=\frac{3(1-2x^2-2x^3)}{(3x+2)(x^3+1)}$, $\boxed{f'(1)=-\frac{9}{10}}$.

c] Los ceros de f' son las raíces del $P(x)=1-2x^2-2x^3$. $P'=-2x(2+3x)$.
$P\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{19}{27}$, $P(0)=1$, $P(1)=-3$. Única raíz $\big[$en $(0,1)\big]$.
$\big[f'(0)=\frac{3}{2}>0$, $f'(1)<0$, f' continua en $[0,1]$ $\Rightarrow$ f' se anula en $(0,1)$, pero no dice cuántas veces lo hace, ni si se anula fuera$\big]$.
$f(-2)=\log\frac{4}{7}<0$, $f(0)=\log 2>0$, $f(1)=\log\frac{5}{2}>0$, $f(2)=\log\frac{8}{9}<0$. $f\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}-\infty$.

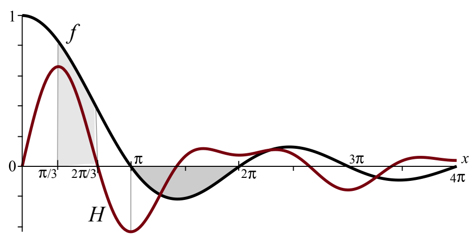


d] $f'<0$ si $x\geq 1$ $\big[2x^2+2x^3\geq 4$ claramente$\big]$ $\Rightarrow$ f estrictamente decreciente ahí y, por tanto, **es inyectiva**.
A la vista de la gráfica es evidente que no es inyectiva en todo D. $\big[$Por ejemplo $f(x)=0$ para tres $x\,\big]$.

3. Sea $H(x)=\int_x^{2x}\frac{\mathrm{sen}\,t}{t}\,dt$. **a]** Hallar todos los $x>0$ para los que $H'(x)=0$. **b]** Estudiar cuántas veces se anula H en el intervalo $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$. [2 puntos]

a] x y $2x$ derivables e integrando f continuo en $(0,\infty)$ [lo es en $\mathbf{R}$]
$\Rightarrow$ H derivable y es $H'(x)=2\frac{\mathrm{sen}\,2x}{2x}-\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}=\frac{2}{x}\,\mathrm{sen}\,x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$.
$H'=0$ cuando $\boxed{x=n\pi}$, $\boxed{x=\frac{\pi}{3}+2n\pi}$ ó $\boxed{x=\frac{5\pi}{3}+2n\pi}$, $n\in\mathbf{N}$.

b] $H\left(\frac{\pi}{3}\right)=\int_{\pi/3}^{2\pi/3}f>0$, $H(\pi)=\int_{\pi}^{2\pi}f<0$, $H'<0$ en $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ $\Rightarrow$
$\big(f>0$ en $[0,\pi]\big)$ $\big(f<0$ en $[\pi,2\pi]\big)$ decrece estrictamente
H **se anula exactamente una vez** en el intervalo.



Gráfica con Maple. Hemos analizado hasta $H(\pi)$.

4. Sea $g(x)=x\arctan\frac{1}{x^2}$, $g(0)=0$. **a]** Precisar si es continua y derivable en $x=0$. **b]** Calcular una primitiva de g . **c]** Estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_0^\infty g$. [2 puntos]

a] $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0\cdot\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow g$ continua en $x=0$. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(h)-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\arctan\frac{1}{h^2}=\frac{\pi}{2}$ valor de la derivada en $x=0$.

b] Partes: $\begin{matrix} u=\arctan\frac{1}{x^2} \\ dv=x\,dx \end{matrix} \to \int x\arctan\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}x^2\arctan\frac{1}{x^2}+\int\underbrace{\frac{x^2x^{-3}}{1+x^{-4}}}_{x^3/(x^4+1)}dx = \boxed{\frac{1}{2}x^2\arctan\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4}\log(x^4+1)}$.

c] En 0 no hay ningún problema (la función es incluso derivable). Sólo existe la impropiedad del infinito.

Como $\arctan\bullet=\bullet-\cdots$ el integrando en el ∞ se parecerá a $x\frac{1}{x^2}$ y la impropia será **divergente** como $\int^\infty\frac{1}{x}$.

Con más rigor: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{1/x} = \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\arctan t^2}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{t^2-\cdots}{t^2} = 1$, con lo que ambas tiene el mismo carácter.

También nos lo dice la primitiva calculada, que tiende a ∞ , pues $x^2\arctan\frac{1}{x^2}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}1$ y $\log(x^4+1)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\infty$.

Elegir DOS problemas entre 5, 6 y 7

5. Discutir la convergencia de la serie $\sum\frac{a^n+a^{-n}}{n+7}$ según los valores de $a>0$. [1.2 puntos]

Si $a>1$, sabemos que $\frac{a^n}{n+7}\to\infty \Rightarrow a_n\to\infty\ [\infty+0] \Rightarrow$ la serie diverge.

Si $0<a<1$, $\frac{(\overset{>1}{1/a})^n}{n+7}\to\infty \Rightarrow a_n\to\infty\ [0+\infty] \Rightarrow$ la serie también diverge.

[A lo mismo se llega escribiendo $\sum\frac{a^n}{n+7}$ y $\sum\frac{a^{-n}}{n+7}$ y aplicando cociente o raíz a cada una: la primera converge si $0<a<1$ y la segunda lo hace si $a>1$].

Como para $a=1$ la serie que queda $\sum\underbrace{\frac{2}{n+7}}_{\sim 1/n}$ diverge, la serie dada **no converge para ningún** a .

6. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+\operatorname{sen}^2x)-x^2}{x^4}$. [1.2 puntos]

$\log(1+\operatorname{sen}^2x)=\operatorname{sen}^2x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^4x+\cdots=\left[x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right]^2-\frac{1}{2}\left[x-\cdots\right]^4 = x^2-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)x^4+\cdots = x^2-\frac{5}{6}x^4+\cdots$.

Por tanto, $\frac{\log(1+\operatorname{sen}^2x)-x^2}{x^4} = \frac{-\frac{5}{6}x^4+\cdots}{x^4}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\boxed{-\frac{5}{6}}$.

Por L'Hôpital no es demasiado largo si se simplifica. O se puede empezar por L'H y seguir con Taylor:

$$\frac{\log(1+\operatorname{sen}^2x)-x^2}{x^4}\overset{L'H}{\to}\frac{(2\operatorname{sen}x\cos x)/(1+\operatorname{sen}^2x)-2x}{4x^3}=\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2x}\,\frac{\operatorname{sen}2x-2x-2x\operatorname{sen}^2x}{4x^3}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\frac{5}{6},$$

puesto que $\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2x}\to 1$ y es $\operatorname{sen}2x-2x-2x\operatorname{sen}^2x=2x-\frac{4}{3}x^3+\cdots-2x-2x^3+\cdots=-\frac{10}{3}x^3+\cdots$

7. Calcular $\int_0^{1/2}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. [1.2 puntos]

$x=\operatorname{sen}t$, $dx=\cos t\,dt \to \int_0^{\pi/6}\operatorname{sen}^3t\,dt=\int_0^{\pi/6}\left(1-\cos^2t\right)\operatorname{sen}t\,dt = \frac{1}{3}\cos^3t-\cos t\Big]_0^{\pi/6}=\boxed{\frac{2}{3}-\frac{3}{8}\sqrt{3}}$.

Se podría hacer (en este caso) con $\begin{matrix} s=\sqrt{1-x^2} \\ ds=-x(1-x^2)^{-1/2}dx\end{matrix} \to \int_1^{\sqrt{3}/2}(s^2-1)\,ds=s\left(\frac{1}{3}s^2-1\right)\Big]_1^{\sqrt{3}/2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{4}-1\right]+\frac{2}{3}$.
[para $x^2/\sqrt{\cdot}$ no saldría]

O incluso por partes: $\begin{matrix} dv=x(1-x^2)^{-1/2} \\ u=x^2\end{matrix} \to -x^2(1-x^2)^{1/2}\Big]_0^{1/2}+2\int_0^{1/2}x(1-x^2)^{1/2}=-\frac{1}{8}\sqrt{3}-\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}\Big]_0^{1/2}=\cdots$