Matemáticas (grupo B) **Soluciones del final de febrero** (8 de febrero de 2018)

1. Sea $z=\frac{4\,\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$. Hallar y escribir en la forma $a+b\,\mathrm{i}$: i) z^5 , ii) un complejo w tal que $w^3=z$. [1.2 puntos]

$z=\frac{4\,\mathrm{i}\,(1+\mathrm{i})}{2}=-2+2\,\mathrm{i}=2\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\,3\pi/4}$, pues $r=\sqrt{4+4}$ y es $\tan\theta=-1$ con θ en el segundo cuadrante.

$\big[$También se podría hacer el cociente en polares: $z=\frac{4\,e^{\mathrm{i}\,\pi/2}}{\sqrt{2}\,e^{-\mathrm{i}\,\pi/4}}=2\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\,(\pi/2+\pi/4)}\big]$.

i) $z^5=32\cdot 4\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\,15\pi/4}=128\sqrt{2}\,e^{-\mathrm{i}\,\pi/4}=128\sqrt{2}\,\big(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\big)=\boxed{128-128\,\mathrm{i}}$.

Más largo con el Binomio de Newton: $z^5=2^5(-1+\mathrm{i})^5=32\,(-1+5\mathrm{i}+10-10\mathrm{i}-5+\mathrm{i})=32(4-4\mathrm{i})$.

ii) La raíz más sencilla es $w=\sqrt[3]{r}\,e^{\mathrm{i}\,\theta/3}=\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\,\pi/4}=\sqrt{2}\,\big(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\big)=\boxed{1+\mathrm{i}}$.

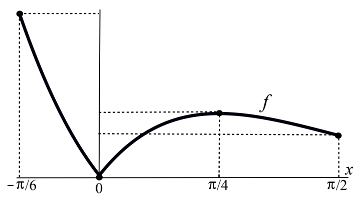
2. Calcular, si existen, los valores máximo y mínimo de $f(x)=e^{-x}\mathrm{sen}|x|$ en el intervalo $\big[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\big]$. [1.5 puntos]

Los valores extremos existen por ser f continua en un intervalo cerrado. Se alcanzarán el los extremos del intervalo, en los puntos sin derivada o en los puntos en que la derivada se anule.

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}\,\mathrm{sen}\,x\,,\ x\ge 0\\ -e^{-x}\mathrm{sen}\,x\,,\ x\le 0\end{cases}\Rightarrow\ f'(x)=\begin{cases}e^{-x}(\cos x-\mathrm{sen}\,x)\,,\ x>0\\ -e^{-x}(\cos x-\mathrm{sen}\,x)\,,\ x<0\end{cases}\Rightarrow\ \begin{array}{l}f'\big(\frac{\pi}{4}\big)=0 \text{ (único cero en el intervalo).}\\ f'(0) \text{ no existe, pues } f'(0^-)=-1\neq 1=f'(0^+)\,.\end{array}$$

$f'(x)>0,\ x\in\big(0,\frac{\pi}{4}\big)$, $f'(x)<0,\ x\in\big[-\frac{\pi}{6},0\big)\cup\big(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\big]\ \Rightarrow$

f crece en $\big[0,\frac{\pi}{4}\big]$ y decrece en el resto del intervalo. Y por tanto:



El **valor mínimo** será $\boxed{f(0)=0}$, menor claramente que $f\big(\frac{\pi}{2}\big)=e^{-\pi/2}>0$.

Para precisar el máximo se debe comparar $f\big(-\frac{\pi}{6}\big)=\frac{1}{2}e^{\pi/6}$ y $f\big(\frac{\pi}{4}\big)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\pi/4}$.

Como $e^{\pi/6+\pi/4}=e^{5\pi/12}>e>\sqrt{2}$, deducimos que $\boxed{\frac{1}{2}e^{\pi/6}}$ es el **valor máximo**.

3. Sea $g(x)=\frac{1}{x}\,(\mathrm{sen}\,x+\cos x-1)$, $g(0)=1$. **a]** Hallar, si existe, $g'(0)$. **b]** Precisar todos los x tales que $g(x)=0$.
c] Probar que g' se anula en el intervalo $\big[\frac{\pi}{2},2\pi\big]$. [0.8+0.8+0.4=2 puntos]

a] Taylor da todas la derivadas: $g(x)=\frac{x-\frac{1}{6}x^3+\cdots+1-\frac{1}{2}x^2+\cdots-1}{x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2+\cdots\ \Rightarrow\ g$ continua y $\boxed{g'(0)=-\frac{1}{2}}$.

Acudiendo a la definición: $\frac{g(h)-g(0)}{h}=\frac{\mathrm{sen}\,h+\cos h-1-h}{h^2}=\frac{-h^2/2+\cdots}{h^2}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}-\frac{1}{2}$ (o L'Hôpital dos veces).

[Como casi siempre, lo que menos conviene es ver que g es continua, hallar $g'(x)$ y calcular su límite].

b] $g(x)=0\ \Rightarrow\ \mathrm{sen}\,x+\cos x=1\ \Rightarrow\ \mathrm{sen}^2x+\cos^2x+2\,\mathrm{sen}\,x\cos x=1\ \Leftrightarrow\ \mathrm{sen}\,2x=0\ \Leftrightarrow\ x=\frac{k\pi}{2}\,,\ k\in\mathbf{Z}$.

Pero podemos haber generado soluciones falsas. Si $\boxed{x=\frac{\pi}{2}+2k\pi}$ $(1+0-1)$ se cumple. No si $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

También se cumple si $\boxed{x=2k\pi\,,\ k\neq 0}$ $(0+1-1)$, pero no se anulan ni $g(0)$ ni $g\big([2k-1]\pi\big)$.

c] $g\big(\frac{\pi}{2}\big)=g(2\pi)=0$ y g es continua y derivable en el intervalo. El **teorema de Rolle** asegura ese cero de g' .

O bien, como $g'(x)=\frac{\cos x-\mathrm{sen}\,x}{x}-\frac{\mathrm{sen}\,x+\cos x-1}{x^2}$ es continua, $g'\big(\frac{\pi}{2}\big)=-\frac{2}{\pi}$, $g'(2\pi)=\frac{1}{2\pi}$, lo asegura **Bolzano**.

4. **a]** Precisar todos los números reales x para los que converge $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}x^n}{3^{n+1}}$ y hallar la suma de la serie.
b] Determinar si lo hace para $x=\log\frac{7}{4}$. [1+0.5=1.5 puntos]

a] Respuesta corta identificando la serie geométrica: $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\big(\frac{4x}{3}\big)^n=\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-(4x/3)}=\boxed{\frac{1}{3-4x}}$, si $\big|\frac{4x}{3}\big|<1\ \Leftrightarrow\ \boxed{|x|<\frac{3}{4}}$.

[Si se utilzase raíz o cociente habría que precisar además lo que ocurre en cada uno de los extremos del intervalo].

b] Puesto que $0<\log\frac{7}{4}=\log(1+\frac{3}{4})=\frac{3}{4}-\frac{9}{32}+\frac{9}{64}-\cdots<\frac{3}{4}$ (por ser el siguiente sumando negativo),
o porque $\frac{7}{4}=1+\frac{3}{4}<e^{3/4}=1+\frac{3}{4}+\cdots$ (todos positivos), la serie **converge** para ese x .

5. Sea $h(x)=\int_{-1}^{x}\operatorname{sen} t^3\,dt$. Calcular: i) $h(1)$, ii) $h'(1)$, iii) $\int_0^1 x h(x)\,dx$ (integrar por partes). [1.4 puntos]

i) $h(1)=\int_{-1}^{1}\operatorname{sen} t^3\,dt=\boxed{0}$, por ser el integrando una función impar: $\operatorname{sen}(-x)^3=-\operatorname{sen} x^3$.

ii) Integrando claramente continuo (y C^∞). Por el TFC, h es derivable y es $h'(x)=\operatorname{sen} x^3$. $\boxed{h'(1)=\operatorname{sen} 1}$.

iii) La función fácil de derivar es h (la primitiva es no calculable). Por eso tomaremos como $dv=x\,dx$:

$$\int_0^1 x h(x)\,dx = \tfrac{x^2}{2}h(x)\Big]_0^1 - \tfrac{1}{2}\int_0^1 x^2 h'(x)\,dx = h(1) - \tfrac{1}{2}\int_0^1 x^2\operatorname{sen} x^3 dx = 0+\tfrac{1}{6}\big[\cos x^3\big]_0^1 = \boxed{\tfrac{\cos 1-1}{6}} .$$

6. Calcular $\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,\sqrt{\operatorname{sen} x}\;dx$. [1.2 puntos]

$$\int_0^{\pi/2}\cos x\big(1-\operatorname{sen}^2 x\big)\sqrt{\operatorname{sen} x}\;dx \overset{x=\operatorname{sen} t}{=} \int_0^1\big(t^{1/2}-t^{5/2}\big)\,dt = \big[\tfrac{2}{3}t^{3/2}-\tfrac{2}{7}t^{7/2}\big]_0^1 = 2\big(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{7}\big)=\boxed{\tfrac{8}{21}} .$$

Elegir entre 7 y 8:

7. Hallar el límite L de $a_n=\frac{e^n-(\operatorname{sen} n)^n}{e^{2n}+e^n+1}$ y razonadamente un N tal que $|a_n-L|<e^{-3}$ si $n\ge N$. [1.2 puntos]

$$a_n=\frac{1-(\operatorname{sen} n)^n e^{-n}}{e^n+1+e^{-n}} \to \boxed{0} \quad \Big(\frac{1-ac\times 0}{\infty+1+0}\Big).$$

$$|a_n-0|=\Big|\frac{e^n-(\operatorname{sen} n)^n}{e^{2n}+e^n+1}\Big| \le \frac{e^n+|\operatorname{sen} n|^n}{e^{2n}+e^n+1} < \frac{e^n+1}{e^{2n}+e^n} = e^{-n}\le e^{-3} \text{ que se cumple si } \boxed{n\ge N=3} .$$

8. Estudiar la convergencia de $\int_2^\infty \operatorname{sen} x\,\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\,dx$. [1.2 puntos]

El integrando no tiene signo definido, con lo que analizaremos su **convergencia absoluta**.
[Los criterios de comparación por desigualdades o por paso al límite se prueban para funciones positivas].

$$\Big|\operatorname{sen} x\,\operatorname{sen}\tfrac{1}{x^2}\Big| \le \operatorname{sen}\tfrac{1}{x^2}\sim\tfrac{1}{x^2} \text{ en el infinito: } \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(1/x^2)}{1/x^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} t^2}{t^2}=1 \text{ (inmediato con Taylor o L'Hôpital).}$$

Como $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge, el mismo carácter lo tiene $\int_2^\infty \operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\,dx \Rightarrow \int_2^\infty \big|\operatorname{sen} x\,\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\big|\,dx$ converge.

Como converge absolutamente, **nuestra integral impropia es convergente**.