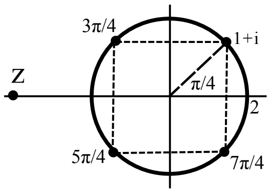
1. Hallar y dibujar las raíces cuartas del complejo $z=\frac{16}{(1-\mathrm{i})^4}$. [1.5 puntos]



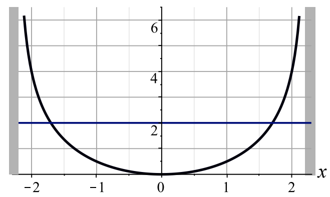
Lo más corto: una raíz clara es $\frac{2}{1-\mathrm{i}}=\frac{2(1+\mathrm{i})}{2}=\boxed{1+\mathrm{i}}$.

Y como las 4 raíces forman un cuadrado las otras 3 deben ser $\boxed{-1\pm\mathrm{i}}$ y $\boxed{1-\mathrm{i}}$.

Calculando z: $(1-\mathrm{i})^4=\left(\sqrt{2}\,e^{-\mathrm{i}\,\pi/4}\right)^4=4\,e^{-\mathrm{i}\,\pi}=-4$, $z=-4=4\,e^{\mathrm{i}\,\pi}\to$

$$\sqrt[4]{z}=\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\,(\pi/4+k\pi/2)}=\boxed{1+\mathrm{i},\ -1+\mathrm{i},\ -1-\mathrm{i},\ 1-\mathrm{i}}.$$

2. Sea $f(x)=x^2\left(5-x^2\right)^{-1/2}$. **a]** Determinar su dominio e intervalos de crecimiento y decrecimiento. **b]** Probar que existe un único $c\in(1,2)$, tal que $f(c)=2$. [1.5 puntos]



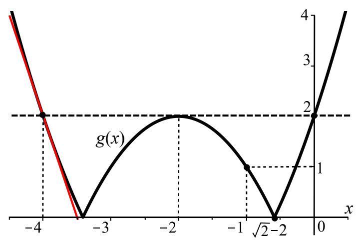
a] Raíz definida si $|x|\le\sqrt{5}$ y denominador 0 si $|x|=\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{dom}=\left(-\sqrt{5},\sqrt{5}\right)}$.

$$f'(x)=2x(5-x^2)^{-1/2}+x^3(5-x^2)^{-3/2}=\frac{x(10-x^2)}{(5-x^2)^{3/2}}\Rightarrow \begin{array}{l} f \textbf{ decrece en } \left(-\sqrt{5},0\right]. \\ f \textbf{ crece en } \left[0,\sqrt{5}\right). \end{array}$$

b] $f(1)=\frac{1}{2}<2<f(2)=4\overset{f\text{ continua}}{\Longrightarrow}\exists c\in(1,2)$ con $f(c)=2$. f crece $\Rightarrow$ c único.

O bien: $f(x)=2\Rightarrow x^4+4x^2-20=0$, $x^2=2\sqrt{6}-2$, $c=\sqrt{2\sqrt{6}-2}\ \begin{array}{l}<\sqrt{6-2}=2\\>\sqrt{4-2}>1\end{array}$

3. Sea $g(x)=\left|x^2+4x+2\right|$. **a]** Hallar los x que satisfacen $g(x)\ge2$ y su recta tangente en $x=-4$. **b]** Hallar los valores máximo y mínimo de g en el intervalo $[-1,0]$. [2 puntos]



Es fácil dar su gráfica dibujando la parábola y reflejando la parte con $y<0$:

a] $g(x)\ge2$ si $x^2+4x+2\ge2\Leftrightarrow x(x+4)\ge0$ o si $x^2+4x+2\le-2\Leftrightarrow(x+2)^2\le0$.

Por tanto, los x pedidos son los del conjunto $\boxed{(-\infty,-4]\cup\{-2\}\cup[0,\infty)}$.

En $x=-4$ la expresión de g es x^2+4x+2. $g'(-4)=2x+4\big|_{x=-4}=-4$.

$g(-4)=2$. Recta tangente $y=2-4(x+4)$, $\boxed{y=-4x-14}$.

b] $g'=0$ si $x=-2$ (fuera). Los extremos se darán o en los extremos del intervalo o en el punto sin derivada.

Valor mínimo $g\left(\sqrt{2}-2\right)=\boxed{0}$ $\left[g(x)=0 \text{ si } x=-2\pm\sqrt{2}\right]$. **Valor máximo** $g(0)=\boxed{2}>1=g(-1)$.

4. Precisar si converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n-n^2}$. [1.5 puntos]

Por ser n^2 menor que las potencias, comparamos por paso al límite con la geométrica convergente $\sum\left(\frac{2}{3}\right)^n$:

$\frac{a_n}{(2/3)^n}=\frac{1}{1-n^2/3^n}\to1$ (sabemos de clase que $n^a/b^n\to0$, si $b>1$). La nuestra también **converge**.

O aplicando el criterio del cociente: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{3^n-n^2}{3^{n+1}-(n+1)^2}=2\,\frac{1-n^2/3^n}{3-(n+1)^2/3^n}\to\frac{2}{3}<1\Rightarrow$ **converge**.

O también el de la raíz: $\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{2}{\sqrt[n]{3^n-n^2}}=\frac{2}{3\sqrt[n]{1-n^2 3^{-n}}}\to\frac{2}{3}<1\Rightarrow$ **converge**.

[No basta decir, como habéis dicho varios, que como n^2 es más pequeño lo quitamos. Es el mismo falso argumento que llevaría a decir que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to1$ o que $\sqrt{n^4+n^3}-n^2\to0$].

5. Hallar razonadamente los límites de $h(x)=\dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt-\operatorname{sen}x}{x^3 e^{3x}}$ cuando x tiende a: i) 0, ii) ∞. [2 puntos]

i) $\frac{0}{0}$. Podemos empezar directamente por Taylor o empezar por L'Hôpital y seguir por Taylor:

$$\int_0^x e^{t^2}dt=\int_0^x\left(1+t^2+\tfrac{1}{2}t^4+\cdots\right)dt=x+\tfrac{1}{3}x^3+\cdots\ \to\ h(x)=\frac{x+\frac{1}{3}x^3+\cdots-x+\frac{1}{6}x^3+\cdots}{x^3+\cdots}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}=\boxed{\tfrac{1}{2}}.$$

$$\overset{L'H}{\to}\frac{e^{x^2}-\cos x}{3(x^2+x^3)\,e^{3x}}=\frac{1+x^2+\cdots-1+\frac{1}{2}x^2+\cdots}{3x^2+\cdots}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{3/2}{3}=\boxed{\tfrac{1}{2}}.$$ [Seguir con L'H es más largo].

ii) El numerador tiende a ∞ por ser claramente divergente la impropia $\int_0^\infty e^{t^2}dt$ y estar $\operatorname{sen}x$ acotado.
Como el denominador también tiende obviamente a infinito, podemos aplicar L'Hôpital:

$\overset{L'H}{\to}\dfrac{e^{x^2-3x}}{3(x^2+x^3)}-\dfrac{\cos x}{3(x^2+x^3)\,e^{3x}}$, donde el segundo sumando ($\frac{acot.}{\infty}$) tiende a 0. Seguimos con L'H:

$\overset{L'H}{\to}\dfrac{(2x-3)\,e^{x^2-3x}}{9x^2+6x}\overset{L'H}{\to}\dfrac{4x^2+\cdots}{18x+6}\,e^{x^2-3x}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\boxed{\infty}$, por hacerlo cada uno de los factores.

Elegir entre 6 y 6*:

6. Calcular $\displaystyle\int_0^1 x^2\operatorname{ch}x\,dx$ y probar que es mayor que $\frac{7}{20}$. [1.5 puntos]

Pide claramente usar partes: $\int x^2\operatorname{ch}x\,dx=x^2\operatorname{sh}x-2\int x\operatorname{sh}x\,dx=x^2\operatorname{sh}x-2x\operatorname{ch}x+2\int\operatorname{ch}x\,dx$.

$$\int_0^1=x^2\operatorname{sh}x-2x\operatorname{ch}x+2\operatorname{sh}x\Big]_0^1=\boxed{3\operatorname{sh}1-2\operatorname{ch}1}=\frac{3e-3e^{-1}-2e-2e^{-1}}{2}=\frac{e-5e^{-1}}{2}>\frac{2{,}7-5/2{,}5}{2}=\frac{7}{20}.$$

O bien, $\int_0^1\left[x^2+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{24}x^6+\cdots\right]dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\cdots>\frac{13}{30}>\frac{7}{20}$, por ser todos los sumandos positivos.

6*. Precisar si converge la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^3x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}x}}\,dx$. [1.5 puntos]

La única impropiedad está en 0^+, único punto del intervalo en que se anula el denominador.
Como en $x=0$ el $\cos x$ se comporta como la constante 1 y el $\operatorname{sen}x$ como x la integral va a tener el mismo carácter que la convergente $\int_{0^+}^1\frac{dx}{x^{1/3}}$ y ella misma va a converger. Es decir:

$\dfrac{f(x)}{x^{-1/3}}=\cos^3x\sqrt[3]{\dfrac{x}{\operatorname{sen}x}}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}1$ e $\int_{0^+}^1\frac{dx}{x^{1/3}}$ convergente $\Rightarrow$ la impropia propuesta **converge**.

De hecho se puede hallar la primitiva (similar a la pedida en febrero), comprobar la convergencia y dar su valor:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{(1-\operatorname{sen}^2x)\cos x}{(\operatorname{sen}x)^{1/3}}\,dx=\int_0^{\pi/2}\left[(\operatorname{sen}x)^{-1/3}-(\operatorname{sen}x)^{5/3}\right]\cos x\,dx=\tfrac{3}{2}(\operatorname{sen}x)^{2/3}-\tfrac{3}{8}(\operatorname{sen}x)^{8/3}\Big]_0^{\pi/2}=\tfrac{9}{8}.$$