Soluciones del examen final de febrero de Matemáticas (parte 1)

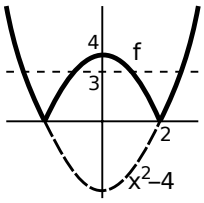
1. Sea $f(x)=\arctan\left[x-\log(2-x)\right]$. Determinar su dominio y hallar $f'(1)$. [1 punto]

$$\boxed{\operatorname{dom} f=(-\infty,2)}\,.\quad f'(x)=\frac{1+\frac{1}{2-x}}{1+[x-\log(2-x)]^2}\Rightarrow f'(1)=\frac{1+1}{1+[1-0]}=\boxed{1}\,.$$

2. Hallar razonadamente (si existe) el límite de la sucesión $a_n=\dfrac{n^2\operatorname{sen}\frac{3}{n}}{\sqrt{4n^2+9}}$. [1.5 puntos]

$$a_n=\frac{3}{\sqrt{4+\frac{9}{n^2}}}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{3}{n}}{\frac{3}{n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{3}{\sqrt{4}}\cdot 1=\boxed{\frac{3}{2}}\,,\ \text{pues la sucesión } \left\{\frac{3}{n}\right\}\to 0\,,\ \text{y la función } \frac{\operatorname{sen}x}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1\,.$$

3. Sea $f(x)=\left|x^2-4\right|$. **a]** Precisar los x tales que $f(x)<3$. **b]** Hallar, si existen, $f'(-3)$ y $f'(2)$. [3 puntos]



a] $\left|x^2-4\right|<3\ \Leftrightarrow\ -3<x^2-4<3\ \Leftrightarrow\ 1<x^2<7\ \Leftrightarrow\ \boxed{1<|x|<\sqrt{7}}$.

b] $f(x)=\begin{cases}x^2-4, & \text{si } |x|\geq 2\\ 4-x^2, & \text{si } |x|\leq 2\end{cases}\ \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x, & \text{si } |x|>2\\ -2x, & \text{si } |x|<2\end{cases}\ \Rightarrow$

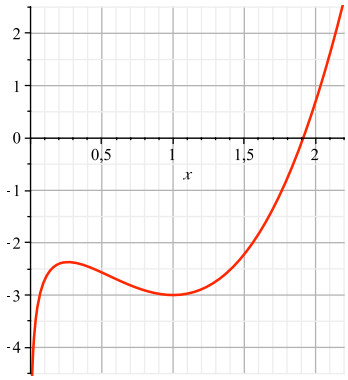
$$\boxed{f'(-3)=-6}\,.\ f'(2^-)=-4\,,\ f'(2^+)=4\Rightarrow\boxed{\nexists f'(2)}\,.$$

4. Sea $f(x)=x^3-4x+\log x$. **a]** Determinar, si existen, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$. **b]** Hallar los puntos en los que se anulan f' y f''. **c]** Dibujar aproximadamente la gráfica de f y precisar cuántas veces se anula $f(x)$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2},2\right]$. [4.5 puntos]

a] $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0-0-\infty=-\infty$ $\left[\lim\limits_{x\to 0^-}f\ \text{no existe, pues } \operatorname{dom}f=(0,\infty)\right]$. $f(x)=x^3\left[1-\frac{4}{x^3}+\frac{\log x}{x^3}\right]\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\infty$.

b] $f'(x)=3x^2-4+\frac{1}{x}=\frac{3x^3-4x+1}{x}=\frac{(x-1)(3x^2+3x-1)}{x}$. $f''(x)=6x-\frac{1}{x^2}=\frac{6x^3-1}{x^2}$.

$f'=0$ si $x=1$, $x=\frac{-3+\sqrt{21}}{6}\begin{array}{l}<\frac{-3+5}{6}=\frac{1}{3}\\ >\frac{-3+4}{6}=\frac{1}{6}\end{array}$ $\left[\frac{-3-\sqrt{\ }}{6}\notin\operatorname{dom}f\right]$. $f''=0$ si $x=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$.



c] f crece hasta el $x^*\in\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$, con $f(x^*)=x^*(x^{*2}-4)+\log x^*<0$ (neg+neg), luego decrece hasta $x=1$ $\left[f(1)=-3\right]$, cambiando de concavidad por el camino, y a continuación crece tendiendo a infinito.

Que la función se anula alguna vez en $\left(\frac{1}{2},2\right)$ es inmediato por Bolzano: $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{8}-\log 2<0$, $f(2)=\log 2>0$ y f continua en el cerrado.

Y que **se anula exactamente 1 vez** es consecuencia del crecimiento analizado y plasmado en la gráfica.

Soluciones del examen final de febrero de Matemáticas (parte 2)

1. Sea $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$. Determinar para qué $x\in\mathbf{R}$ converge la serie anterior. ¿Converge para los mismos x la serie de f'? ¿Qué función es f'? [3 puntos]

Cociente: $\frac{n}{n+1}\frac{2^n}{2^{n+1}}\frac{|x|^{n+1}}{|x|^n}\to\frac{|x|}{2}\Rightarrow$ converge si $|x|<2$, diverge si $|x|>2$ ($R=2$ radio de convergencia). Para $x=2$ queda la serie divergente $\sum\frac{1}{n}$.

La de $x=-2$, $\sum\frac{(-1)^n}{n}$, está claro que converge por Leibniz, ya que $a_n=\frac{1}{n}\to 0$ y decrece claramente.

Por tanto, la serie converge exactamente para $\boxed{-2\le x<2}$.

La serie derivada de una serie de potencias sabemos seguro que converge en $|x|<R=2$, aunque puede ser divergente en extremos en los que antes convergía. De hecho, en este caso:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}$$ es una serie geométrica que converge exactamente si $\boxed{-2<x<2}$ (no lo hace en ningún extremo del intervalo de convergencia).

Podemos, además, hallar su suma para esos valores: $f'(x)=\left[\frac{\text{primer término}}{1-\text{razón}}\right]=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\boxed{\frac{1}{2-x}}$.

2. **a]** Estudiar si converge la integral impropia $\int_0^{\infty}\left[1+t^3\right]^{-1/2}dt$.

b] Si $f(x)=\frac{\int_0^{x^2}\left[1+t^3\right]^{-1/2}dt-\operatorname{sen}x^2}{x^6}$, hallar $\lim_{x\to\infty}f(x)$ y $\lim_{x\to 0}f(x)$. [4 puntos]

a] Sólo es impropia en ∞, donde se comporta como la convergente $\int^{\infty}\frac{dt}{t^{3/2}}$: $\frac{1/\left[1+t^3\right]^{1/2}}{1/t^{3/2}}=\frac{1}{\left[t^{-3}+1\right]^{1/2}}\xrightarrow[t\to\infty]{}1$.

Por el criterio de comparación por paso al límite la impropia es, pues, **convergente**.

b] Como la impropia anterior converge, la integral del numerador, cuando $x\to\infty$, tiende hacia un número finito; y como el seno esta acotado y el denominador $\to\infty$, deducimos que $\lim_{x\to\infty}f(x)=\boxed{0}$.

Para el límite en 0 podemos utilizar Taylor desde un principio:

$$\left[1+t^3\right]^{-1/2}=1-\tfrac{1}{2}t^3+\cdots\Rightarrow\int_0^{x^2}=\left[t-\tfrac{1}{8}t^4+\cdots\right]_0^{x^2}=x^2-\tfrac{1}{8}x^8+\cdots$$
$$\operatorname{sen}x^2=x^2-\tfrac{1}{6}x^6+\cdots$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{8}x^8+o(x^8)}{x^6}\xrightarrow[x\to 0]{}\boxed{\frac{1}{6}}.$$

Podemos también aplicar L'Hôpital (y el TFC) una vez $\left(\text{es }\frac{0}{0}\right)$ y seguir por Taylor:

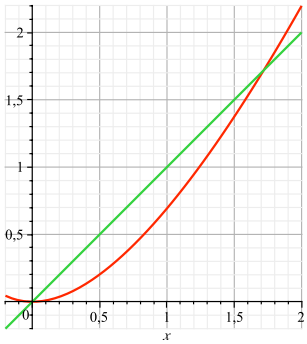
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x[1+x^6]^{-1/2}-2x\cos x^2}{6x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{[1+x^6]^{-1/2}-\cos x^2}{3x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^6+\cdots-1+\frac{1}{2}x^4-\cdots}{3x^4}=\boxed{\frac{1}{6}}.$$

O seguir con L'H: $\cdots=\lim_{x\to 0}\frac{-3x^5[1+x^6]^{-3/2}+2x\operatorname{sen}x^2}{12x^3}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-x^2[1+x^6]^{-3/2}}{4}+\frac{\operatorname{sen}x^2}{6x^2}\right]=\boxed{\frac{1}{6}}$.

4. Sea $f(x)=x\log(1+x)$. **a]** Hallar una primitiva de f. [3 puntos]
b] Calcular el área de la región acotada encerrada entre la gráfica de f y la recta $y=x$.

a] $\int f\underset{\text{partes}}{=}\frac{x^2}{2}\log(1+x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1+1}{1+x}dx=\boxed{\frac{x^2-1}{2}\log(1+x)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}}$.

b] f y la recta se cortan si $x=0$ o si $\log(1+x)=1\Leftrightarrow x=\mathrm{e}-1$.

En el intervalo $[0,\mathrm{e}-1]$ la gráfica de f está por debajo de la recta, pues $1<1+x<\mathrm{e}\Rightarrow 0<\log(1+x)<1$. Por tanto:

$$\text{Área}=\int_0^{\mathrm{e}-1}\left[x-f(x)\right]dx=\left[\frac{3x^2}{4}-\frac{x}{2}-\frac{x^2-1}{2}\log(1+x)\right]_0^{\mathrm{e}-1}$$
$$=\frac{3(\mathrm{e}-1)^2}{4}-\frac{\mathrm{e}-1}{2}-\frac{(\mathrm{e}-1)^2-1}{2}=\boxed{\frac{\mathrm{e}^2-4\mathrm{e}+5}{4}}=\frac{(\mathrm{e}-2)^2+1}{4}>0.$$