Matemáticas (grupos B, C, D y E) **Soluciones del primer parcial del final** (7 de febrero de 2011)

1. Sea $f(x)=\sqrt{16-|9-x^2|}$. Hallar su dominio. Hallar $f'(4)$. [2.5 puntos]

2. Hallar (si existe) el límite de la sucesión $a_n=\dfrac{\log(e^n+n^3)}{\sqrt{4n^2-1}}$. [2 puntos]

3. **a]** Estudiar cuántas veces se anula el polinomio $P(x)=4x^4-12x^2+3$ en el intervalo $[0,2]$. [2 puntos]
b] Sea $f(x)=(2x^2-1)e^{-x^2}$. Calcular f' y f''. Estudiar asíntotas, y crecimiento y decrecimiento de f .
Hallar los valores máximo y mínimo de f en el intervalo $[1,2]$. Dibujar su gráfica. [3.5 puntos]

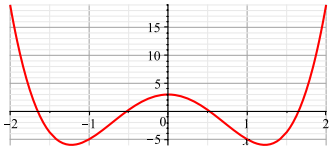
1. Definida si $|9-x^2|\le 16 \Leftrightarrow -16\le 9-x^2\le 16 \Leftrightarrow -7\le x^2\le 25 \Leftrightarrow |x|\le 5$. Así pues, $\boxed{\operatorname{dom} f=[-5,5]}$.

$$|9-x^2|=\begin{cases} x^2-9, & |x|\ge 3\\ 9-x^2, & |x|\le 3\end{cases} \Rightarrow f(x)=\sqrt{25-x^2},\ f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \text{ si } |x|>3 \Rightarrow \boxed{f'(4)=-\tfrac{4}{3}}.$$

2. $a_n=\dfrac{\log[(1+n^3e^{-n})e^n]}{\sqrt{4n^2-1}}=\dfrac{\log(1+n^3e^{-n})}{\sqrt{4n^2-1}}+\dfrac{n}{\sqrt{4n^2-1}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\boxed{\tfrac{1}{2}}$, pues $\begin{matrix}\log(1+n^3e^{-n})\to\log(1+0)=0\\ \sqrt{4n^2-1}\to\infty\end{matrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{4-1/n^2}}\to\tfrac{1}{2}$.

$\Big[$Más largo con L'Hôpital para la función $f(x)=\dfrac{\log(e^x+x^3)}{\sqrt{4x^2-1}}\to\dfrac{\frac{e^x+3x^2}{e^x+x^3}}{\frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}}=\dfrac{1+3x^2e^{-x}}{1+x^3e^{-x}}\dfrac{4}{\sqrt{4-x^{-2}}}\to\tfrac{1}{2}\Rightarrow f(n)=a_n\to\tfrac{1}{2}\Big]$.

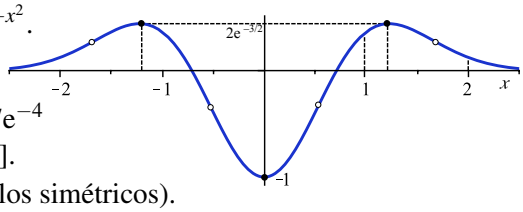
3. **a]** $P(0)=3$, $P(1)=-5$ y $P(2)=19 \overset{\text{T. Bolzano}}{\Longrightarrow} P$ se anula en $[0,1]$ y en $[1,2]$.



$P'(x)=8x(2x^2-3)\Rightarrow \begin{matrix}\text{decrece en } [0,\sqrt{3/2}\,]\\ \text{crece en } [\sqrt{3/2},\infty)\end{matrix}$, $P(\sqrt{3/2}\,)=-6\Rightarrow$ sólo $\boxed{2}$ veces.

O hallando raíces: $x^2=\frac{3\pm\sqrt{6}}{2}\ \begin{matrix}>0\\<3<4\end{matrix}\Rightarrow x_{1,2}\in(0,2)$ [y las simétricas $x_{3,4}<0$].

b] f es par. $f'(x)=2x(3-2x^2)e^{-x^2}$. $f''(x)=2(4x^4-12x^2+3)e^{-x^2}$.



$f(x)\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}0$. f crece en $(-\infty,-\sqrt{3/2}\,]$ y en $[0,\sqrt{3/2}\,]$.

Valor máximo en $[1,2]$: $f(\sqrt{3/2}\,)=2e^{-3/2}$. Mínimo: $f(2)=7e^{-4}$
[menor que en el otro extremo $f(1)=e^{-1}$ pues $e^3>2^3>7$].

Según **a]** hay un punto de inflexión en $[0,1]$ y otro en $[1,2]$ (y los simétricos).

Matemáticas (grupos B, C, D y E) **Soluciones del segundo parcial del final** (7 de febrero de 2011)

1. Determinar para qué valores de x converge la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^nx^{2n}}{1+n^2}$. [2.5 puntos]

2. Sea $F(x)=\displaystyle\int_1^x \arctan(e^t)\,dt$. **a]** Hallar $F'(0)$ y estudiar si F es inyectiva en todo **R**.
b] Precisar si $F(0)$ es positiva o negativa. [2.5 puntos]

3. Hallar $\displaystyle\int_0^4\frac{\sqrt{x}}{x+4}\,dx$. [2.5 puntos]

4. **a]** Hallar los 2 primeros términos no nulos del desarrollo de Taylor de $f(x)=e^x\log(1+2x)$ en $x=0$.
b] Precisar si converge la integral impropia $\displaystyle\int_0^1\frac{e^x\log(1+2x)}{x^2}\,dx$. [2.5 puntos]

1. $\dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|}=\dfrac{2^{n+1}}{2^n}\dfrac{|x|^{2n+2}}{|x|^{2n}}\dfrac{1+n^2}{2+2n+n^2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}2|x|^2\Rightarrow \begin{matrix}\text{converge si } |x|<1/\sqrt{2}\\ \text{diverge si } |x|>1/\sqrt{2}\end{matrix}$. $\Big[\sqrt[n]{|b_n|}=\dfrac{2|x|^2}{[n^{1/n}]^2[1+1/n^2]^{1/n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}2|x|^2\Big]$.

Si $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ queda $\sum\frac{1}{n^2+1}$ que converge, pues $\frac{1/(n^2+1)}{1/n^2}\to 1$ y $\sum\frac{1}{n^2}$ converge. $\boxed{x\in\big[-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big]}$.

2. **a]** Integrando continuo $\forall x \overset{\text{TFC}}{\Rightarrow} F'(x)=\arctan(e^x)\ \forall x$, $\boxed{F(0)=\frac{\pi}{4}}$.

$e^x>0\ \forall x\Rightarrow \arctan(e^x)>0\ \forall x\Rightarrow F$ es estrictamente creciente en **R** $\Rightarrow F$ es **inyectiva** en todo **R** .

b] $F(0)=\int_1^0=-\int_0^1$. Como el integrando es positivo (en todo **R**), la $\int_0^1>0$ y, por tanto, $\boxed{F(0)<0}$.
[O porque F estrictamente creciente y $F(1)=0$].

3. $t=\sqrt{x}$, $dx=2t\,dt$, $\begin{matrix}x=0\to t=0\\ x=4\to t=2\end{matrix}\to\displaystyle\int_0^2\frac{2t^2+8-8}{4+t^2}\,dt=4-4\int_0^2\frac{1/2}{1+(t/2)^2}\,dt=4-4\big[\arctan\tfrac{t}{2}\big]_0^2=\boxed{4-\pi}$.

4. **a]** $e^x\log(1+2x)=\big[1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots\big]\big[2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3+\cdots\big]=2x+[2-2]x^2+[1-2+\frac{8}{3}]x^3+\cdots=\boxed{2x+\frac{5}{3}x^3+\cdots}$.

b] Impropia en 0 , con el mismo carácter que la divergente $\int_{0^+}\frac{dx}{x}$: $\dfrac{f(x)/x^2}{1/x}=\dfrac{2x+\cdots}{x}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}2$. La integral **diverge**.