Matemáticas **Primer parcial del final** (9 de febrero de 2012)

1. Sea $f(x)=\sqrt{1-\log|x^2-2|}$. **a]** Determinar su dominio. **b]** Hallar su recta tangente en $x=1$. [3 puntos]

2. Hallar todos los reales x que satisfacen $6\tan x=\operatorname{sen}2x$. [1.5 puntos]

3. Hallar (si existe) el límite de la sucesión $a_n=\dfrac{(n+3)^2\arctan n}{\sqrt{n^4+n\operatorname{sen}n-n^9e^{-n}}}$. [1.5 puntos]

4. Sea $g(x)=\frac{e^x}{x^3+4}$. **a]** Hallar su dominio y los límites cuando $x\to\infty$ y $x\to-\infty$.
b] Estudiar crecimiento y decrecimiento. **c]** Hallar sus valores extremos en $[0,3]$.
d] ¿Se anula g en el intervalo $[-2,0]$? **e]** Esbozar su gráfica. [4 puntos]

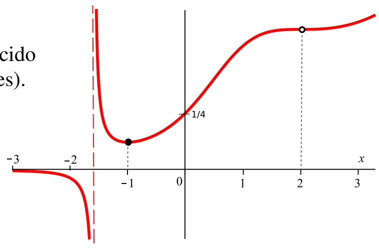
1. a] El logaritmo está definido si $x^2\neq 2$ y la raíz si $\log|x^2-2|\le 1 \Leftrightarrow |x^2-2|\le e \Leftrightarrow \underbrace{2-e}_{<0}\le x^2\le e+2$.

Por tanto, el dominio de f es $\boxed{\left[-\sqrt{2+e},\sqrt{2+e}\,\right]-\{\sqrt2,-\sqrt2\}}$.

b] $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-\log|x^2-2|}}\frac{-2x}{x^2-2}=\frac{x}{(2-x^2)\sqrt{1-\log|x^2-2|}}$. $f(1)=f'(1)=1\Rightarrow$ recta tangente $y=1+1(x-1)$, $\boxed{y=x}$.

2. $\frac{6\operatorname{sen}x}{\cos x}=2\operatorname{sen}x\cos x \Leftrightarrow \frac{2\operatorname{sen}x}{\cos x}[3-\cos^2x]=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}x=0$ ó $\cos^2x=3$ (imposible). $\boxed{x=k\pi}$, $k\in\mathbf{Z}$.

3. $a_n=\dfrac{(1+\frac3n)^2\arctan n}{\sqrt{1+\frac{\operatorname{sen}n}{n^3}-\frac{n^7}{e^n}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\boxed{\frac{\pi}{2}}$, pues sabemos que $\frac{n^a}{e^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.



4. a] dom $g=\boxed{\mathbf{R}-\{-\sqrt[3]{4}\}}$. $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\boxed{0}$ $(\frac{0}{-\infty})$. $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\boxed{\infty}$ (límite conocido o L'H 3 veces).

b] $g'(x)=e^x\frac{x^3-3x^2+4}{(x^3+4)^2}=e^x\frac{(x+1)(x-2)^2}{(x^3+4)^2}\Rightarrow$ g **decrece** en $(-\infty,-\sqrt[3]{4})$ y en $(-\sqrt[3]{4},-1]$ y **crece** en $[-1,\infty)$.

c] Por tanto el valor mínimo es $g(0)=\boxed{\frac14}$ y el máximo es $g(3)=\boxed{\frac{e^3}{31}}$.

d] Evidentemente, nunca se anula. [Aunque $g(-2)=-\frac{e^{-2}}{4}<0<g(0)$ no se puede aplicar Bolzano por no ser g continua].

e] $\lim\limits_{x\to-\sqrt[3]{4}^{\pm}}g(x)=\pm\infty$, $g(-1)=\frac1e$, $g(2)=\frac{e^2}{12}$ y los cálculos anteriores permiten dibujar más o menos la gráfica.

Matemáticas (grupos A, B, C, D y E) **Segundo parcial del final** (9 de febrero de 2012)

1. Precisar para qué x converge: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^nx^{2n}}{n^2\log(n+1)}$. [3 puntos]

2. Sea $f(x)=\frac{\operatorname{sen}x\cos x+\arctan ax}{x^3}$. Discutir según los valores de a el valor del $\lim\limits_{x\to0}f(x)$. [2 puntos]

3. Sea $f(x)=\frac{1}{x^3+3x^2}$. **a]** Hallar una primitiva de f . **b]** Si $G(x)=\int_x^{2x}f(t)\,dt$, hallar $G'(-1)$ y $G(-1)$.
c] Estudiar si convergen $\int_1^\infty f$ e $\int_{-1}^1 f$. [5 puntos]

1. $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}=\frac{9^{n+1}}{9^n}\frac{n^2}{(n+1)^2}\frac{\log(n+1)}{\log(n+2)}\frac{|x|^{2n+2}}{|x|^{2n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}9|x|^2\Rightarrow$ converge si $|x|<1/3$, diverge si $|x|>1/3$. $\left[\frac{\log(x+1)}{\log(x+2)}\overset{L'H}{\to}\frac{1/(x+1)}{1/(x+2)}=\frac{1+\frac1x}{1+\frac2x}\xrightarrow[x\to\infty]{}1\right]$.

Si $x=\pm\frac13$ queda $\sum\frac{1}{n^2\log(1+n)}$ que converge, pues $\frac{1/(n^2\log(1+n))}{1/n^2}\to0$ y $\sum\frac{1}{n^2}$ converge. $\boxed{x\in\left[-\frac13,\frac13\right]}$.

2. $\frac{\frac12\operatorname{sen}2x+\arctan ax}{x^3}=\frac{x-\frac46x^3+\cdots+ax-\frac{a^3}{3}x^3+\cdots}{x^3}=\frac{x(1+a)-(\frac{2+a^3}{3})x^3+\cdots}{x^3}\Rightarrow$ si $a>-1$, $f\to\infty$; si $a<-1$, $f\to-\infty$; si $a=-1$, $f\to-\frac{2-1}{3}=-\frac13$.

3. a] $\frac{1}{x^2(x+3)}=\frac Ax+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+3}=\frac{A(x^2+3x)+B(x+3)+Cx^2}{x^2(x+3)}\Rightarrow B=\frac13$, $A=-\frac19$, $C=\frac19$. $\int f(x)\,dx=\boxed{\frac19\log\left|\frac{x+3}{x}\right|-\frac{1}{3x}}\equiv F(x)$.

b] $b(x)=2x$, $a(x)=x$ derivables y f continua salvo en -3 y $0\Rightarrow G$ derivable en $(-\frac32,0)$ [y en $(-\infty,-3)$ y $(0,\infty)$] y:

$G'(x)=\frac{2}{8x^3+12x^2}-\frac{1}{x^3+3x^2}=-\frac32\frac{x+1}{x^2(2x+3)(x+3)}\Rightarrow G'(-1)=\boxed{0}$. $G(-1)=\int_{-1}^{-2}f=F(x)\Big]_{-1}^{-2}=\boxed{-\frac29\log2-\frac16}$.

c] $\int_1^\infty f$ **converge** pues $\frac{f(x)}{x^{-3}}=\frac{1}{1+\frac3x}\xrightarrow[x\to\infty]{}1$ e $\int^\infty\frac{dx}{x^3}$ lo hace. [Con la primitiva también se ve fácil].

$\int_{-1}^1 f$ tiene una impropiedad en $x=0$. $\int_{0^+}^1 f$ diverge por comportarse como $\int_{0^+}^1\frac{dx}{x^2}$ $\left[\frac{f(x)}{x^{-2}}=\frac{1}{x+3}\xrightarrow[x\to0^+]{}\frac13\right]$

(y lo mismo pasa con $\int_{-1}^{0^-}f$). La integral total $\int_{-1}^1 f$, por tanto, **diverge**. [Con la primitiva es más difícil].