Matemáticas (grupo C) **Soluciones del final de febrero** (11 de febrero de 2015)

1. Hallar (si existe) el límite de la sucesión: $a_n=\sqrt{n}\cos n-n\operatorname{th}n$. [1 punto]

$a_n=n\left[\frac{\cos n}{\sqrt{n}}-\operatorname{th}n\right]\to\boxed{-\infty}$ $\Big(\infty\times[0-1]$, pues $\frac{acot}{\infty}\to 0$ y $\operatorname{th}n=\frac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}=\frac{1-e^{-2n}}{1+e^{-2n}}\to 1\Big)$.

2. Sea $f(x)=2x+\frac{3}{\operatorname{sen}x}$. Hallar todos los reales x tales que i) $f'(x)=0$, ii) $f''(x)=0$. [1 punto]

i) $f'(x)=2-\frac{3\cos x}{\operatorname{sen}^2x}=0$, $2\cos^2x+3\cos x-2=0$, $\cos x=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{1}{2},-2\to\boxed{x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi}$. [$\cos x=-2$ imposible].

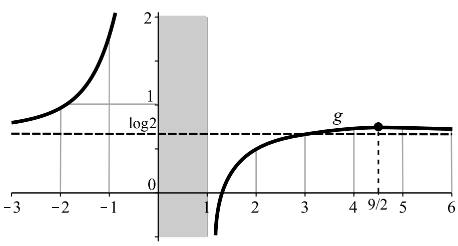
ii) Mejor derivamos como producto, para evitar la aparición de $\operatorname{sen}x$ de más en numerador y denominador:

$$f''(x)=\frac{3}{\operatorname{sen}x}+\frac{6\cos^2x}{\operatorname{sen}^3x}=3\frac{\operatorname{sen}^2x+2\cos^2x}{\operatorname{sen}^3x}=3\frac{1+\cos^2x}{\operatorname{sen}^3x}\neq 0$$. **No se anula** f'' para ningún x.

3. Sea $g(x)=\log\left(2+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)$. **a]** Determinar su dominio y sus asíntotas. **b]** Hallar sus valores extremos en $[3,6]$. **c]** Precisar cuántas veces se anula g en su dominio. [1.8 puntos]

a] $\frac{2x^3+x-3}{x^3}=\frac{(x-1)\overset{>0}{(2x^2+2x+3)}}{x^3}>0\Rightarrow \operatorname{dom}g=\boxed{(\overset{-/-}{-\infty,0})\cup(\overset{+/+}{1,\infty})}$.

$g(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}\log 2$. $g(x)\xrightarrow[x\to 1^+]{}-\infty$ $\big[\log(+0)\big]$. $g(x)\xrightarrow[x\to 0^-]{}\infty$ $\big[\log\infty\big]$.



b] $g'(x)=\frac{-2/x^3+9/x^4}{2+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=\frac{9-2x}{x(x-1)(2x^2+2x+3)}\Rightarrow$ crece en $(-\infty,0)$ y $\left(1,\frac{9}{2}\right]$ y decrece en $\left[\frac{9}{2},\infty\right)$.

Valor **máximo** $g\left(\frac{9}{2}\right)=\log\frac{490}{243}$. Valor **mínimo** $g(3)=\log 2<g(6)$.

c] Viendo la gráfica: g estrictamente creciente en $(1,3]$, $g\xrightarrow[x\to 1^+]{}-\infty$ y $g(3)>0\Rightarrow 1$ **único cero** en $(1,3)$.

$g(x)=0\Leftrightarrow 2+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}=1\Leftrightarrow P(x)=x^3+x-3=0$ también implica único corte pues $P'(x)=3x^2+1\Rightarrow$ P creciente, $P(1)=-1$, $P(2)=7\Rightarrow$ único cero de P en $(1,2)$ (dentro del dominio).

4. Precisar para qué x converge la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)!\,x^{3n}}{(2n)!}$. [1 punto]

Cociente: $\frac{(n+2)!}{(n+1)!}\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\frac{|x|^{3n+3}}{|x|^{3n}}=\frac{n+2}{(2n+2)(2n+1)}|x|^3=\frac{1+2/n}{(2+2/n)(2n+1)}|x|^3\xrightarrow[n\to\infty]{}0\Rightarrow$ **converge** $\forall x\in\mathbf{R}$.

5. Sea $g(x)=\frac{x}{e^x-1}$, $g(0)=1$. Hallar, si existe, $g'(0)$. [1 punto]

Es fácil comprobar que es continua en $x=0$ $\left[\frac{x}{1+x+\cdots-1}\xrightarrow[x\to 0]{}1\right]$.

Podemos calcular $g'(0)$ con la definición: $\frac{h/(e^h-1)-1}{h}=\frac{1+h-e^h}{h(e^h-1)}=\frac{-h^2/2+\cdots}{h^2+\cdots}\xrightarrow[h\to 0]{}\boxed{-\frac{1}{2}=g'(0)}$.

O hallando la serie de Taylor de $g(x)=\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\cdots}=1-\frac{x}{2}+\cdots$ (cociente o composición) $\Rightarrow -\frac{1}{2}=g'(0)$.

$\Big[$Más largo es calcular (usando Taylor o L'Hôpital) el límite cuando $x\to 0$ de la derivada $g'(x)=\frac{e^x(1-x)-1}{(e^x-1)^2}\Big]$.

$\Big[$Recordemos que puede no existir ese límite y ser derivable la función, que hay funciones que son derivables y no $C^1\Big]$.

6. Calcular $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\int_x^{2x} \operatorname{sen} t^2\, dt}{x^3}$. [1 punto]

Se puede utilizar L'Hôpital $\left(\frac{0}{0}\right)$, derivando mediante el TFC: $\frac{2\operatorname{sen}4x^2-\operatorname{sen}x^2}{3x^2} = \frac{7x^2+\cdots}{3x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \boxed{\frac{7}{3}}$.

O continuando con L'Hôpital: $\frac{16x\cos 4x^2-2x\cos x^2}{6x} = \frac{8\cos 4x^2-\cos x^2}{3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{7}{3}$.

O hallar directamente el desarrollo de su numerador integrando Taylor: $\displaystyle\int_x^{2x} \left[t^2-\tfrac{1}{6}t^6+\cdots\right] dt = \tfrac{8}{3}x^3-\tfrac{1}{3}x^3+\cdots$

7. Calcular $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x+x^3}$. [1 punto]

Descomponemos en fracciones simples: $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A+Ax^2+Bx^2+Cx}{x(1+x^2)} \to A=1\,, C=0\,, B=-A=-1$.

$\displaystyle\int_{-3}^{-2}\left[\tfrac{1}{x}-\tfrac{x}{1+x^2}\right]dx = \left[\log|x|-\tfrac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_{-3}^{-2} = \log 2-\log 3-\tfrac{1}{2}\log 5+\tfrac{1}{2}\log 10 = \boxed{\tfrac{3}{2}\log 2-\log 3}$.

8. Estudiar si converge $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+e^{x^2}}$. [1 punto]

Sólo es impropia en ∞ . Se puede ver que es **convergente** de varias formas. Por ejemplo:

Por desigualdades: $\frac{x}{1+e^{x^2}} \le x e^{-x^2} \Rightarrow \int_0^\infty f \le \left[-\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^\infty = \tfrac{1}{2}$.

Comparando por paso al límite con la convergente $\int^\infty \frac{1}{x^2}$: $\frac{f}{1/x^2} = \frac{x^3}{1+e^{x^2}} \overset{L'H}{\to} \frac{3x^2}{2xe^{x^2}} = \frac{3x}{2e^{x^2}} \overset{L'H}{\to} \frac{3}{4xe^{x^2}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\left(\text{O comparando con } \int^\infty e^{-x}dx \text{ o con otras}\right)$.

O incluso hallando la primitiva: $\overset{t=x^2}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+e^t} \overset{e^t=u}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\int\frac{du}{u(1+u)} = \frac{\log u-\log(1+u)}{2} = \frac{x^2-\log(1+e^{x^2})}{2}$, $\int_0^\infty f = \frac{1}{2}\log 2$.

Elegir entre 9 y 9*

9. Sean las rectas que pasan por el punto $(1,4)$ y que cortan los ejes coordenados en puntos $(a,0)$ y $(0,b)$ con $a,b>0$. ¿Para cuál de ellas la suma $a+b$ es la menor? [1.2 puntos]

Rectas por $(1,4)$ y pendiente negativa: $y=4+m(x-1)$, $m\in(-\infty,0)$.

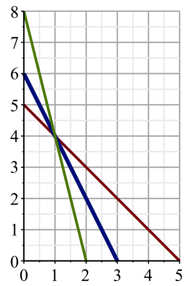
Cortan los ejes en los puntos $\left(1-\frac{4}{m},0\right)$ y $(0,4-m)$. Debemos minimizar:

$S(m)=5-\frac{4}{m}-m$. $S'=\frac{4}{m^2}-1=\frac{4-m^2}{m^2}$. Mínimo si $m=-2$, recta $\boxed{y=6-2x}$, suma 9 .

O bien $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, pasando por $(1,4)$: $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1$, $a=\frac{b}{b-4}$, $b>4$.

Minimizamos $S(b)=b+\frac{b}{b-4}$: $S'(b)=1-\frac{4}{(b-4)^2}=0$, $(b-4)^2=4$, $b=6\,,a=3$.

$[b=2\,,a=-1]$



9*. Sea $f(x)=\left|49-x^2\right|$. Hallar su recta tangente en $x=-1$ y hallar el área de la menor región limitada por la gráfica de f y esa recta tangente. [1.2 puntos]

$f(x)=\begin{cases} 49-x^2\,, & |x|\le 7 \\ x^2-49\,, & |x|\ge 7 \end{cases} \to f'(-1)=2$, recta tangente: $\boxed{y=50+2x}$.

La tangente corta x^2-49 si $x^2-2x-99=0 \to x=-9$ (y $x=11$).

Área $= \int_{-9}^{-7}(99+2x-x^2)\,dx+\int_{-7}^{-1}(1+2x+x^2)\,dx = \boxed{\frac{328}{3}}$.