Soluciones del examen final de septiembre de 2010 de Matemáticas (B,C,D)

parte 1

1a. Hallar (si existe) el límite de la sucesión $a_n = n\,\mathrm{e}^{\cos n}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{n^2}$.

1b. Probar que $f(x)=\log\left|x+\frac{1}{2}\right|+x$ se anula en $[0,1]$. Precisar cuántos ceros tiene en $[0,\infty)$.

2. Sea $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}$. Hallar su dominio y los x tales que $f''(x)=0$.

3. Sea $f(x)=(2x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$. **i]** Hallar sus límites en $\pm\infty$. **ii]** Precisar en qué intervalos crece y decrece f . **iii]** Localizar los puntos de inflexión. **iv]** Dibujar aproximadamente la gráfica de f .

3*. Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de la f del problema 3 en el intervalo $[0,2]$.

parte 2

4. Sea $f(x)=(2x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$. Hallar el área de la región limitada por los ejes y la gráfica de f . Decidir si converge la integral $\int_1^\infty f$.

5. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x\cos x-\arctan x}{\log(1+x^3)}$.

6a. Determinar la convergencia de las series: **i]** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n^{100}}{(n-1)!}$, **ii]** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7-\mathrm{sen}\,n}{\sqrt{n^3+n}}$.

6b. Sea $F(x)=\int_{\mathrm{sen}\,x}^{1}\frac{\arctan t}{1+t^4}\,dt$. Hallar $F'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ y $F\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

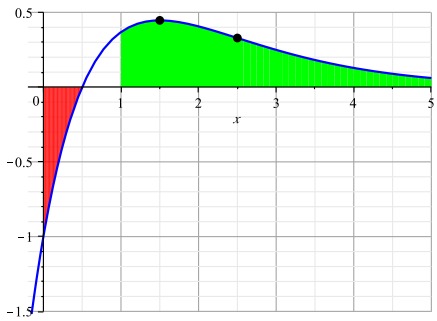
8. Hallar $\int_0^1\frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

1a. $a_n=\frac{\mathrm{e}^{\cos n}}{n}\frac{\mathrm{sen}(1/n^2)}{1/n^2}\to\frac{ac}{\infty}\cdot 1=0$, pues $\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\underset{x\to 0}{\to}1$ y la sucesión $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}\to 0$.

1b. f continua en $[0,1]$ $\left(\text{lo es en } \mathbf{R}-\{-\frac{1}{2}\}\right)$ y $f(0)=\log\frac{1}{2}<0$, $f(1)=\log\frac{3}{2}+1>0\Rightarrow f$ se anula en $(0,1)$.
$f'(x)=\frac{2}{2+x}+1>0$ en $[0,\infty)\Rightarrow f$ es estrictamente creciente y lo hace 1 única vez.

2. $\mathrm{dom}\,f=(-2,2)$. $f'(x)=(4-x^2)^{-1/2}+(x^2+x)(4-x^2)^{-3/2}=\frac{4+x}{(4-x^2)^{3/2}}$.
$f''(x)=x(4-x^2)^{-3/2}+(2x+1)(4-x^2)^{-3/2}+(3x^3+3x^2)(4-x^2)^{-5/2}=\frac{2(x^2+6x+2)}{(4-x^2)^{5/2}}=0\to x=-3+\sqrt{7}$ $(-- \notin \mathrm{dom})$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x}{\mathrm{e}^x}-\mathrm{e}^{-x}\right]=0$ (conocido o por L'H), $\lim\limits_{x\to-\infty}f=(-\infty)\infty=-\infty$.
$f'(x)=(3-2x)\mathrm{e}^{-x}\Rightarrow f$ crece en $(-\infty,\frac{3}{2}]$ y decrece en $[\frac{3}{2},\infty)$.
$f''(x)=(2x-5)\mathrm{e}^{-x}\Rightarrow x=\frac{5}{2}$ inflexión. $f(\frac{5}{2})=\frac{5}{\mathrm{e}^{5/2}}$.
$f(0)=-1$, $f(\frac{1}{2})=0$, $f(1)=\frac{1}{\mathrm{e}}$, $f(\frac{3}{2})=\frac{2}{\mathrm{e}^{3/2}}$, $f(2)=\frac{3}{\mathrm{e}^2}$.



3*. $f(\frac{3}{2})$ valor máximo (antes crece y luego decrece). $f(0)$ mínimo.
[Sin crecimiento: $f(0)<0<f(2)<f(\frac{3}{2})$ pues $\mathrm{e}^{1/2}>\frac{3}{2}\Leftrightarrow \mathrm{e}>\frac{9}{4}$].

4. $\int f(x)\,dx=(1-2x)\mathrm{e}^{-x}+2\int\mathrm{e}^{-x}dx=-(1+2x)\mathrm{e}^{-x}$.
Área $=-\int_0^{1/2}f=\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}-1$. $\int_1^\infty f=3\mathrm{e}^{-1}-\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x)\,\mathrm{e}^{-x}=3\mathrm{e}^{-1}$ $\left[\text{ó } \frac{f(x)}{1/x^2}=\frac{2x^3-x^2}{\mathrm{e}^x}\underset{\infty}{\to}0 \text{ e } \int^\infty\frac{1}{x^2} \text{ convergente}\right]$.

5. $\frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2x-\arctan x}{\log(1+x^3)}=\frac{x-\frac{4}{6}x^3-\cdots-x+\frac{1}{3}x^3+\cdots}{x^3+\cdots}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\frac{1}{3}$ $\left[\overset{\text{L'H}}{\to}(1+x^3)\frac{\cos 2x-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}\overset{\text{L'H}}{\to}-\frac{2\,\mathrm{sen}\,2x}{3\cdot 2x}+\frac{2}{6(1+x^2)^2}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\frac{1}{3}\right]$.
$\left[\text{Sin ángulo doble, } (x-\frac{1}{6}x^3+\cdots)(1-\frac{1}{2}x^2+\cdots)=x-(\frac{1}{6}+\frac{1}{2})x^3+\cdots\right]$.

6a. i] Cociente: $\frac{2^{n+1}}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{100}\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{2}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100}\to 0<1$ y la serie converge.
ii] $0\le\frac{7-\mathrm{sen}\,n}{\sqrt{n^3+n}}\le\frac{8}{n^{3/2}}$ y $\sum\frac{8}{n^{3/2}}$ convergente $\Rightarrow$ converge.

6b. $F'(x)=-\frac{\arctan(\mathrm{sen}\,x)}{1+\mathrm{sen}^4 x}\cos x\Rightarrow F'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{\arctan 1}{1+1}0=0$. $F\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\int_{-1}^{1}\text{impar}=0$.

8. $\int_0^1 x(4-x^2)^{-1/2}dx+\int_0^1\frac{dx}{2\sqrt{1-(x/2)^2}}=\left[-(4-x^2)^{1/2}+\mathrm{arc\,sen}\,\frac{x}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{6}+2-\sqrt{3}$
$\left[\overset{2\,\mathrm{sen}\,t=x}{\to}\int_0^{\pi/6}\frac{2\,\mathrm{sen}\,t+1}{2\cos t}2\cos t\,dt=-2\cos t\Big]_0^{\pi/6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2-\sqrt{3}\right]$.