Matemáticas (grupos B, C, D y E) **Soluciones del primer parcial de septiembre** (7-9-2011)

1. Hallar (si existe) el límite de las sucesiones: **a]** $\dfrac{\sqrt{(n^4-1)\operatorname{sen}\frac{9}{n}}}{n^2+1}$, **b]** $\sqrt[3]{n^4-n^2}-n\,\mathrm{e}^{\arctan n}$. [2.5 puntos]

2. Sea $f(x)=\frac{x}{\log(2-x^2)}$. Hallar su dominio y estudiar su límite cuando $x\to 1$. [2.5 puntos]

3. Sea $f(x)=\tan x-16\operatorname{sen}x$. Hallar todos los reales x tales que $f''(x)=0$. [2.5 puntos]

4. Sea $f(x)=4\arctan x-x^2-2$. Hallar sus valores máximo y mínimo en $\left[0,\sqrt{3}\right]$. Probar que f se anula una única vez en el intervalo $[0,1]$. [2.5 puntos]

1. **a]** $\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}\sqrt{\operatorname{sen}\frac{9}{n}}\longrightarrow 1\cdot 0=0$, **b]** $\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{n}}\left(\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{\sqrt[3]{n-\frac{1}{n}}}}-\underset{\mathrm{e}^{\pi/2}}{\underset{\downarrow}{\mathrm{e}^{\arctan n}}}\right)\longrightarrow\infty$.

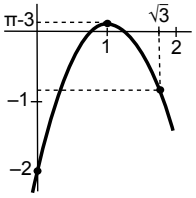
2. Definida $\begin{array}{l}\text{si } 2-x^2>0\Leftrightarrow |x|<\sqrt{2}\\ \text{y si } 2-x^2\neq 1\Leftrightarrow x\neq\pm 1\end{array}\Rightarrow D=(-\sqrt{2},-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt{2})$. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-\infty$.

3. $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-16\cos x$, $f''(x)=\frac{2\operatorname{sen}x}{\cos^3 x}+16\operatorname{sen}x=\frac{2\operatorname{sen}x(1+8\cos^3 x)}{\cos^3 x}=0$ si $\begin{array}{l}\operatorname{sen}x=0\Leftrightarrow x=k\pi \text{ ó}\\ \cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{array}$, $k\in\mathbf{Z}$.

4. $f'(x)=\frac{4}{1+x^2}-2x=\frac{-2(x^3+x-2)}{1+x^2}=\frac{-2(x-1)(x^2+x+2)}{1+x^2}\Rightarrow$ crece en $(-\infty,1]$ y decrece en $[1,\infty)$.

Valor máximo $f(1)=\pi-3$. El mínimo es $f(0)=-2$ pues $f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{4\pi}{3}-5>4-5=-1$.

f continua, $f(0)<0$, $f(1)>0\overset{\text{Bolzano}}{\Rightarrow}f$ se anula. Una vez por ser estrictamente creciente.



Matemáticas (grupos B, C, D y E) **Soluciones del segundo parcial de septiembre** (7-9-2011)

1. Determinar todos los valores de x para los que converge la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{3n+2}$. [2.5 puntos]

2. Si $f(x)=\dfrac{\arctan x^2-(\mathrm{e}^x-1)^2}{\log(1+x^3)}$, hallar razonadamente $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$. [2.5 puntos]

3. Sea $f(x)=\frac{\sqrt{x+4}}{x-5}$. **a]** Hallar $\int_{-4}^{0}f(x)\,dx$. **b]** Precisar si converge $\int_{5}^{\infty}f(x)\,dx$. [3.5 puntos]

4. Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $H(x)=\int_{\mathrm{e}^{x^2}}^{4}\frac{\log t\,dt}{t+t^2}$ en el intervalo $[-1,1]$. [1.5 puntos]

1. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, $\sqrt[n]{|a_n|}\underset{n\to\infty}{\to}|x|^3\Rightarrow$ converge si $|x|<1$, diverge si $|x|>1$ y para $|x|=1$ cociente y raíz no deciden.

Para $x=-1$, $\sum\frac{(-1)^n}{3n+2}$ converge por Lebiniz $\left(\frac{1}{3n+2}\to 0\right.$ y claramente decrece$\left.\right)$.

Si $x=1$, $\sum\frac{1}{3n+2}$ diverge $\left(\frac{1/(3n+2)}{1/n}\to\frac{1}{3}\right.$ y $\left.\sum\frac{1}{n}\text{ diverge}\right)$. Converge si $x\in[-1,1)$.

2. $\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots\right)^2=x^2+x^3+\cdots$, $f(x)=\frac{-x^3+\cdots}{x^3+\cdots}\underset{x\to 0}{\to}-1$. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\overset{\text{L'H}}{=}0+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2(\mathrm{e}^x-1)\,\mathrm{e}^x}{\frac{3x^2}{1+x^3}}=-\infty\left[\frac{-\infty}{0+}\right]$.

3. **a]** $t=\sqrt{x+4}\to\int_0^2\frac{2t^2-18+18}{t^2-9}\,dt=4+\int_0^2\left[\frac{3}{t-3}-\frac{3}{t+3}\right]dt=4+\left[3\log\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\right]_0^2=4-3\log 5$.

$\left[\frac{18}{(t+3)(t-3)}=\frac{A}{t+3}+\frac{B}{t-3}=\frac{A(t-3)+B(t+3)}{(t+3)(t-3)}\text{ ; } t=3\to 18=6B\text{ , } t=-3\to -18=6A\right]$.

b] Tiene dos impropiedades y en ambas diverge. $\int_5$ se comporta como la divergente $\int_5\frac{dx}{x-5}$ $\left(\frac{f}{1/(x-5)}\underset{x\to 5}{\to}\sqrt{5}\right)$ e $\int^{\infty}$ diverge como $\int^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ $\left(\frac{f}{1/\sqrt{x}}\underset{x\to\infty}{\to}1\right)$. Que una divergiese ya bastaba para que $\int_5^{\infty}f$ divergiese.

$\left[\text{Se podría afirmar a partir de la primitiva de } f\text{: } 2\sqrt{x+4}+3\log\left|\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x+4}+3}\right|\right]$.

4. $H'(x)=-2x\,\mathrm{e}^{x^2}\frac{\ln(\mathrm{e}^{x^2})}{\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{2x^2}}=\frac{-2x^3}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\Rightarrow$ crece en $[-1,0]$ y decrece en $[0,1]$.