Matemáticas **Primer parcial de septiembre** (4 de septiembre de 2012)

1. Hallar todos los números reales x que satisfacen $\log(4x^2-3x)\le 0$. [2 puntos]

2. Hallar razonadamente el límite de la sucesión $a_n=\dfrac{n^k-n^2\operatorname{sen}\frac1n}{\sqrt[3]{n}-n\arctan n}$, para i) $k=2$, ii) $k=1$. [2 puntos]

3. Escribir el complejo $z=-1+i\sqrt3$ en la forma $re^{i\theta}$ y calcular z^3. [2 puntos]

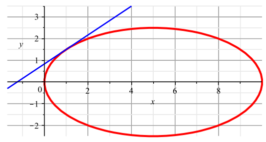
3*. Calcular la recta tangente a la curva $x^2+4y^2-10x=0$ en el punto $\left(1,\frac32\right)$. [2 puntos]

4. Sea $f(x)=\frac{x-2}{x^3+x-2}$. **a]** Estudiar crecimiento y decrecimiento. **b]** Hallar, si existen, sus valores extremos en $[-1,1)$. **c]** Dibujar su gráfica. Precisar cuántas soluciones reales tiene $f(x)=\frac{1}{10}$. [4 puntos]

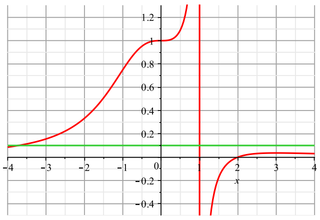
1. $0<4x^2-3x\le 1 \Leftrightarrow 4x\left(x-\frac34\right)>0$ y $4x^2-3x-1=4\left(x+\frac14\right)(x-1)\le 0 \Rightarrow x\in\left[-\frac14,0\right)\cup\left(\frac34,1\right]$.

2. Si $k=2$, $\dfrac{n(1-\operatorname{sen}\frac1n)}{n^{-2/3}-\arctan n}\to\dfrac{\infty(1-0)}{-\pi/2}=-\infty$. Si $k=1$, $\dfrac{1-n\operatorname{sen}\frac1n}{n^{-2/3}-\arctan n}\to\dfrac{1-1}{-\pi/2}=0$, pues $\dfrac{\operatorname{sen}\frac1n}{\frac1n}\to 1$.

3. $r=\sqrt{1+3}=2$, $\tan\theta=-\sqrt3$ y del segundo cuadrante $\Rightarrow z=2e^{2\pi i/3}$.
$z^3=-1+3\sqrt3 i-9i^2+3\sqrt3 i^3=8e^{2\pi i}=8$.



3*. Elipse. $1+9-10=0$, $2x+8yy'-10=0$, $y'=\frac{5-x}{4y}\Big|_{(1,\frac32)}=\frac23$, $y=\frac32+\frac23(x-1)=\frac23x+\frac56$.



4. $x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)\Rightarrow \operatorname{dom} f=\mathbf{R}-\{1\}$. $f\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$. $f\xrightarrow[x\to1^{\pm}]{}\mp\infty$.
$f'=\frac{2x^2(3-x)}{(x^3+x-2)^2}\Rightarrow f$ crece en $(-\infty,1)$ y $(1,3]$ y decrece en $[3,\infty)$. $f(3)=\frac{1}{28}$.
Mínimo $f(-1)=\frac34$ y máximo no existe. $f\left(\frac32\right)=-\frac{4}{23}$. $f(4)=-\frac{1}{33}$.
Viendo la gráfica, $f(x)=\frac{1}{10}$ una vez $\left[\text{en } [-4,-3]\text{, pues } f(-4)=\frac{3}{35}<\frac{1}{10}<\frac{5}{32}=f(-3)\right]$.

Matemáticas **Segundo parcial de septiembre** (4 de septiembre de 2012)

1. Sea $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^nx^{3n}}{n!}$. Precisar para qué x converge la serie y probar que $f'(1)>150$. [2.5 puntos]

2. Si $f(x)=\dfrac{xe^{-x}\sqrt{1+x}-\log(1+x)}{\arctan(x^3)}$, hallar razonadamente $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$. [2.5 puntos]

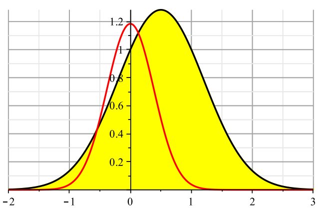
3. Calcular $\int_0^4\log\left(1+\sqrt{x}\right)dx$. [2.5 puntos]

4. Sea $g(x)=e^{x-x^2}$. **a]** Si $G(x)=\int_{2x}^{2x+1}g(t)\,dt$, hallar $G'\left(\frac12\right)$ y estudiar el crecimiento y decrecimiento de G.
$\mathbf{b}_{ABCDE}$] Estudiar si converge $\int_0^\infty g$. $\mathbf{b}_F$] Probar que para todo x se cumple $0\le G(x)\le e^{1/4}$. [2.5 puntos]

1. $\dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|}=\dfrac{4^{n+1}}{4^n}\dfrac{n!}{(n+1)!}\dfrac{|x|^{3n+3}}{|x|^{3n}}=\dfrac{4|x|^3}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0\Rightarrow$ la serie converge para todo x.
$f(x)=e^{4x^3}$, $f'(1)=12e^4>12\cdot2^4=192$, o bien $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot4^nx^{3n-1}}{(n-1)!}$, $f'(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot4^n}{(n-1)!}=\frac{12}{1}+\frac{48}{1}+\frac{3\cdot64}{2}+\cdots>156$.

2. $\dfrac{x\left[1-x+\frac12x^2-\cdots\right]\left[1+\frac12x+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}x^2+\cdots\right]-\left[x-\frac12x^2+\frac13x^3+\cdots\right]}{x^3+\cdots}=\dfrac{\left[x-\frac12x^2+(\frac12-\frac12-\frac18)x^3+\cdots\right]-\left[x-\frac12x^2+\frac13x^3+\cdots\right]}{x^3+\cdots}\xrightarrow[x\to0]{}-\dfrac{11}{24}$.
$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$, pues el denominador tiende a $\frac{\pi}{2}$ y el numerador $\frac{x^{3/2}}{e^x}\sqrt{\frac1x+1}-\log(1+x)\to-\infty$.

3. $t=\sqrt{x}\to 2\int_0^2 t\log(1+t)\,dt=t^2\log(1+t)\Big]_0^2-\int_0^2\frac{t^2-1+1}{t+1}dt=(t^2-1)\log(1+t)-\frac{(t-1)^2}{2}\Big]_0^2=3\log3$.



4. **a]** $G'(x)=2e^{2x+1-4x^2-4x-1}-2e^{2x-4x^2}=2e^{-4x^2}\left[e^{-2x}-e^{2x}\right]$.
$G'\left(\frac12\right)=2\left[e^{-2}-1\right]$. G crece si $x<0$ y decrece si $x>0$.
$\mathbf{b}_{ABCDE}$] Como $\int^\infty e^{-x}dx$ converge y $\frac{e^{x-x^2}}{e^{-x}}=e^{x(2-x)}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$, la dada converge.
$\mathbf{b}_F$] $g'(x)=(1-2x)e^{x-x^2}\Rightarrow g$ tiene su máximo en $x=\frac12$, con $g\left(\frac12\right)=e^{1/4}$
$\Rightarrow 0\le g(x)\le e^{1/4}\Rightarrow \int_{2x}^{2x+1}0\,dx=0\le G(x)\le\int_{2x}^{2x+1}e^{1/4}dx=e^{1/4}$.