Matemáticas (grupo C) **Soluciones del examen de septiembre** (1 de septiembre de 2015)

1. Hallar todos los reales x que cumplen la igualdad $\tan^2 x = 12\cos^2 x$. [1 punto]

$\operatorname{sen}^2 x = \cos^4 x$, $12\cos^4 x + \cos^2 x - 1 = 0$, $\cos^2 x = \frac{-1\pm 7}{24} = \frac{1}{4}, -\frac{1}{3}$, $\cos x = \pm\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

O bien: $\tan^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$, $\tan^4 x + \tan^2 x - 12 = 0$, $\tan^2 x = \frac{-1\pm 7}{2} = 3, -4$, $\tan x \overset{\uparrow}{=} \pm\sqrt{3}$.

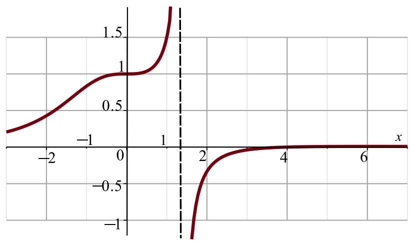
2. Sea $f(x) = \frac{x-4}{x^3+x-4}$. **a]** Probar que el denominador se anula una única vez en el intervalo $[1,2]$. **b]** Estudiar el crecimiento y decrecimiento de f. **c]** Hallar sus valores extremos en $[-1,1]$. **d]** Dibujar su gráfica. [2.2 puntos]

a] $P = x^3+x-4$, $P' = 3x^2+1 > 0$, $P(1) = -3$, $P(2) = 6$, P continua $\Rightarrow P(c) = 0$ en 1 único $c \in [1,2]$.

b] $f' = \frac{2x^2(6-x)}{(x^3+x-4)^2} \Rightarrow f$ crece en $(-\infty, c)$ y $(c, 6]$ y decrece en $[6, \infty)$.

c] f creciente en $[-1,1] \Rightarrow$ mínimo $f(-1) = \frac{5}{6}$ y máximo $f(1) = \frac{3}{2}$.

d] $f(0) = 1$, $f(2) = -\frac{1}{3}$, $f(4) = 0$, $f(6) = \frac{1}{109}$. $f \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$. $f \underset{x\to c^{\pm}}{\longrightarrow} \mp\infty$.



3. Precisar razonadamente si convergen: **a]** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^3}{1+n^4}\right)^3$, **b]** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{4n-3}\right)^n$. [1.5 puntos]

a] $\left(\frac{1+n^3}{1+n^4}\right)^3 \sim \frac{1}{n^3}$ $\left(\text{es decir } \frac{a_n}{1/n^3} = \left(\frac{n+n^4}{1+n^4}\right)^3 = \left(\frac{n^{-3}+1}{n^{-4}+1}\right)^3 \to 1\right)$ y $\sum \frac{1}{n^3}$ convergente $\Rightarrow$ **converge**.

b] Pide claramente el criterio de la raíz: $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n-1}{4n-3} \to \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ **converge**.

4. Hallar (si existe) el límite de la sucesión $a_n = e^{\cos n\pi \log\frac{n+1}{n}}$. [1 punto]

$\cos n\pi \log\frac{n+1}{n} \to 0$ (acotado $\times \log 1$) $\Rightarrow a_n \to 1$.

5. Si $H(x) = x\int_x^{2x}\sqrt{1+3t^3}\,dt$, calcular $H''(1)$. [1 punto]

$H' = \int_x^{2x}\sqrt{1+3t^3}\,dt + x\left[2\sqrt{1+24x^3} - \sqrt{1+3x^3}\right]$. $H'' = 4\sqrt{1+24x^3} - 2\sqrt{1+3x^3} + \frac{72x^3}{\sqrt{1+24x^3}} - \frac{9x^3}{2\sqrt{1+3x^3}} \xrightarrow{x=1} \frac{563}{20}$.

6. Sea $f(x) = x\arctan\frac{4}{x^2}$, $f(0) = 0$. **a]** Hallar, si existen, $f'(0)$ y $f'(2)$. **b]** Hallar una primitiva de f. **c]** Estudiar si converge la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$. [2.1 puntos]

a] $f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{h\arctan(1/h^2) - 0}{h} = \frac{\pi}{2}$. $f'(x) = \arctan\frac{4}{x^2} - \frac{8x^2}{x^4+16}$ $\left(\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}\right)$, $f'(2) = \frac{\pi}{4} - 1$.

b] $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\arctan\frac{4}{x^2} + \int\frac{4x^3}{x^4+16}\,dx = \frac{1}{2}x^2\arctan\frac{4}{x^2} + \log(x^4+16)$.

c] $f \overset{\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, pues $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{1/x} = \lim_{h\to 0}\frac{\arctan 4t^2}{t^2} = \lim_{h\to 0}\frac{4t^2+\cdots}{t^2} = 4$ e $\int^{\infty}\frac{dx}{x}$ divergente $\Rightarrow$ diverge (o la primitiva $\to 2+\infty$).

7. Probar que $\int_0^1 x^2\cos x^2\,dx \geq \frac{1}{6}$, **a]** acotando el integrando, **b]** utilizando desarrollos de Taylor. [1.2 puntos]

a] En $[0,1]$, $\cos x \geq \cos 1 > \cos\frac{\pi}{3} \geq \frac{1}{2}$ (el coseno decrece en $[0,\pi]$) $\Rightarrow \int_0^1 x^2\cos x^2\,dx > \int_0^1\frac{x^2}{2}\,dx = \frac{1}{6}$.

b] $\int_0^1\left[x^2 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{24}x^{10} - \cdots\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{14} + \frac{1}{264} - \cdots \underset{\bullet}{>} \frac{1}{3} - \frac{1}{14} = \frac{11}{42} > \frac{1}{6}$. [• porque el siguiente término es positivo].