Soluciones del examen de Cálculo I de febrero de 2001.

---

1. Calcular el límite de la función $h(x) = \frac{\arctan x - \operatorname{senh} x}{x(\cosh x - \cos x)}$ cuando i) $x \to 0$, ii) $x \to \infty$.

---

i) Es del tipo $\frac{0}{0}$. Lo más rápido es usar desarrollos de Taylor (todas la funciones son analíticas en $x = 0$):

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} , \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{senh} x = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[1-(-1)^k]x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} , \quad \cosh x = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[1+(-1)^k]x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - \operatorname{senh} x}{x(\cosh x - \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - (x + \frac{x^3}{6} + o(x^3))}{x(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)))} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = -\frac{1}{2}$$

Si se utiliza L'Hôpital, los cálculos son bastante más largos:

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \cosh x}{\cosh x - \cos x + x(\sinh x + \operatorname{sen} x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{2x}{(1+x^2)^2} - \operatorname{senh} x}{2 \operatorname{senh} x + 2 \operatorname{sen} x + x(\cosh x + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{2}{(1+x^2)^2} - \frac{4x^2}{(1+x^2)^3} - \cosh x}{3 \cosh x + 3 \cos x + x(\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x)} = -\frac{1}{2}$$

ii) Es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. No se puede aplicar Taylor y L'Hôpital no lleva a nada. Pero basta escribir:

$$h(x) = \frac{\frac{\arctan x}{\cosh x} - \tanh x}{x(1 - \frac{\cos x}{\cosh x})} \to 0, \quad \text{cuando } x \to \infty$$

pues el numerador tiende hacia -1 y el denominador hacia ∞, ya que $\cos x$ está acotada, $\arctan x \to \frac{\pi}{2}$, x, $\cosh x \to \infty$ y $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \to 1$, si $x \to \infty$.

[O, casi lo mismo, trabajando con exponenciales:

$$h(x) = \frac{2 \arctan x - e^x + e^{-x}}{x(e^x + e^{-x} - 2 \cos x)} = \frac{2e^{-x} \arctan x - 1 + e^{-2x}}{x(1 + e^{-2x} - 2e^{-x} \cos x)} \to 0 \text{ , si } x \to \infty \text{]}$$

2. Sea $g(x)=\frac{x^3+x^2-7}{x^3-2x^2+x-2}$. i) Calcular la primitiva $G(x)$ de $g(x)$ que cumple $G(0)=-1$.
ii) Probar que $g(x)>1$ si $x\in[0,1]$ y que hay un único $c\in(0,1)$ tal que $G(c)=0$.

i) Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^3+x^2-7}{x^3-2x^2+x-2}=1+\frac{3x^2-x-5}{x^3-2x^2+x-2}=1+\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=1+\frac{1}{x-2}+\frac{2x+3}{x^2+1}$$

pues:

$$x^3-2x^2+x-2=x(x^2+1)-2(x^2+1)=(x-2)(x^2+1)$$

$$A+B=3,\ -2B+C=-1,\ A-2C=-5\Rightarrow A=1,\ B=2,\ C=3$$

Por tanto:

$$\int\frac{x^3+x^2-7}{x^3-2x^2+x-2}\mathrm{d}x=x+\log|x-2|+\log(x^2+1)+3\arctan x+K\ ,$$

siendo K una constante arbitraria. Como $G(0)=-1$:

$$\log 2+K=-1\ \Rightarrow\ K=-1-\log 2\ \Rightarrow$$

$$G(x)=x+\log|x-2|+\log(x^2+1)+3\arctan x-1-\log 2$$

[Casualmente, con la siguiente descomposición no es necesario pasar a fracciones simples:
$\frac{x^3+x^2-7}{x^3-2x^2+x-2}=1+\frac{3x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x-2}+\frac{3(x-2)}{x^3-2x^2+x-2}=1+\frac{3x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x-2}+\frac{3}{x^2+1}$
$\Rightarrow\int\frac{x^3+x^2-7}{x^3-2x^2+x-2}\mathrm{d}x=x+\log|x^3-2x^2+x-2|+3\arctan x+K$]

ii) Probar que en $[0,1]$ es $g(x)>1$ equivale a probar que es $g(x)-1>0$, es decir, que:

$$g(x)-1=\frac{3x^2-x-5}{(x-2)(x^2+1)}>0$$

Como el denominador es negativo en $[0,1]$, basta probar que también el trinomio del numerador lo es:

$$3x^2-x-5\le 3-0-5<0$$

[O de otra forma, más larga: el numerador tiene sus raíces en $x=\frac{1\pm\sqrt{61}}{6}$ y es negativo en $(\frac{1-\sqrt{61}}{6},\frac{1+\sqrt{61}}{6})$, intervalo que contiene al $[0,1]$: $\frac{1-\sqrt{61}}{6}<0<1<\frac{1+\sqrt{61}}{6}$].

Como G(x) es continua en $[0,1]$ y es

$$G(0)=-1<0\ ,\quad G(1)=3\arctan 1=3\pi/4>0\ ,$$

el teorema de Bolzano asegura que existe $c\in(0,1)$ donde $G(c)=0$. Además este c es único al ser $G(x)$ estrictamente creciente (pues $G'(x)=g(x)>0$) en todo el intervalo en cuestión.

[De hecho, no necesitábamos hallar la primitiva para probar que $G(1)=-1+\int_0^1 g>0$, pues ya hemos visto que $g>1$ en el intervalo].

3. Determinar si converge la integral impropia $\int_{2^+}^{3} \sqrt{g(x)}\,\mathrm{d}x$, siendo $g(x)$ la función del problema **2**.

La integral

$$\int_{2^+}^{3} \sqrt{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{2^+}^{3} \sqrt{\frac{x^3+x^2-7}{(x-2)(x^2+1)}}\,\mathrm{d}x = \int_{2^+}^{3} \sqrt{\frac{x^3+x^2-7}{x^2+1}}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-2}}$$

(bien definida en ese intervalo donde el radicando es positivo) sólo tiene un punto singular en $x = 2$. A la vista de la última expresión basta compararla en ese punto con la integral convergente

$$\int_{2^+}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-2}} = \Big[2\sqrt{x-2}\Big]_2^3 = 2$$

En efecto:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{\frac{x^3+x^2-7}{x^2+1}}\,\frac{1}{\sqrt{x-2}}}{\frac{1}{\sqrt{x-2}}} = \lim_{x\to 2^+} \sqrt{\frac{x^3+x^2-7}{x^2+1}} = 1$$

Por tanto, ambas convergen o divergen simultáneamente. En este caso convergen.

4. Encontrar todos los valores de $a \in \mathbf{R}$ para los que converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n+2}{\mathrm{e}^n+n}$.

La serie se puede descomponer en dos, una de las cuales no depende de a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n+2}{\mathrm{e}^n+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\mathrm{e}^n+n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^n+n}$$

La segunda converge, por ser:

$$0 < \frac{2}{\mathrm{e}^n+n} < \frac{2}{\mathrm{e}^n}\,, \quad \forall n \geq 1$$

y converger la serie geométrica de término general e^{-n} con razón menor que la unidad ($\mathrm{e} > 1$). Por tanto, la condición necesaria y suficiente para que la serie original converja es que converja la primera, que es una serie de potencias cuyo radio de convergencia se calcula fácilmente con el criterio del cociente o de la raíz:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{n+1}+n+1}{\mathrm{e}^n+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}+(n+1)\mathrm{e}^{-n}}{1+n\mathrm{e}^{-n}} = \mathrm{e}\ ,\ R = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{e}^n+n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}(1+n\mathrm{e}^{-n})^{1/n} = \mathrm{e}$$

Cuando $a = \pm\mathrm{e}$ diverge (el término general no tiende a 0). Así pues, la serie converge si y solo si $|a| < \mathrm{e}$.

[Sin separar la serie inicial podríamos argumentar así, para llegar al mismo resultado:
si $|a| \leq 1$, $\sum |a_n| \leq \sum \frac{3}{\mathrm{e}^n+n} < \sum \frac{3}{\mathrm{e}^n}$, geométrica convergente;
si $|a| > 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a+2a^{-n}|}{|1+2a^{-n}|}\frac{1+n\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}+(n+1)\mathrm{e}^{-n}} = \frac{|a|}{\mathrm{e}} < 1 \Leftrightarrow |a| < \mathrm{e}$].

4b. (opción de los grupos B, C y E). Determinar la región del plano complejo en que converge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\mathrm{e}^n+n}$.

El radio de convergencia de esta serie de potencias es: $R = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{n+1}+n+1}{\mathrm{e}^n+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}+(n+1)\mathrm{e}^{-n}}{1+ne^{-n}} = \mathrm{e}$. La serie converge en $|z| < \mathrm{e}$ y diverge en $|z| > \mathrm{e}$. Si $|z| = \mathrm{e}$, es decir, si $z = \mathrm{e}^{1+i\theta}$, la serie adopta la forma $\sum \frac{\mathrm{e}^{ni\theta}}{1+n\mathrm{e}^{-n}}$, y es divergente, pues su término general no tiende a 0 (su módulo $\frac{1}{1+n\mathrm{e}^{-n}}$ tiende a 1). Así pues, la serie converge exactamente en el círculo sin borde $|z| < \mathrm{e}$.

5. i) Determinar para todo $n \in \mathbf{N}$ en qué $x \geq 0$ alcanza su valor máximo la función $f_n(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t^3+6n^6}$.
ii) Probar que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en $[0,\infty)$.

i) Como la función $\frac{1}{x^3+6n^6}$ es continua para todo $x \geq 0$ y $n \geq 1$, es $f_n(x)$ derivable y su derivada es:

$$f_n'(x) = \frac{2}{8x^3+6n^6} - \frac{1}{x^3+6n^6} = \frac{3(n^6-x^3)}{(4x^3+3n^6)(x^3+6n^6)}$$

La derivada se anula únicamente cuando $x = n^2$. Como el denominador es siempre positivo, la derivada es positiva cuando $x < n^2$ y negativa cuando $x > n^2$, tiene $f_n(x)$ un máximo local para $x = n^2$.

[Hallar la segunda derivada exige más cálculos:
$f_n''(x) = \frac{-12x^2}{(4x^3+3n^6)^2} + \frac{3x^2}{(x^3+6n^6)^2} \Rightarrow f_n''(n^2) = -\frac{12}{49n^8} + \frac{3}{49n^8} = -\frac{9}{49n^8}$]

ii) La función $f_n(x) \geq 0$ para $x \geq 0$ (el integrando es positivo) y su valor máximo en esa semirrecta se podría hallar (con algún esfuerzo) exactamente, pero nos basta acotarlo:

$$f_n(n^2) = \int_{n^2}^{2n^2} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+6n^6} \leq \int_{n^2}^{2n^2} \frac{\mathrm{d}t}{6n^6} = \frac{1}{6n^4}$$

[o bien $f_n(n^2) \leq \int_{n^2}^{2n^2} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{3}{8n^4}$]

Para estudiar la convergencia de la serie aplicamos el criterio de Weierstrass:

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(n^2) \leq \frac{1}{6n^4} \quad \Rightarrow \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{6n^4} \;, \quad \forall n \geq 1,\ \forall x \geq 0$$

y como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n^4}$ converge, la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en $[0,\infty)$.

6. Sea $f(x) = x(1+x^3)^{-1/5}$. Hallar los 3 primeros términos no nulos de su desarrollo de Taylor en $x=0$. Aproximar por un racional $f(1/2)$ con error menor que 0.001 .

El desarrollo en serie se puede calcular a partir del desarrollo en $t=0$ de $(1+t)^{-1/5}$:

$$(1+t)^{-1/5} = 1 + (-1/5)t + \frac{(-1/5)(-6/5)}{2!}t^2 + \cdots = 1 - \frac{1}{5}t + \frac{3}{25}t^2 + \cdots, \text{ si } |t| < 1$$

Sustituyendo $t = x^3$ y multiplicando por x tenemos:

$$f(x) = x - \frac{1}{5}x^4 + \frac{3}{25}x^7 + \cdots, \quad \text{si } |x^3| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$$

En $x = 1/2 < 1$, basta tomar los dos primeros para tener un error menor que 10^{-3} :

$$f(1/2) = \frac{1}{2}(8/9)^{1/5} \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\frac{1}{16} = \frac{39}{80}$$

pues el error está acotado (al ser serie alternada decreciente) por el valor absoluto del primer término omitido:

$$\frac{3}{25 \times 2^7} = \frac{3}{100 \times 2^5} = \frac{3}{3200} < 10^{-3}$$

Soluciones del examen de Cálculo I de septiembre de 2001.

---

1. a) Determinar los valores de x para los que la serie $\sum(-2x)^{3n}$ es convergente.
b) Decidir si converge para $\arctan \frac{3}{5}$.

---

a) $\sum(-2x)^{3n} = \sum(-8x^3)^n$ es una serie geométrica, convergente si $|-8x^3| < 1$, es decir, si $|x| < \frac{1}{2}$.
(Para esos x sería $\sum_{n=0}^{\infty}(-8x^3)^n = \frac{1}{1+8x^3}$)

b) El problema es saber si $\arctan \frac{3}{5}$ es mayor o menor que $\frac{1}{2}$. Desarrollando por Taylor el $\arctan x$:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots, \text{ si } |x| \le 1 \quad \Rightarrow \quad \arctan \frac{3}{5} = \frac{3}{5} - \frac{9}{125} + \cdots,$$

que es una serie alternada decreciente. El error cometido al tomar el primer término es menor que:

$$\left|\arctan \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\right| < \frac{9}{125} \quad \Rightarrow \quad \arctan \frac{3}{5} > \frac{3}{5} - \frac{9}{125} = \frac{66}{125} > \frac{1}{2}$$

y la serie no converge. También lo podemos ver basándonos en valores conocidos del arctan :

$$\frac{3}{5} > \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (pues } \frac{9}{25} > \frac{1}{3}) \quad \Rightarrow \quad \arctan \frac{3}{5} > \frac{\pi}{6} > \frac{1}{2} \text{ (pues } \pi > 3).$$

---

3. Estudiar la convergencia puntual y uniforme en el intervalo $[0,1]$ de:
a) la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n^3+x}}, n = 1,2,3,\dots$; b) la serie $\sum f_n(x)$.

---

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{\sqrt{n^3+x}} = 0 \text{ , para cualquier } x \in \mathbf{R} .$$

Por lo tanto, converge puntualmente en $[0,1]$ y la función límite puntual es $f(x) = 0$.
Comprobemos que también converge uniformemente en ese intervalo:

$$\left|\frac{x}{\sqrt{n^3+x}} - 0\right| \le \frac{1}{\sqrt{n^3+x}} \le \frac{1}{n^{3/2}} \text{ ,} \quad \text{cuando } x \in [0,1] .$$

Por lo tanto, para todo ϵ se puede encontrar N que no depende de x :

$$N > \frac{1}{\epsilon^{2/3}}$$

tal que si $n \ge N$, la diferencia entre la sucesión y el límite puntual $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in [0,1]$.

b) Utilizando el criterio de Weierstrass, como:

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{n^{3/2}}, \quad \forall x \in [0,1]$$

y sabemos que la serie numérica $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (serie armónica con $3/2 > 1$), deducimos que la serie de funciones converge uniformemente (y, por tanto, también puntualmente) en $[0,1]$.

2. Sea la función $f(x) = \cos\sqrt{|x|}$. a) Estudiar si es derivable en $x = 0$. b) Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de f en el intervalo $[-4, 1]$. c) Calcular la integral $\int_{-4}^{4} \cos\sqrt{|x|}\mathrm{d}x$.

a) Para ver si es derivable a partir de la definición ($\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$), al tener f dos expresiones distintas

$$f(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \cos\sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases} ,$$

hallamos los límites laterales:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{h}-1}{h} = [\text{ l'Hôpital }] = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}\sqrt{h}}{2\sqrt{h}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos\sqrt{-h}-1}{h} = -\lim_{h\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{h}-1}{h} = \frac{1}{2}$$

Luego no existe $f'(0)$ (al ser distintos los límites por la derecha y por la izquierda, no existe el límite).

(Más cortos habrían sido los cálculos si hubiéramos utilizado que $f(x) = 1 - \frac{|x|}{2} + \frac{x^2}{24} + \cdots \ \forall x$)

b) Para $x < 0$ es

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\sqrt{-x} = \frac{1}{2\sqrt{-x}}\operatorname{sen}\sqrt{-x} ,$$

derivada que no se anula en ningún punto del intervalo $(-4, 0)$ (pues $-\pi^2 < -4$). Para $x > 0$

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\sqrt{x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen}\sqrt{x} ,$$

tampoco se anula en ningún punto de $(0, 1)$ (pues $\pi^2 > 1$). El máximo y el mínimo (que han de existir por ser f continua) se tomarán o en los extremos o en el punto sin derivada. Basta comparar:

$$f(-4) = \cos 2 , \quad f(0) = 1 , \quad f(1) = \cos 1 .$$

Como $\cos 2 < 0$ y $0 < \cos 1 < 1$, el mínimo se alcanza en $x = -4$ y el máximo en $x = 0$.

c)

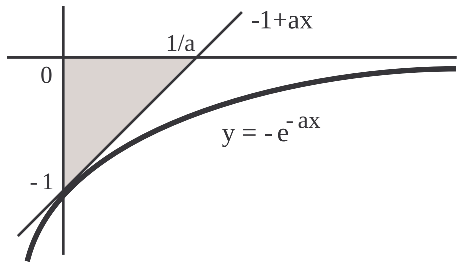
$$\int_{-4}^{4} \cos\sqrt{|x|}\mathrm{d}x = [\ f \text{ función par}] = 2\int_{0}^{4} \cos\sqrt{x}\mathrm{d}x = [\ \sqrt{x} = t, \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t\ ] = 4\int_{0}^{2} t\cos t\mathrm{d}t$$

$$\int_{0}^{2} t\cos t\mathrm{d}t = [\text{ por partes: } t = u\ ,\ \cos t\mathrm{d}t = \mathrm{d}v\ ] = t\operatorname{sen} t\Big|_{0}^{2} - \int_{0}^{2} \operatorname{sen} t\mathrm{d}t = 2\operatorname{sen} 2 + \cos 2 - 1$$

Luego:

$$\int_{-4}^{4} \cos\sqrt{|x|}\mathrm{d}x = 4(2\operatorname{sen} 2 + \cos 2 - 1)$$

4. Considérese la región del cuarto cuadrante limitada por la gráfica de $f(x) = -e^{-ax}(a > 0)$ y el eje x . Probar que la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$ divide dicha región en dos partes de igual área.



La recta tangente es:

$$y = -1 + ax \ , \quad \text{pues} \quad f(0) = -1 \ , \quad f'(0) = a\mathrm{e}^{-ax}\Big|_{x=0} = a$$

Esta recta corta el eje $y = 0$ en $x = \frac{1}{a}$, definiendo un triángulo de área: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{a} \times 1 = \frac{1}{2a}$.

El área limitada por la curva (se trata de una integral impropia convergente) es:

$$-\int_0^\infty (-\mathrm{e}^{-ax})\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left[\mathrm{e}^{-ax}\right]_0^\infty = \frac{1}{a}$$

que es el doble del área del triángulo (para cualquier valor de a).

5. Dada $F(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\log t + t}}$. a) Determinar la convergencia de la integral impropia $\lim_{x\to\infty} F(x)$.
b) Hallar (si existe) el $\lim_{x\to\infty} \frac{F(2x)}{F(x)}$.

a) Comparamos con la función $t^{-1/2}$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{-1/2}}{(\log t + t)^{-1/2}} = \lim_{t\to\infty} \sqrt{1 + \frac{\log t}{t}} = 1 \quad \left(\text{pues: } \lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t} = 0\right)$$

Como $\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ es divergente, la integral pedida diverge.

b) Como (por el apartado a))

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} F(2x) = \infty$$

y F es derivable (primitiva de continua), se puede aplicar l'Hôpital (y el teorema fundamental del cálculo):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(2x)}{F(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2F'(2x)}{F'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{\log 2x + 2x}}}{\frac{1}{\sqrt{\log x + x}}} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\log x + x}}{\sqrt{\log 2x + 2x}} = 2\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{\log x}{x} + 1}{\frac{\log 2x}{x} + 2}} = \sqrt{2}$$