Soluciones del examen de Cálculo I de febrero de 2002.

---

1. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2+\arctan n}{\sqrt{1+n^3x^2}}$. **a)** Discutir para qué valores de x es convergente.
b) Estudiar si converge uniformemente en $[1,2]$.

---

a) Si $x \neq 0$,

$$0 < \frac{x^2+\arctan n}{\sqrt{1+n^3x^2}} < \frac{x^2+\pi/2}{|x|}\frac{1}{n^{3/2}}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ es convergente (serie armónica con $3/2 > 1$), la que estamos estudiando también.
O bien, por comparación en el límite:

$$\frac{\frac{x^2+\arctan n}{\sqrt{1+n^3x^2}}}{n^{-3/2}} \longrightarrow \frac{x^2+\pi/2}{|x|} > 0$$

Si $x = 0$, la serie es: $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ que no converge, pues $\lim_{n\to\infty} \arctan n \neq 0$.

b) Se tiene

$$\left|\frac{x^2+\arctan n}{\sqrt{1+n^3x^2}}\right| < \frac{4+\pi/2}{\sqrt{1+n^3}}, \quad 1 \le x \le 2$$

La serie numérica de la derecha es convergente (como se ha visto en el apartado anterior) luego, por el criterio de Weierstrass, la serie de funciones que se estudia converge uniformemente en el intervalo dado.

---

2. a) Estudiar en qué puntos es continua la función $f(x) = (1-\frac{1}{x})\log|1-x^2|, f(-1) = f(0) = f(1) = 0$.
b) Determinar si existe f'(0) . Probar que existe algún $c \in (0,1)$ tal que $f'(c) = 0$.

---

a) Es continua por ser producto de funciones continuas en $\mathbf{R} - \{-1,0,1\}$. En $x=-1$ no es continua, pues

$$\lim_{x\to -1}\left(1-\frac{1}{x}\right)\log|1-x^2| = -\infty$$

En $x=0$ sí es continua, ya que desarrollando por Taylor el logaritmo:

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{x}\right)\log(1-x^2) = -\lim_{x\to 0}(x-1)\frac{x^2+o(x^2)}{x} = 0$$

En $x=1$ también es continua, pues aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\left(1-\frac{1}{x}\right)\log|1-x^2| = \lim_{x\to 1}\frac{\log|1-x^2|}{\frac{x}{(x-1)}} = \lim_{x\to 1}\frac{2x}{1-x^2}(x-1)^2 = \lim_{x\to 1}\frac{2x(1-x)}{1+x} = 0$$

b) La derivada en $x=0$ es:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{h}\right)\log(1-h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(h-1)\frac{\log(1-h^2)}{h^2} = -\lim_{h\to 0}\frac{-h^2+o(h^2)}{h^2} = 1$$

Luego f es derivable en $x=0$.
La función f es continua en $[0,1]$ según hemos visto. Además es derivable en $(0,1)$ (producto de funciones derivables). Como $f(0) = f(1)$, por el teorema de Rolle, existe un punto c, $0 < c < 1$, en el que $f'(c) = 0$.

3. Aproximar $\log \frac{3}{4}$ con un polinomio de Taylor de orden 2, dando una cota del error cometido.

Sabemos que

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots, \quad \text{si } |x| < 1 \,.$$

Para obtener una serie alternada decreciente conviene escribir:

$$\log \frac{3}{4} = -\log \frac{4}{3} = -\log\left(1 + \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots \sim \frac{1}{3} + \frac{1}{18} = -\frac{5}{18}\,,$$

estando el error acotado por el valor absoluto del primer término omitido:

$$|\text{error}| = \left|\log \frac{3}{4} - \left(-\frac{5}{18}\right)\right| < \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

Si se aproxima mediante:

$$\log \frac{3}{4} = \log\left(1 - \frac{1}{4}\right) \sim -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{9}{32}\,,$$

al aparecer una serie no alternada, el error hay que calcularlo, por ejemplo, con el resto de Lagrange:

$$|\text{error}| = \left|\frac{1}{3!}\frac{2}{(1+c)^3}x^3\right|_{x=\frac{1}{4},\ c\in(-1/4,0)} < \frac{1}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3}\frac{1}{4^3} = \frac{1}{81}$$

o bien (grupo A) mediante:

$$|\text{error}| < \frac{1}{3}\frac{1}{3/4}\frac{1}{4^3} = \frac{1}{144}$$

4. Calcular la integral $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\cos x}{3\,\text{sen}\, x - 2\cos^2 x} \mathrm{d}x$.

El cambio más adecuado es $t = \text{sen}\, x$. Entonces, $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ y se tiene:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\cos x\, \mathrm{d}x}{3\,\text{sen}\, x - 2\cos^2 x} = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{2t^2 + 3t - 2} = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{(2t-1)(t+2)} = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(\frac{A}{2t-1} + \frac{B}{t+2}\right) \mathrm{d}t$$

$$A(t+2) + B(2t-1) = 1, \qquad A = \frac{2}{5},\ B = -\frac{1}{5}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(\frac{A}{2t-1} + \frac{B}{t+2}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{5}\log\left|\frac{2t-1}{t+2}\right|_{t=-\frac{1}{2}}^{t=0} = \frac{1}{5}\log\frac{3}{8}$$

Si se pone $z = \tan \frac{x}{2}$, entonces, $\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3} - 2$ y se tiene:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\cos x\, \mathrm{d}x}{3\,\text{sen}\, x - 2\cos^2 x} = \int_{\sqrt{3}-2}^{0} \frac{(z^2-1)\mathrm{d}t}{z^4 - 3z^2 - 2z^2 - 3z + 1} = \frac{1}{5}\int_{\sqrt{3}-2}^{0} \left(\frac{2z-4}{z^2-4z+1} - \frac{2z+1}{z^2+z+1}\right) \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{5}\log\left|\frac{z^2-4z+1}{z^2+z+1}\right|_{z=\sqrt{3}-2}^{z=0} = \frac{1}{5}\log\frac{3}{8}$$

5. Sea $F(x) = \int_{-1/x}^{1/x^2} \mathrm{e}^{-t^4} \mathrm{d}t$. **a)** Hallar $F'(1)$. **b)** Estudiar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F(n)$ converge.

a) Por el teorema fundamental del cálculo (e^{-x^4} es continua $\forall x$):

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{-1/x}^{1/x^2} \mathrm{e}^{-t^4} \mathrm{d}t = -\frac{2}{x^3} \mathrm{e}^{-1/x^8} - \frac{1}{x^2} \mathrm{e}^{-1/x^4} \Rightarrow F'(1) = -\frac{3}{\mathrm{e}}$$

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F(n)$ es alternada, pues $F(x) > 0,\ x > 0$, ya que el integrando es positivo y $\frac{1}{x^2} > -\frac{1}{x}$. Además $F(n)$ es decreciente, al serlo $F(x)$, pues es claro que $F'(x) < 0$ si $x > 0$.

Finalmente:

$$\lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{n\to\infty} \int_{-1/n}^{1/n^2} \mathrm{e}^{-t^4} \mathrm{d}t = 0 \ ,$$

puesto que la longitud del intervalo de integración tiende a 0 cuando $n \to \infty$: $\frac{1}{n^2} - \frac{-1}{n} \to 0$.

Por tanto, aplicando el criterio de Leibniz, la serie converge.

6. Estudiar la convergencia de la integral $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - \cos x}{x^{3/2}} \mathrm{d}x$.

La integral es impropia en $x = 0$. Comparamos el integrando (positivo en el intervalo) con $x^{-1/2}$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\mathrm{e}^x - \cos x}{x^{3/2}}}{x^{-1/2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^x - \cos x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x + o(x)}{x} = 1$$

Como sabemos que $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ converge (por ser $\frac{1}{2} < 1$), la integral que se estudia es convergente.

Soluciones del examen de Cálculo I de septiembre de 2002.

---

1. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^{n-1}}{(x^2+6)^n} n$. a) Discutir para qué valores de x es convergente.
b) Estudiar si converge uniformemente en $[5,6]$.

---

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^{n-1}}{(x^2+6)^n} = \frac{1}{x^2+6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5x}{x^2+6}\right)^{n-1} = \frac{1}{x^2+6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5x}{x^2+6}\right)^{n}$$

es una serie geométrica de razón $\frac{5x}{x^2+6}$ que converge (para cada x) si y sólo si

$$\left|\frac{5x}{x^2+6}\right| < 1 \iff x^2-5x+6=(x-2)(x-3)>0,\ x^2+5x+6=(x+2)(x+3)>0$$

Es decir, la serie converge para:

$$x \in (-\infty,-3) \cup (-2,2) \cup (3,\infty)$$

b) En el intervalo $[5,6]$:

$$\left|\frac{5x}{x^2+6}\right| = \frac{5x}{x^2+6} \le \frac{5\cdot 6}{5^2+6} = \frac{30}{31} < 1$$

Como es convergente la serie numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{30}{31}\right)^n$$

el criterio de Weierstrass asegura que la serie del problema es uniformemente convergente en ese intervalo. (El factor $1/(x^2+6)$ no interviene en los problemas de convergencia).

---

2. Estudiar en qué puntos es continua la función $f(x) = \frac{x^2 \operatorname{sen} \pi x}{1-\cos \pi x}$ si $x \notin \mathbf{Z}$, $f(x)=0$ si $x \in \mathbf{Z}$.

El denominador se anula si

$$\cos \pi x = 1 \implies x = 2n, n \in \mathbf{Z}$$

Si $x \notin \mathbf{Z}$ la función es continua (cociente de funciones continuas).
También lo es si $x=2n+1, n \in \mathbf{Z}$, pues $\lim_{x\to 2n+1} f(x) = f(2n+1) = 0$.

En donde se anula el denominador se tiene una indeterminación de la forma $0/0$:

$$\lim_{x\to 2n} \frac{x^2 \operatorname{sen} \pi x}{1-\cos \pi x} = \lim_{x\to 2n} \frac{2x \operatorname{sen} \pi x + \pi x^2 \cos \pi x}{\pi \operatorname{sen} \pi x}$$

Si $n \neq 0$, el último numerador tiende a $4n^2\pi$ y el denominador a 0 , con lo que la función no es continua en los puntos $2n,\ n\neq 0$. Si $n=0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \pi x}{1-\cos \pi x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \operatorname{sen} \pi x + \pi x^2 \cos \pi x}{\pi \operatorname{sen} \pi x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{sen} \pi x + 4x\pi \cos \pi x - \pi^2 x^2 \operatorname{sen} \pi x}{\pi^2 \cos \pi x} = 0$$

(o por Taylor: $(\pi x^3+\cdots)/(\pi^2x^2/4+\cdots) \to 0$). Luego la función f también es continua en $x=0$.

3. Calcular el coeficiente de x^4 del desarrollo de Taylor en torno a $x=0$ de $\frac{\log(1+2x)}{1+2x}$.

Los desarrollos en serie de Taylor en $x=0$ de $\log(1+2x)$ y $\frac{1}{1+2x}$ (válidos para $|x|<1/2$) son:

$$\log(1+2x) = 2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{3}(2x)^3 - \frac{1}{4}(2x)^4 - \cdots$$
$$\frac{1}{1+2x} = 1-(2x)+(2x)^2-(2x)^3+(2x)^4-\cdots$$

Multiplicando ambas series:

$$(2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3-4x^4-\cdots)(1-2x+4x^2-8x^3+16x^4-\cdots) = \cdots-(1\cdot 4+\frac{8}{3}2+2\cdot 4+2\cdot 8)x^4+\cdots$$

El coeficiente de x^4 es, pues:
$$-\frac{12+16+24+48}{3} = -\frac{100}{3}$$

(Podíamos haberlo hecho observando que nuestra función es 1/4 de la derivada de $[\log(1+2x)]^2$ o (más largo) dividiendo series. Lo que no conviene es derivar cuatro veces la función inicial).

4. Sea $f(x)=x^2e^{x^2}$. a) Si $H(x)=\int_x^{2x} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}\,t$, hallar el x que hace máximo el valor de H .
b) Dibujar aproximadamente la gráfica de f y probar que el valor máximo de H es menor que $1/2$.

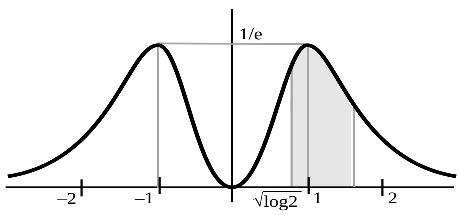
a)
$$H(x)=\int_x^{2x} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}\,t \;\Rightarrow\; H'(x)=8x^2\mathrm{e}^{-4x^2}-x^2\mathrm{e}^{-x^2}=x^2\mathrm{e}^{-4x^2}(8-\mathrm{e}^{3x^2})$$
$$H'(x)=0 \;\Rightarrow\; x=0,\; x=\pm\sqrt{\frac{\log 8}{3}}=\pm\sqrt{\log 2}$$

$H'(x)>0$ si $|x|<\sqrt{\log 2} \Rightarrow H$ crece en $[-\sqrt{\log 2},\sqrt{\log 2}]$. H decrece en $(-\infty,-\sqrt{\log 2}]\cup[\sqrt{\log 2},\infty)$.

Por tanto, en $x=\sqrt{\log 2}$ hay un máximo local (que también es absoluto, pues $H(\sqrt{\log 2})>0$ y H es negativa si $x<0$, al ser el integrando positivo).

(En $x=-\sqrt{\log 2}$ hay un mínimo y en $x=0$ un punto de inflexión con tangente horizontal; el cálculo (no necesario) de la H'' nos daría: $H''(\pm\sqrt{\log 2})=\mp 3(\log 2)^{3/2}, H''(0)=0$).

b) f es par y es positiva (salvo en $x=0$ que vale 0).
f tiende a 0 cuando $x\to\pm\infty$.
Como $f'(x)=2(1-x)x(1+x)\mathrm{e}^{-x^2}$, f tiene:
dos máximos, en $x=\pm 1$, y un mínimo en $x=0$.
El valor máximo de f (en $x=\pm 1$) es $1/\mathrm{e}$.
El valor máximo de la H hemos visto que es:



$$H(\sqrt{\log 2})=\int_{\sqrt{\log 2}}^{2\sqrt{\log 2}} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}\,t \le \int_{\sqrt{\log 2}}^{2\sqrt{\log 2}} \frac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{d}\,t=\frac{1}{\mathrm{e}}\sqrt{\log 2}<\frac{1}{2} \quad \text{pues } \log 2<1\,,\ \mathrm{e}>2$$

5. Calcular la integral $\int_4^5 \frac{\mathrm{d}\,x}{x-4\sqrt{x-4}}$.

Haciendo

$$\sqrt{x-4}=t, \quad x=t^2+4, \quad \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t, \quad 4\to 0, \quad 5\to 1$$

(en el intervalo considerado, el cambio es lícito).

$$\int_4^5 \frac{\mathrm{d}\,x}{x-4\sqrt{x-4}} = \int_0^1 \frac{2t\,\mathrm{d}\,t}{t^2-4t+4} = 2\int_0^1 \frac{(t-2+2)\,\mathrm{d}\,t}{(t-2)^2} =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,t}{t-2} + 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,t}{(t-2)^2} = 2\log|t-2|\Big|_0^1 - \frac{4}{t-2}\Big|_0^1 = 2(1-\log 2)$$

6. Estudiar la convergencia de la integral $\int_2^\infty \frac{x}{x^n-8}\mathrm{d}x$ según los valores de $n\in\mathbf{N}$.

La integral es convergente en el infinito cuando $n\geq 3$ (por comparación con $\int^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$). Asi pués, para $n=1,2$ ya sabemos que la integral entre 2 e ∞ diverge (se podría ver que también divergen las impropias asociadas al cero del denominador, pero ya no es necesario comprobarlo).

Si $n=3$ el integrando es singular en $x=2$. Y en este punto se comporta como la divergente $\int_{2^+} \frac{\mathrm{d}x}{x-2}$:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x/(x^3-8)}{1/(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{(x^2+2x+4)} = \frac{1}{6} \quad \text{(o por L'Hôpital)}$$

Para $n\geq 4$, el denominador no tiene raíces en el intervalo de integración (pues si $x\geq 2$ y $n\geq 4$, es $x^n\geq 2^4>8$), con lo que la única impropiedad es la del infinito.

Los únicos valores, por tanto, para los que la integral dada converge son $n\geq 4$.