Soluciones del examen de Cálculo I de febrero de 2003.

1. Sea $f(x) = x + 2\cos x$. **a)** Hallar, si existe, el valor mínimo de f en el intervalo $[0,1]$.
b) Probar que existe f^{-1}, la función inversa de $f(x)$ para $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, y hallar la derivada $(f^{-1})'(2)$.
c) Hallar $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [f(x)]^2 dx$.

a) El mínimo ha de existir por ser f continua en un intervalo cerrado. Como $f'(x) = 1 - 2\operatorname{sen} x$ sólo se anula en $[0,1]$ para $x = \pi/6$ y es $f'(x) > 0$ en $[0, \pi/6)$ y $f'(x) < 0$ en $(\pi/6, 1]$, el valor mínimo se alcanzará en uno de los extremos del intervalo. Será o bien $f(0) = 2$ o bien $f(1) = 1 + 2\cos 1$. Como $\cos 1 > \frac{1}{2}$ (porque $\cos 1 > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ o porque $\cos 1 = 1 - \frac{1}{2} + \cdots$, serie de Leibniz), el valor mínimo es 2.

b) Si $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$, se cumple que $\operatorname{sen} x \le \operatorname{sen}\frac{1}{2}$ y, por tanto, $f'(x) = 1 - 2\operatorname{sen} x \ge 1 - 2\operatorname{sen}\frac{1}{2} > 0$ (ya que $\operatorname{sen} x < x$, $\forall x > 0$). Así pues, f es estricamente creciente en el intervalo y, por tanto, posee inversa f^{-1}. Como $f^{-1}(2) = 0$ (por ser $f(0) = 2$), la derivada pedida es:

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

c)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [x^2 + 4\cos^2 x + 4x\cos x]dx = 2\int_0^{\pi/2} [x^2 + 2 + 2\cos 2x]dx = \frac{2}{3}\left[x^3\right]_0^{\pi/2} + 2\pi + [2\operatorname{sen} 2x]_0^{\pi/2} = 2\pi + \frac{\pi^3}{12}$$

Hemos utilizado que x^2 y $\cos^2 x$ son pares y que $x\cos x$ es impar (ahorrándonos una integración por partes: $\int x\cos x dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx = x\operatorname{sen} x + \cos x$)

2. Sea $f(x) = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1 - \mathrm{e}^{-x^3}}$. Determinar (si existen): **a)** $\lim_{x\to 0} f(x)$; **b)** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$; **c)** $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

a) Por Taylor o L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1 - \mathrm{e}^{-x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{1 - (1 - x^3 + o(x^3))} = 1 \ , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1 - \mathrm{e}^{-x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos x}{3\mathrm{e}^{-x^3}} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = 1$$

b) Como el numerador está acotado y el denominador tiende a ∞, está claro que $f(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$.

c) Intuitivamente, parece que no va a tener límite, pues para valores grandes de x se parece a $\operatorname{sen}^3 x$ que no lo tiene. Para formalizarlo, lo más corto es considerar las sucesiones $a_n = n\pi$ y $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Ambas tienden a ∞, pero $f(a_n) \to 0$, mientras que $f(b_n) \to 1$.

3. Sea $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^3) + 1}{\int_{-1}^{x} \operatorname{sen}(t^3)dt + x + 4}$. Calcular, si existe, $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Como, por el teorema fundamental del cálculo (el integrando que aparece en la definición de f es continuo para todo x), el numerador es la derivada del denominador, se tiene que:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \left[\log\left|\int_{-1}^{x} \operatorname{sen}(t^3)dt + x + 4\right|\right]_{-1}^{1} = \log\left|\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(t^3)dt + 5\right| - \log 3 = \log\frac{5}{3} \ ,$$

porque $\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(t^3)dt = 0$, al ser impar el integrando. La integral existe por ser f continua, pues su denominador es positivo en $[-1,1]$: en $x = -1$ vale 4 y es función creciente (su derivada $\operatorname{sen}(x^3) + 1 \ge 0$).

4. Determinar los valores de x para los que converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n3^n x^{n-1}$ y hallar su suma para esos valores.

a) Utilizando para la serie el criterio del cociente o de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)3^{n+1}|x|^{n+1}}{n3^n|x|^n} = 3|x| \ ; \quad \lim_{n\to\infty} n^{1/n}3|x| = 3|x| \ .$$

deducimos que converge si $|x| < \frac{1}{3}$ y que diverge si $|x| > \frac{1}{3}$. Para $x = \pm\frac{1}{3}$, respectivamente, se convierte en: $\sum_{n=1}^{\infty} 3n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}3n$, series claramente divergentes (su término general no tiende a 0). Los x para los que converge son, pues: $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

La serie de potencias dada es, claramente, la que se obtiene derivando término a término la serie geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3x)^n = \frac{3x}{1-3x} \ , \text{ para } |x| < \frac{1}{3} \ .$$

La suma de la serie inicial es, pues, la derivada de la función definida por esta última serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n3^n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\frac{3x}{1-3x} = \frac{3}{(1-3x)^2} \ , \quad \text{para } |x| < \frac{1}{3} \ .$$

5. Sea $f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$. **a)** Hallar, para cada valor de x, el límite de la sucesión $f_n(x)$.
b) Estudiar si converge uniformemente $f_n(x)$ en el intervalo $[0,2]$.

a) Cuando $n \to \infty$, $x^{2n} \to 0$, si $|x| < 1$ y $x^{2n} \to \infty$, si $|x| > 1$. Además, para cualquier n, es $x^{2n} = 1$ si $x = \pm 1$. Por tanto, el límite (puntual) de la sucesión es:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 1/2 & \text{si } |x| = 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

b) Como todas las f_n son continuas en $[0,2]$ y la función límite f es discontinua en $x = 1$, la convergencia no puede ser uniforme, porque el límite uniforme de funciones continuas en un intervalo debe ser una función continua en dicho intervalo.

6. Estudiar la convergencia de la integral $\int_4^{\infty} \frac{\arctan\frac{1}{x}}{(2x-8)^{1/3}}dx$.

La integral es impropia en $x = 4$ y $x = \infty$, con lo que se debe comprobar la convergencia de dos integrales: $\int_{4^+}$ e $\int^{\infty}$. Para $x = 4$ comparamos el integrando, positivo en todo $[4,\infty)$, con $(x-4)^{-1/3}$:

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{\frac{\arctan\frac{1}{x}}{(2x-8)^{1/3}}}{(x-4)^{-1/3}} = \frac{\arctan\frac{1}{4}}{2^{1/3}} > 0 \ .$$

Como $\int_{4^+} \frac{dx}{(x-4)^{1/3}}$ converge (por ser $\frac{1}{3} < 1$), deducimos que nuestra integral $\int_{4^+}$ también converge.

Para $x = \infty$ comparamos con $x^{-4/3}$, porque el arco tangente del ‘algo’ pequeño se parece a ese ‘algo’:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\arctan\frac{1}{x}}{(2x-8)^{1/3}}}{x^{-4/3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1/3}}{(2x-8)^{1/3}}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{1/x} = \frac{1}{2^{1/3}} > 0 \ , \quad \text{ya que } \lim_{x\to\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{1/x} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\arctan t}{t} = 1 \ .$$

Puesto que $\int^{\infty} \frac{dx}{x^{4/3}}$ converge (es $\frac{4}{3} > 1$), la integral $\int^{\infty}$ converge y, por tanto, también la inicial $\int_{4^+}^{\infty}$.

Soluciones del examen de Cálculo I de septiembre de 2003.

1. Sea $f(x)=\int_0^{x-x^3}\frac{dt}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^2 t}}$. **a)** Hallar $f'(x)$, indicando los x para los que existe.
b) Determinar los puntos del intervalo $[0,2]$ en los que f alcanza sus valores máximo y mínimo.

a) Como $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^2 x}}$ es continua (es C^∞) para todo $x\in\mathbf{R}$, al ser continuo y positivo el radicando, y como $b(x)=x-x^3$ es derivable $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x)=G(b(x))$, con $G(x)=\int_0^x g(t)dt$ es derivable $\forall x\in\mathbf{R}$ y es:

$$f'(x)=G'(b(x))b'(x)=\frac{1-3x^2}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^2(x-x^3)}} \ .$$

b) Los valores máximo y mínimo (que han de existir por ser f continua) en $[0,2]$ se dan en los extremos del intervalo o en el punto del intervalo que anula f': $x=1/\sqrt{3}$. Basta, pues, comparar:

$$f(0)=\int_0^0 g=0\ ,\ f(\tfrac{1}{\sqrt{3}})=\int_0^{2\sqrt{3}/9} g>0 \text{ (integrando positivo) y } f(2)=\int_0^{-6} g=-\int_{-6}^0 g<0\ .$$

El valor máximo se toma en $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (se podía deducir simplemente del signo de f') y el mínimo en $x=2$.

2. Sea $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}$, $f(0)=1$. **a)** Hallar $f'(0)$. **b)** Determinar los límites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ y la imagen de f .
Elegir entre **c)** y **d)**:
c) Hallar la derivada $f^{(2003)}(0)$. **d)** Estudiar el crecimiento y decrecimiento de f .

$$\textbf{a)}\ f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=\frac{1-e^{-h}-h}{h^2}=\frac{1-h-[1-h+h^2/2+o(h^2)]}{h^2}=-\frac{1}{2}$$

$$\text{(o por L'Hôpital, } \lim_{h\to 0}\frac{e^{-h}-1}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{-e^{-h}}{2}=-\frac{1}{2}\ ).$$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ (el numerador tiende a 1 y el denominador a ∞); $\lim_{x\to-\infty} f(x)=$ [L'Hôpital] $=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{1}=\infty$.

$f(x)>0\ \forall x$ (numerador y denominador son positivos ambos para $x>0$ y negativos para $x<0$) y f es continua $\forall x$. Esto, junto con los límites recién calculados, prueba que la imagen de f es $(0,\infty)$.

c) La serie de Taylor de f se calcula muy fácilmente. Para todo x es:

$$f(x)=\frac{1-\left[1-x+\frac{1}{2}x^2-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}+\cdots\right]}{x}=1-\frac{x}{2}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(n+1)!}x^n+\cdots$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0)=n!\frac{(-1)^n}{(n+1)!}=\frac{(-1)^n}{(n+1)}\ \text{. En particular, } f^{(2003)}(0)=-\frac{1}{2004}\ .$$

[De la serie de Taylor también se deduce fácilmente el valor $f'(0)=-1/2$ de **a)**].

$$\textbf{d)}\ f'(x)=\frac{xe^{-x}-1+e^{-x}}{x^2}=\frac{x+1-e^x}{x^2e^x}<0\ \ \forall x\Rightarrow f \text{ es decreciente en todo } \mathbf{R},$$

puesto que el numerador $g(x)=x+1-e^x$ de f' es siempre negativo (el denominador es obviamente positivo).

Esto se puede ver de varias formas. Por ejemplo, $g(0)=0$, $g'(x)=1-e^x$ positivo si $x<0$ y negativo si $x>0\Rightarrow g$ es negativa si $x<0$ (crece hasta llegar a 0) y negativa si $x>0$ (decrece desde 0).

También es obvio a partir del dibujo de $x+1$ y e^x (son tangentes en $x=0$ y es siempre $e^x\geq x+1$ al ser $\cup$).

[Para $x<-1$ era clarísimo que $g<0$ pues tanto $x+1$ como $-e^x$ son negativas, pero acotando directamente no se saca nada para otros valores de x . Hasta la serie de Taylor de $g(x)=-x^2/2-x^3/6-\cdots$, nos dice algo sobre el decrecimiento: claramente es $g<0$ si $x>0$, pues todos los términos son negativos; y para $-1\leq x\leq 0$, dicha serie es alternada decreciente con el primer término negativo, con lo que su suma lo es].

3. Hallar, si existe, un punto del intervalo $(0,1)$ en el que la recta tangente a $f(x)=\arctan\frac{x}{2-x}$ sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,\frac{\pi}{4})$.

La recta que pasa por $(0,0)$ y $(1,\frac{\pi}{4})$ tiene por pendiente $\frac{\pi}{4}$. Se trata de probar que $\exists c\in(0,1)$ con $f'(c)=\frac{\pi}{4}$.

$$\text{Si } x\neq 2\ ,\ f'(x)=\frac{2/(2-x)^2}{1+[x^2/(2-x)^2]}=\frac{1}{x^2-2x+2}=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x^2-2x+2-\frac{4}{\pi}=0\ ,\ x_\pm=1\pm\sqrt{\tfrac{4}{\pi}-1}\ .$$

La raíz $x_+>1$ obviamente no está en el intervalo. La x_- sí: $1<\frac{4}{\pi}<2\Rightarrow 0<\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}<1\Rightarrow x_-\in(0,1)$.

[La existencia del $c\in(0,1)$ con $f'(c)=\pi/4$ se deducía inmediamente del teorema del valor medio: como $f(0)=0$, $f(1)=\arctan 1=\pi/4$ y es claro que f es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$, dicho teorema asegura que existe al menos un punto de $(0,1)$ en el que la tangente es paralela al segmento que une los puntos $(0,f(0))$ y $(1,f(1))$].

4. Sea la sucesión definida por $a_{n+1}=\frac{n+2}{3n+1}a_n$, con $a_1=1$.
a) Determinar la convergencia de la serie $\sum a_n$. **c)** Hallar el límite de la sucesión a_n , si converge.

a) El criterio del cociente asegura que como: $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\dfrac{n+2}{3n+1}\to\dfrac{1}{3}<1$, la serie $\sum a_n$ es convergente.

b) Y, por tanto, su término general $a_n\to 0$.

[No es difícil, sin considerar la serie, probar directamente que a_n es convergente. Como $a_n>0$, está acotada inferiormente. Por otra parte, es claro que a_n es decreciente (puesto que $\frac{n+2}{3n+1}<1\Leftrightarrow 1<2n$, $\forall n$).

Por tanto a_n tiene un límite a y debe ser (haciendo tender n hacia ∞): $a=\frac{1}{3}a\Leftrightarrow a=0$].

5. Sea $f(x)=x\log(1+\frac{4}{x^2})$. **a)** Hallar una primitiva de f. **b)** Estudiar la convergencia de $\int_1^\infty f$.

a) Partes: $\int x\log(1+\frac{4}{x^2})dx=\left[\ u=\log(1+\frac{4}{x^2}),\ dv=xdx,\ du=\frac{-\frac{8}{x^3}}{1+\frac{4}{x^2}}dx=-\frac{8dx}{x(x^2+4)},\ v=\frac{x^2}{2}\ \right]$

$$=\tfrac{x^2}{2}\log(1+\tfrac{4}{x^2})+\int\tfrac{4x}{x^2+4}dx=\tfrac{x^2}{2}\log(1+\tfrac{4}{x^2})+2\log(x^2+4)$$

b) Sólo es impropia en ∞. Podríamos estudiar si converge a partir de la primitiva anterior:

$\int_1^\infty f=\lim_{x\to\infty}\Big[\frac{x^2}{2}\log(1+\frac{4}{x^2})+2\log(x^2+4)-\frac{5}{2}\log 5\Big]$, límite que no existe: la impropia diverge (cuando $x\to\infty$, $\log(x^2+4)\to\infty$ y $x^2\log(1+\frac{4}{x^2})\to 4$, pues $\lim_{t\to 0^+}\frac{\log(1+4t^2)}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{4t^2+o(t^2)}{t^2}=4$).

Pero es más corto acudir al criterio de comparación por paso al límite ($f>0$ claramente si $x\geq 1$).

Nuestra f se comporta en el infinito como $\frac{1}{x}$, ya que: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{1/x}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\log(1+4t^2)}{t^2}=4$.

Y como $\int_1^\infty\frac{dx}{x}$ diverge, la nuestra también lo hace.