SOLUCIONES DEL EXAMEN DE CALCULO I. FEBRERO 2004.

1. Determinar para qué puntos de la gráfica de $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-x}$ la recta tangente pasa por el origen. (1.5 puntos)

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = x_0$ es

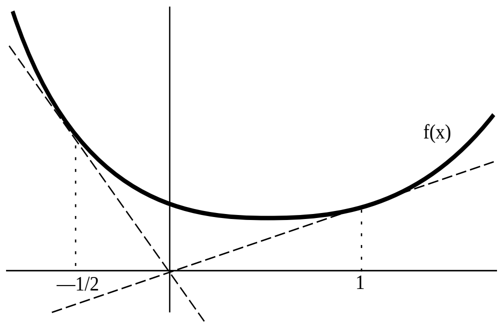
$$y = \mathrm{e}^{x_0^2-x_0}\,[(2x_0-1)(x-x_0)+1]\ ,$$

que pasa por el origen si:

$$2x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -1/2, 1.$$

Por tanto, los puntos pedidos son:

$$\boxed{\left(-\tfrac{1}{2}\,,\,\mathrm{e}^{3/4}\right)\ \text{y}\ (1,1)}$$



2. Determinar el área máxima que puede tener un rectángulo que tenga dos lados sobre los semiejes x,y positivos y un vértice sobre la gráfica de $f(x) = \left[x^3+4\right]^{-1/2}$. (1.5 puntos)

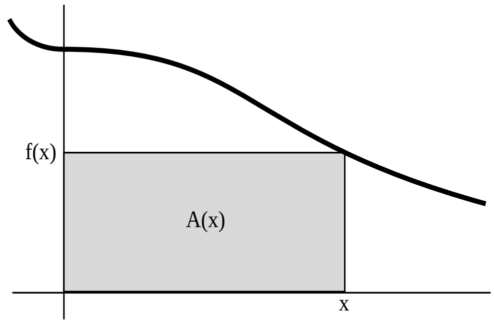
El área del rectángulo (ver figura) es

$$A(x) = xf(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+4}}\ \text{que es derivable } \forall x \geq 0.$$

$$A'(x) = \frac{8-x^3}{2(x^3+4)^{3/2}} = 0 \Leftrightarrow x = 2,$$

donde $A(x)$ tiene un máximo local, ya que $A'(x) > 0$ a su izquierda y $A'(x) < 0$ a su derecha. Por tanto,

$$\boxed{A_{max} = \frac{1}{\sqrt{3}}}\ .$$



3. Determinar todos los números reales c para los que converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2c-1)^{n^2}}{n+1}$. (2 puntos)

Aplicando el criterio del cociente (o raíz):

$$\frac{n+1}{n+2}\,\frac{|2c-1|^{(n+1)^2}}{|2c-1|^{n^2}} = \frac{n+1}{n+2}\,|2c-1|^{2n+1}\ \left(\text{ó}\ \frac{|2c-1|^n}{\sqrt[n]{n+1}}\right) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } |2c-1|<1 \\ \infty & \text{si } |2c-1|>1 \\ 1 & \text{si } |2c-1|=1 \end{cases}$$

Como $|2c-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2c-1 < 1 \Leftrightarrow c \in (0,1)$, ahí converge la serie. Queda por decidir:

$$c = 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\ \text{divergente.}$$

$$c = 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\ \text{convergente por el criterio de Leibniz } (n^2 \text{ par} \Leftrightarrow n \text{ par}).$$

Así pues, $\boxed{\text{la serie converge} \Leftrightarrow c \in [0,1).}$

4. Sea $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Elegir entre a) y b):

a) Hallar $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \left(x^2 + \frac{1}{2}x^4\right)}{x^6}$. b) Hallar el valor de la integral $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)dx$. (1.5 puntos)

a) Desarrollando por Taylor:

$$f(x) = x^2(1-x^2)^{-1/2} = x^2\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2}x^4 + o(x^4)\right) = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{3x^6}{8} + o(x^6)$$

luego:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \left(x^2 + \frac{1}{2}x^4\right)}{x^6} = \frac{3}{8}}$$

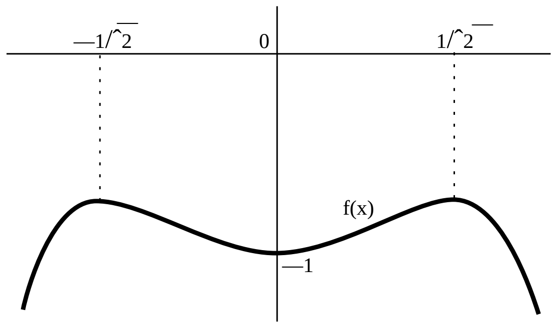
b) Con el cambio $x = \operatorname{sen} u$:

$$\int_0^{1/2} f(x)dx = \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}^2 u\; du = \frac{1}{2}\left[u - \frac{\operatorname{sen} 2u}{2}\right]_0^{\pi/6} = \boxed{\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}}$$

5. Estudiar en qué intervalos crece y decrece la función $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{t^2}dt - e^{x^4}$. Determinar en cuántos puntos del intervalo $[0,\infty)$ se anula $f(x)$. (1.5 puntos)

$f(x)$ par y derivable en todo $\mathbf{R}$. $f'(x) = 2xe^{x^4}\left(1-2x^2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm 1/\sqrt{2}$. En $x=0$ hay un mínimo local y en $x = \pm 1/\sqrt{2}$ hay máximos locales.

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) \text{ crece en } (-\infty, -1/\sqrt{2}\,] \bigcup [0, 1/\sqrt{2}\,] \\ f(x) \text{ decrece en } [-1/\sqrt{2}\,, 0] \bigcup [1/\sqrt{2}\,, \infty) \end{array}}$$



$f(0) = -1$. Como e^{t^2} es siempre creciente para $t > 0$:

$$f(\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \int_0^{1/2} e^{t^2}dt - e^{1/4} < \int_0^{1/2} e^{1/4}dt - e^{1/4} = -\frac{e^{1/4}}{2}$$

El valor máximo es negativo y, por tanto,

$$\boxed{f(x) \text{ no se anula para } x \in [0,\infty).}$$

6. Analizar la convergencia de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^a}$, según el valor de $a \in \mathbf{R}$. (2 puntos)

El integrando es positivo $\forall x > 0$.

$\displaystyle\int_1^{\infty}$: El integrando se comporta como x^{-a}: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^a(1-e^{-x})}{x^a} = 1$, luego $\displaystyle\int_1^{\infty}$ converge $\Leftrightarrow a > 1$.

$\displaystyle\int_{0^+}^{1}$: El integrando se comporta como $x^{-(a-1)}$ (desarrollando por Taylor el numerador):

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{a-1}(1-e^{-x})}{x^a} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x + o(x)}{x} = 1, \text{ luego } \int_{0^+}^{1} \text{ converge} \Leftrightarrow a < 2.$$

$$\boxed{\text{La integral converge} \Leftrightarrow 1 < a < 2.}$$

SOLUCIONES DEL EXAMEN DE CALCULO I. SEPTIEMBRE 2004.

1. Sea $f(x)=\dfrac{\arctan(\operatorname{sen}x)-x}{\log(1+x^3)}$. Hallar (si existe): a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

a) Es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Podemos utilizar Taylor. Sabemos que:

$$\arctan x = x-\tfrac{x^3}{3}+\cdots\ ,\ |x|\le 1\ ;\ \operatorname{sen}x = x-\tfrac{x^3}{6}+\cdots\ ,\ \forall x\ ;\ \log(1+x)=x-\cdots\ ,\ -1<x\le 1\ \Rightarrow$$

$$\arctan(\operatorname{sen}x)=\operatorname{sen}x-\tfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3}+\cdots = x-\tfrac{x^3}{6}-\tfrac{x^3}{3}+o(x^3)\ ,\ \log(1+x^3)=x^3+o(x^3)\ ,\ \text{si } x \text{ cercano a } 0\,.$$

$$\text{Por tanto, } \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{2}-x+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=-\frac{1}{2}\,.$$

$$\text{Utilizando L'Hôpital: } \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}-1}{\frac{3x^2}{1+x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1-\operatorname{sen}^2 x}{3x^2}\,\frac{1+x^3}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,.$$

La segunda fracción $\to 1$ y basta calcular el límite de la primera (sigue siendo indenterminada).

$$\text{Se puede usar Taylor: } \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1-\operatorname{sen}^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-1-x^2+o(x^2)}{3x^2}=-\frac{1}{2}\ ,$$

$$\text{o, de nuevo, L'Hôpital: } \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1-\operatorname{sen}^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}x-2\operatorname{sen}x\cos x}{6x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,\frac{1+2\cos x}{6}=-\frac{1}{2}\,.$$

b) Cuando $x\to\infty$, $\log(1+x^3)\to\infty$ y como $\arctan(\operatorname{sen}x)$ está acotado es: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan(\operatorname{sen}x)}{\log(1+x^3)}=0\,.$

$$\text{Sólo es indeterminado } \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\log(1+x^3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{3x^2}{1+x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{3x^2}=\infty\ \Rightarrow\ \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty\,.$$

2. Sea $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Determinar su dominio e intervalos de crecimiento y decrecimiento. Probar que existe un único $c\in\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ tal que $f(c)=\frac{2}{3}$.

$$\operatorname{dom}f=(-1,1)\,.\ \ f'(x)=2x(1-x^2)^{-1/2}+x^3(1-x^2)^{-3/2}=\frac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}\ \Rightarrow\ \begin{cases} f \text{ decrece en } (-1,0] \\ f \text{ crece en } [0,1)\end{cases}\,.$$

[No era necesario derivar. En $[0,1)$ claramente el numerador crece y el denominador decrece, y f es par].

Como f es continua en $\left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right]$, toma todos los valores comprendidos entre $f(\frac{3}{5})=\frac{9}{20}$ y $f(\frac{4}{5})=\frac{16}{15}$.
En particular, existe al menos un $c\in\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ en el que toma el valor $\frac{2}{3}$ (es $\frac{9}{20}<\frac{2}{3}<\frac{16}{15}$).
Al ser f creciente en ese intervalo, ese c es único.

[Podemos hallar el c: $f(c)=\frac{2}{3}\Rightarrow 9c^4+4c^2-4=0$, $c^2=\frac{-1\pm\sqrt{4+36}}{9}$, $c=\frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{10}-2}$].

3. Determinar para qué valores de $a\in\mathbf{R}$ converge la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2^{n-2}}{a^n}$. Precisar para qué valores de a la suma de la serie anterior es $\frac{1}{3}$.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}}{a^n}=\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\tfrac{2}{a}\right)^n\ ,\ \text{serie geométrica que converge si y solo sí } |\tfrac{2}{a}|<1\Leftrightarrow |a|>2\,.$$

$$\text{La suma de la serie } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}}{a^n}=\frac{1}{4}\,\frac{4/a^2}{1-2/a}=\frac{1}{a(a-2)} \text{ es igual a } \frac{1}{3} \text{ cuando } a^2-2a-3=0,$$

siempre que la serie sea convergente. De las dos raíces de la ecuación de segundo grado, 3 y -1, sólo la primera cumple que $|3|>2$, con lo que la suma es $1/3$ sólo para $a=3$.

[Para $a=-1$ comprobamos que $\sum(-1)^n 2^{n-2}$ es claramente divergente y su suma no existe].

4. Sea $f(x)=\int_1^x e^{4\arctan t}\,dt$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=1$. Probar que f posee inversa en todo $\mathbf{R}$ y calcular $(f^{-1})'(0)$.

El teorema fundamental del cálculo (el integrando es continuo $\forall x$) asegura que $f'(x)=e^{4\arctan x}\ \forall x$.

$$f(1)=\int_1^1=0\,,\ f'(1)=e^{4\arctan 1}=e^{\pi}\Rightarrow \text{la recta tangente pedida es: } y=e^{\pi}(x-1)\,.$$

Como $f'(x)=e^{4\arctan x}>0\ \forall x$, la f es estrictamente creciente en todo $\mathbf{R}$ y, por tanto, posee función inversa f^{-1}. La derivada de ésta en 0 es:

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\frac{1}{f'(1)}=e^{-\pi}$$

5. Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4-1}}$.

El integrando es positivo $\forall x>1$. Hay impropiedades en 1 y en ∞.

$\displaystyle\int_2^{\infty}$ converge: el integrando se comporta como $\frac{1}{x^{4/3}}$ $\left(\dfrac{1/\sqrt[3]{x^4-1}}{1/x^{4/3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^{-4}}}\underset{x\to\infty}{\to}1\right)$ e $\int^{\infty}\frac{dx}{x^{4/3}}$ converge.

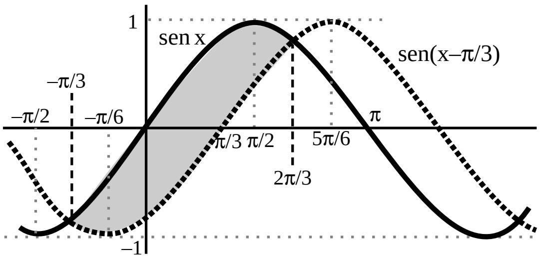
$\displaystyle\int_{1^+}^{2}$. Como $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$, el integrando se comporta cerca de $x=1$ como $\dfrac{1}{(x-1)^{1/3}}$:

$\dfrac{1/\sqrt[3]{x^4-1}}{1/\sqrt[3]{x-1}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)(x^2+1)}}\underset{x\to1}{\to}\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}>0$. Sabemos que $\int_{1^+}\frac{dx}{(x-1)^{4/3}}$ converge $\Rightarrow$ lo hace $\displaystyle\int_{1^+}^{2}$.

Al converger las dos impropias analizadas, la inicial $\displaystyle\int_1^{\infty}$ también es convergente.

6. Calcular el área de una de las regiones comprendidas entre la gráfica de $f(x)=\operatorname{sen}x$ y esta misma gráfica trasladada horizontalmente una distancia $\frac{\pi}{3}$ hacia la derecha.

Se trata de calcular el área de la región sombreada, comprendida entre la gráfica de $f(x)=\operatorname{sen}x$ y la de $g(x)=\operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{3})$. Los puntos de corte entre ambas gráficas se pueden encontrar analíticamente de varias formas. Dos de ellas son:



$$\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}(x-\tfrac{\pi}{3})=2\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{6}\cos(x-\tfrac{\pi}{6})=\cos(x-\tfrac{\pi}{6})=0\,,$$
$$x-\tfrac{\pi}{6}=\pm\tfrac{\pi}{2}\ ,\ x=-\tfrac{\pi}{3}\,,\tfrac{2\pi}{3}\,.$$

$$\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}(x-\tfrac{\pi}{3})=\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}x-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\ ,\ \operatorname{sen}x=-\sqrt{3}\cos x\ ,\ \tan x=-\sqrt{3}\ ,\ x=-\tfrac{\pi}{3}\,,\tfrac{2\pi}{3}\,.$$

[El dibujo sugería que las x de los puntos de corte eran las intermedias entre las x de los máximos y mínimos de cada una: $\frac{1}{2}\left[-\frac{\pi}{2}+(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})\right]=-\frac{\pi}{3}$, $\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})\right]=\frac{2\pi}{3}$].

El área buscada es: $\int_{-\pi/3}^{2\pi/3}\cos(x-\frac{\pi}{6})dx=\left[\operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{6})\right]_{-\pi/3}^{2\pi/3}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2})=2$. O bien:

$$\int_{-\pi/3}^{2\pi/3}\left[\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}(x-\tfrac{\pi}{3})\right]dx=\left[\cos(x-\tfrac{\pi}{3})-\cos x\right]_{-\pi/3}^{2\pi/3}=\cos\tfrac{\pi}{3}-\cos\tfrac{2\pi}{3}-\cos(-\tfrac{2\pi}{3})+\cos(-\tfrac{\pi}{3})=2\,.$$